Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 2

МАТЕМАТИКА

Н. С. ПИСКУНОВ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 26 I 1940)

Изучение движения жидкости в пограничном слое (Прандтль) приводится к решению следующей системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}=0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где V_x и V_y — искомые функции, удовлетворяющие условиям:

$$\left.\begin{aligned} &V_x=V_y=0 \text{ при } y=0, \\ &V_x=\overline{U} \quad\ \text{ при } y=\infty, \\ &V_x(x, y, 0)=V_x^0(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где p и $\overline{U}$ — заданные функции.

Для случая установившегося движения Мизес свел решение формулированной задачи к следующей:

Определить решение уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{1}{\sqrt{a-U}}\frac{\partial U}{\partial x}, \tag{3}$$

удовлетворяющее следующим условиям:

$$\left.\begin{aligned} &U(0, y)=\varphi(y), \\ &U(x, 0)=a, \\ &\lim_{y\to\infty} U(x, y)=0. \end{aligned}\right\}$$

Для простоты изложения мы в дальнейшем будем считать $a=1$.

В данной работе доказано следующее.

Теорема 1. *Пусть имеем уравнение*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{1}{\sqrt{1-U}}\frac{\partial U}{\partial x}, \tag{3'}$$

которое имеет решение в области $A\{x\leqslant X,\ -R\leqslant y\leqslant R\}$.

Тогда модули последовательных производных решения могут быть оценены через maximum решения в данной области, независимо от характера начальных данных.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично тому, как это делал академик С. Н. Бернштейн в его работе ([1]).

Далее доказываются следующие две леммы.

Лемма 1. *Решение уравнения*

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}=\frac{\partial U_1}{\partial x}, \tag{4}$$

удовлетворяющее условию $U_1(0, y)=\varphi(y)$, $U(x, 0)=1$, $U(x, \infty)=0$, *где* $\varphi''(y)\geqslant 0$, $\varphi(0)=1$, $\varphi(\infty)=0$, *удовлетворяет соотношению* $\frac{\partial U}{\partial x}\geqslant 0$ *всюду в области.*

Аналогичная теорема имеет место и для уравнения (3).

Лемма 2. *Решения уравнений* $(3')-U_2$ *и* $(4)-U_1$ *при условии* $U_1(0, y)=U_2(0, y)=\varphi(y)\geqslant 0$:

$$U_1(x, 0)=U_2(x, 0)=1,$$
$$U_1(x, \infty)=U_2(x, \infty)=0,$$

где $\varphi''(y)\geqslant 0$ *удовлетворяют соотношению*

$$U_2\leqslant U_1.$$

Далее на основании теоремы 1 и лемм 1 и 2 и некоторых результатов автора, изложенных в работе «Краевые задачи для уравнений эллиптико-параболического типа» ([2]), доказывается следующая теорема:

Теорема 3. *Существует решение уравнения* (3), *удовлетворяющее условиям:*

$$\left.\begin{aligned} &U(0, y)=\varphi(y),\\ &U(x, 0)=1,\\ &\lim_{y\to\infty} U(x, y)=0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где $\varphi(y)$*—непрерывная функция, удовлетворяющая следующим условиям:*

1. $\varphi(0)=1$; $\lim\limits_{y\to\infty}\varphi(y)=0$; $1>\varphi(y)$ *при* $y>0$. (5′)

2. $\varphi(y)<-ky+1$ *при* $y<k_1$, *где* k и k_1*—произвольно малые числа.*

Для установления единственности доказываются следующие вспомогательные предложения.

Теорема 4. *Последовательность решений уравнения* (3′) *не убывающая, если последовательность начальных функций* $\varphi_n(y)$ *возрастающая* ($\varphi_n(0)\leqslant 1$, $\varphi_n(\infty)\leqslant 0$).

Пусть имеем область $D\{x\leqslant X, y\leqslant M\}$. Пусть на границе области (на прямых $y=0, x=0, y=M$) определены функции $\{f_n(s)\}$. Каждой $(f_n(s))$ поставлено в соответствие семейство функций $\{U_n(x, y)\}$, удовлетворяющих условиям: 1) на границе они совпадают с $f_n(s)$, 2) они равностепенно непрерывны для всех $f_n(s)$, 3) $\min\{U_n(x, y)\}\geqslant \max\{U_{n'}(x, y)\}$, если $f_n(s)>f_{n'}(s)$.

Тогда имеет место следующая лемма.

Лемма 4. *Для всякого* ε *найдется* $\delta>0$, *что*

$$\max\{U_{n'}(x, y)\}-\min\{U_{n'}(x, y)\}<\varepsilon,$$

если $f_n(s)-f_{n'}(s)<\delta$.

Формулированная лемма верна для случая $M=\infty$, если имеет место следующее.

Для всякого ε_1 найдутся такие L и n, что для всех допустимых $U_k(x, y)$ будет иметь место соотношение:

$$|U_{n'}(x, y) - U_{n''}(x, y)| < \varepsilon,$$

если $y > L$, $n' > n$, $n'' > n$. На основании этого можно доказать теорему:

Теорема 5. *Решение уравнения* (3) *при условиях* (5) *и* (5') *и если* $\varphi(y)$ *удовлетворяет дополнительному условию* $\varphi''(y) \geqslant 0$ *при* $y \leqslant \varepsilon$, *где* ε — *произвольно малое число, единственно*.

Доказательство основано на следующем.

Допустим, что при некоторых краевых условиях существует два различных решения $U_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$. Рассмотрим два других решения:

$$V_1(x, y, \alpha) = \frac{U_1\left(\frac{x}{\sqrt{1-\alpha}}, y\right) - \alpha}{1-\alpha},$$

$$V_2(x, y, \alpha) = \frac{U_2\left(\frac{x}{\sqrt{1-\alpha}}, y\right) - \alpha}{1-\alpha}.$$

На основании леммы 4 следует, что

$$\lim_{\alpha \to 0} [V_1(x, y, \alpha) - V_2(x, y, \alpha)] = 0,$$

что противоречит предположению о неединственности.

Математический институт
Академия Наук СССР

Поступило
14 II 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Академик С. Н. Бернштейн, ДАН, XVIII, № 7 (1938). [2] Н. С. Пискунов, ДАН, XX, № 4 (1938).