Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 8

МАТЕМАТИКА

Л. ЕРМОЛАЕВ

ПРОЕКТИВНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ

(Представлено академиком С. А. Чаплыгиным 12 I 1940)

1. Пусть S и Σ—пара поверхностей в трехмерном проективном пространстве и их точки M и N связаны взаимно однозначным соответствием так, что прямая MN не касается этих поверхностей. В пучке касательных прямых к S в M может быть установлено проективное соответствие [1]: каждой касательной l соответствует касательная l', пересекающая прямую λ, которая касается Σ в N и соответствует l; мы назовем это проективное соответствие точечным проективным отображением или, кратко, P-отображением Σ на S.

Двойственное построение приводит к другому проективному соответствию в том же пучке, которое мы назовем тангенциальным проективным отображением или T-отображением Σ на S.

2. Отнесем поверхность S к асимптотическому тетраэдру $MM_1M_2M_3$. где M_3 совместим с N, а плоскость $M_1M_2M_3$ сделаем касательной к Σ. Тогда в уравнениях

$$dM_i=(a_i^k du+b_i^k dv)\, M_k \quad (i, k=0, 1, 2, 3), \tag{1}$$

определяющих однородные координаты вершин тетраэдра, и в условиях их совместности

$$\frac{da_i^k}{dv}-\frac{db_i^k}{du}=(a_j^k b_i^j-a_i^j b_j^k) \tag{2}$$

следует положить [2]:

$$a_2^0=a_0^3=a_1^3=b_0^1=b_0^3=b_2^0=a_3^0=b_3^0=0; \quad a_0^1=a_2^3=b_0^2=b_1^3=1;$$
$$a_0^0=-a_1^1=a; \quad a_2^2=-a_3^3=a+b_1^2; \quad b_0^0=-b_2^2=b; \quad b_1^1=-b_3^3=b+a_2^1. \tag{3}$$

Отнесем соответствующие точки M и N поверхностей к одинаковым значениям параметров u и v. Если направление касательной l определено отношением $du:dv$, то соответствующая касательная λ проходит через точки N и A:

$$A=dM_3-(a_3^3\, du+b_3^3\, dv)\, M_3=(a_3^1\, du+b_3^1\, dv)\, M_1+(a_3^2\, du+b_3^2\, dv)\, M_2.$$

Обозначив $\delta u:\delta v$ координаты направления l', можно точку A представить в виде

$$A=dM-(a\delta u+b\delta v)=M_1\delta u+M_2\delta v,$$

что приводит к соотношению между направлениями, соответствующими в P-отображении:

$$a_3^2\, du\delta u + b_3^2\, dv\delta u - a_3^1\, du\delta v - b_3^1\, dv\delta v = 0. \tag{4}$$

Задав S и Σ в тангенциальных координатах, найдем уравнение T-отображения аналогичным рассуждением:

$$a_1^0\, du\delta u + b_1^0\, dv\delta u - a_2^0\, du\delta v - b_2^0\, dv\delta v = 0. \tag{5}$$

Для T-отображения верны все теоремы, двойственные теоремам о P-отображении.

3. Два направления $du:dv$ и $\delta u:\delta v$ сопряжены на Σ, если они удовлетворяют условию

$$(a_3^1\,\delta u + b_3^1\,\delta v)(a_1^0\, du + b_1^0\, dv) + (a_3^2\,\delta u + b_3^1\,\delta v)(a_2^0\, du + b_2^0\, dv) = 0; \tag{6}$$

асимптотические на S и Σ соответствуют, если

$$a_3^1 a_1^0 + a_3^2 a_2^0 = 0, \qquad b_3^1 b_1^0 + b_3^2 b_2^0 = 0. \tag{7}$$

Из уравнения системы (2), соответствующего $i=3,\ k=0$, следует

$$b_3^1 a_1^0 + b_3^2 a_2^0 = a_3^1 b_1^0 + a_3^2 b_2^0 = \nu. \tag{8}$$

Уравнения (7) и (8) равносильны системе

$$a_1^0 = -\lambda a_3^2; \quad a_2^0 = \lambda a_3^1; \quad b_1^0 = \lambda b_3^2; \quad b_2^0 = -\lambda b_3^2. \tag{9}$$

Эти соотношения показывают, что направления $\delta_1 u:\delta_1 v$, соответствующие $du:dv$ из (4), и $\delta_2 u:\delta_2 v$, соответствующие $-du:dv$ из (5), связаны соотношением

$$\delta_1 u : \delta_1 v = -\delta_2 u : \delta_2 v. \tag{10}$$

Асимптотические линии S и Σ соответствуют в том и только в том случае, если два направления l' и l'': первое, соответствующее каждому $du:dv$ в P-отображении, и второе, соответствующее $-du:dv$ в T-отображении, сопряжены между собой в смысле Дюпена.

4. Если асимптотические линии являются соответствующими в P-отображении, то направления $du=0$ и $dv=0$ в уравнении (4) соответствуют направлениям $\delta v=0$ и $\delta u=0$ и оно принимает вид:

$$a_3^2\, du\delta u - b_3^1\, dv\delta v = 0, \tag{11}$$

и, следовательно, P-отображение является инволюцией, двойные линии которой сопряжены в смысле Дюпена.

5. Рассмотрим отображение огибающей Σ поверхностей Дарбу. Плоскость $M_1M_2M_3$ касается поверхности Дарбу, поэтому MN и M_1M_2 сопряжены в точке M_1.

В этом случае ([4]):

$$a_2^1 = 0, \quad b_1^2 = 0, \quad a_3^1 - b_3^2 = a_2^0 - b_1^0. \tag{12}$$

Двойные линии P-отображения (4) сопряжены, если

$$b_3^2 = a_3^1; \tag{13}$$

также условие сопряженности двойных линий T-отображения имеет вид:

$$a_2^0 = b_1^0. \tag{14}$$

В силу (12) соотношение (14) есть следствие (13): если двойные линии P-отображения огибающей поверхностей Дарбу сопряжены в смысле Дюпена, то сопряжены также и двойные линии T-отображения.

6. Пусть двойные линии P-отображения сопряжены одновременно на S и на огибающей Σ поверхностей Дарбу. Уравнение общей сопряженной сети можно найти из (6), положив в нем $\delta u : \delta v = -du : dv$; она удовлетворяет уравнению:

$$(a_1^0 a_3^1 + a_2^0 a_3^2) du^2 - (b_1^0 b_3^1 + b_2^0 b_3^2) dv^2 = 0. \tag{15}$$

Она совпадает с двойными линиями P-отображения при условии

$$(a_1^0 a_3^1 + a_2^0 a_3^2) : a_3^2 = (b_1^0 b_3^1 + b_2^0 b_3^2) : b_3^1,$$

которое в силу (13) и (14) сводится к

$$a_1^0 : a_3^2 = b_2^0 : b_3^1. \tag{16}$$

Двойные линии P-отображения огибающей поверхностей Дарбу совпадают с двойными линиями T-отображения той же поверхности в том и только в том случае, если они совпадают с общей сопряженной сетью поверхностей S и Σ.

7. Пусть Σ есть огибающая поверхностей Ли [5]:

$$a_3^1 = a_2^0, \qquad b_3^2 = b_1^0. \tag{17}$$

P-отображение совпадает с T-отображением при условии

$$a_3^2 = a_1^0, \qquad b_3^1 = b_2^0; \tag{18}$$

из системы (2) легко найти, что в этом случае все коэффициенты из (18) обращаются в нуль. В этом случае MN и M_1M_2 являются директрисами Вильчинского и пара поверхностей S и Σ есть пара поверхностей Демулена-Годо с общими поверхностями Ли. Асимптотические являются соответствующими в отображении.

Поступило
12 I 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. C. Graustein, Bull. Am. Math. Soc., XXXII, pp. 357—364. [2] Ermolaev, Atti d. R. Acc. Naz. dei Lincei, XXII, f. 1—2, pp. 23—29 (1935); Фиников, Проективно-диференциальная геометрия, ОНТИ, гл. II, § 2 (1937). [3] Там же, гл. IV, § 5. [4] Там же, гл. IV, § 5. [5] Там же, гл. II, § 3.