Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 4

ГЕОФИЗИКА

М. ШВЕЦ и М. ЮДИН

К ТЕОРИИ СТАЦИОНАРНЫХ ДРЕЙФОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 14 XI 1939)

Задача настоящей заметки—привести в связь ряд эмпирических формул, характеризующих морские течения, возникающие под воздействием ветра.

Это оказывается выполнимым, если рассматривать совместно движение воды и воздуха.

Мы будем пользоваться уравнениями гидромеханики в том виде, как они выведены в нашей работе [1].

Для стационарного движения, в случае, когда кинематический коэффициент виртуальной вязкости ν_j в обеих средах считается не зависящим от высоты, уравнения движения имеют вид:

$$\nu_j \frac{\partial^2 M_j}{\partial z^2} - 2\omega_z i M_j = \frac{\partial P_j}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial P_j}{\partial z} = -g\rho_j \qquad (j = 1, 2). \tag{2}$$

Здесь индекс 1 относится к атмосфере, а индекс 2—к гидросфере; ρ_j—плотность; $M_j = \rho_j (v_x + i v_y)$—комплексное количество движения единицы объема; P_j—давление; $\omega_z = \omega \sin\varphi$—проекция угловой скорости вращения земли на ось z, направленную вертикально вверх; ось ox направлена по градиенту давления.

Уравнение поверхности моря $z = 0$.

Следует обратить особое внимание на правильную трактовку уравнения (1). Это уравнение получается путем отбрасывания ряда членов в уравнении гидромеханики вязкой жидкости, малых по сравнению с силой Кориолиса.

В работе Н. Е. Кочина [2] можно найти полный вывод уравнения (1), и там выписаны все отброшенные члены. Отсюда ясно, что уравнение (1) справедливо для высоких и умеренных широт и не действительно в приэкваториальной зоне. Хотя это указание является некоторым отступлением от темы нашей работы, но мы сочли полезным его привести, так как в ряде работ по морским течениям [3] это обстоятельство не учитывается. В результате авторы этих работ вынуждены делать необоснованные гипотезы.

Рассмотрим два течения. Обозначим через x, z, p, ρ, v, ν величины, относящиеся к первому течению, а через $x', z', p', \rho', v', \nu'$—величины, относящиеся ко второму течению. Пусть одно движение отличается от другого своими вертикальным (l_z) и горизонтальным (l_x) размерами. Составим отношения:

$$\frac{x'}{x}=\frac{l'_x}{l_x}=c_x; \quad \frac{z'}{z}=\frac{l'_z}{l_z}=c_z; \quad \frac{p'}{p}=c_p; \quad \frac{\rho'}{\rho}=c_\rho; \quad \frac{v'}{v}=c_v; \quad \frac{\nu'}{\nu}=c_\nu. \qquad (3)$$

Составляя уравнения (1) и (2) для второго течения, получим на основании выписанных равенств:

$$\frac{c_\nu c_v c_\rho}{c_z^2}\nu\frac{\partial^2 M}{\partial z^2}-2\omega_z iMc_v c_\rho=\frac{c_p}{c_x}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{c_p}{c_z}\frac{\partial p}{\partial z}=-c_\rho g\rho.$$

Но, чтобы первое движение имело место, необходимо (ω_z и g остаются прежними), чтобы

$$\frac{c_v c_\nu c_p}{c_z}=c_v c_\rho=\frac{c_p}{c_x}; \qquad \frac{c_p}{c_z}=c_\rho.$$

Отсюда

$$c_\nu=c_z^2; \quad c_v c_x=c_z; \quad p'=c_v c_\rho c_x p.$$

Подставляя значения постоянных c из равенств (3), имеем условия:

$$\frac{\nu}{l_z^2}=\text{const}; \quad \frac{vl_x}{l_z}=\text{const}.$$

Рассматривая движения, у которых горизонтальные размеры одинаковые, $l'_x=l_x$, получаем: l_z пропорционально v, ν—пропорционально v^2. Напряжение $T=\nu\frac{\partial M}{\partial z}$ пропорционально $\frac{\nu\rho v}{l_z}$, т. е. пропорционально ρv^2. (За сообщение этого вывода, основанного на введении различных коэффициентов пропорциональности для вертикальных и горизонтальных масштабов движений, авторы выражают глубокую признательность академику Н. Е. Кочину.) Эти зависимости очень хорошо описывают картину как морских, так и воздушных течений.

Пропорциональность напряжения трения у земной поверхности кинетической энергии была давно установлена из наблюдений Тейлором. Эмпирическую зависимость между ν и v^2 нашли Торадэ, В. Шмидт, Свердруп и др.

Приведем таблицу зависимости ν_2 от скорости ветра у поверхности моря w_{10}, полученную В. Шмидтом (4):

$\lvert w_{10}\rvert =$	3	5	7	10	20 м/сек
$\nu_2 =$	28	110	220	430	1 720 см²/сек⁻¹

Для $|w_{10}|\geqslant 5$ м/сек с большой точностью оправдывается закон:

$$\nu_2=c\,|w_{10}|^2, \qquad (4)$$

причем $c=4{,}3\cdot10^{-4}$ сек.

Наряду с этим между скоростью ветра $|w_{10}|$ и скоростью вызываемого им дрейфового течения $|w_{20}|$ существует по наблюдениям Нансена, Динклаге, Торадэ, Струйского, Пальмена и др. зависимость:

$$|w_{20}|=0{,}0127\frac{|w_{10}|}{\sqrt{\sin\varphi}}. \qquad (5)$$

В дальнейшем мы укажем связь между формулами (4) и (5). Будем считать, что $\frac{\partial P_j}{\partial x}=G(x)$.

Это ограничение не существенно и делается только для упрощения выкладок.

Решение уравнения (1) будет иметь вид:

$$M_1 = (A_1 + iA_2)\, e^{-n_1 z \sqrt{i}} + G,$$
$$M_2 = (B_1 + iB_2)\, e^{n_2 z \sqrt{i}} + G,$$

где

$$n_j = \sqrt{\frac{2\omega_z}{\nu_j}}.$$

В решении отброшены члены, неограниченно возрастающие при удалении в обе стороны от поверхности раздела.

Для определения произвольных постоянных находим из равенства напряжений при $z = 0$:

$$-\sqrt{2\omega_z \nu_1 i}\,(A_1 + iA_2) = \sqrt{2\omega_z \nu_2 i}\,(B_1 + iB_2). \tag{6}$$

Но, как было показано, напряжение T вблизи стенки пропорционально кинетической энергии потока.

Обычно принимается, что направление вектора T противоположно направлению скорости

$$T = -k\rho\,|w|\,w. \tag{7}$$

Для коэффициента k воспользуемся значением, полученным Тейлором [5]: $k = 0{,}0025$. Хотя значение получено из наблюдений вблизи земной поверхности, но ввиду малой подвижности воды по сравнению с воздухом мы считаем возможным принять это значение для определения трения вблизи водной поверхности.

В наших обозначениях закон (7) напишется, принимая во внимание (6), так:

$$\sqrt{2\omega \sin\varphi\, \nu_2 i}\,(B_1 + iB_2) = k\rho_0 w_{10}\,|w_{10}|$$

или согласно (3):

$$e^{i\frac{\pi}{4}}(B_1 + iB_2) = \frac{k\rho_{10}}{\sqrt{2\omega c \sin\varphi}}\, w_{10}.$$

Разделим обе части последнего выражения на ρ_{20}, тогда получим:

$$e^{i\frac{\pi}{4}}\left(w_{20} - \frac{1}{\rho_{20}}\,G\right) = \frac{k\rho_{10}}{\rho_{20}\sqrt{2\omega c}} \cdot \frac{w_{10}}{\sqrt{\sin\varphi}}.$$

Подставляя численное значение c, ω и приняв $\frac{\rho_{10}}{\rho_{20}} = 1{,}3 \cdot 10^{-3}$, получим:

$$e^{i\frac{\pi}{4}}\left[w_{20} - \frac{1}{\rho_{20}}\,G\right] = \frac{0{,}013}{\sqrt{\sin\varphi}}\, w_{10}.$$

Заметим, что $\frac{G}{\rho_{20}}$ имеет порядок 1 см/сек и в большинстве случаев пренебрежимо по сравнению с w_{20}.

Таким образом мы получим с большой точностью эмпирическую формулу (5).

Характерным является то, что мы нигде не отступаем от предпосылок классической теории Экмана. Это показывает, что классическая теория далеко не исчерпала своих возможностей и в ряде случаев приводит к результатам, которые еще не получены из новой теории Прандтля-Кармана. С другой стороны, ряд результатов новой теории, повидимому, никак не может быть объяснен со старой точки зрения. Для выяснения круга вопросов, в которых применима и та и другая теория, и точек их взаимного соприкосновения необходимо детальное исследование.

Здесь можно только указать, что наша работа ([1]) дает возможность получить, при некоторых условиях, с большим приближением условия (4) и (7) также с точки зрения теории Прандтля-Кармана.

Для определения постоянных интегрирования мы располагаем соотношениями:

$$B_1+iB_2=-\sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_2}}(A_1+iA_2).$$

$$e^{i\frac{\pi}{4}}(B_1+iB_2)=\frac{10}{\sqrt{\sin\varphi}}(A_1+iA_2+G).$$

(Второе соотношение приближенно, так как в нем отброшен член $\frac{1}{\rho_{20}}G$.)

Обозначив $10\sqrt{\frac{2\nu_2}{\nu_1\sin\varphi}}=\lambda$ и считая отношение $\frac{\nu_2}{\nu_1}$ не зависящим от A и B, находим:

$$A_1=-\frac{\lambda(1+\lambda)G}{1+(1+\lambda)^2};\qquad A_2=\frac{\lambda G}{1+(1+\lambda)^2};$$

$$B_1=\frac{\lambda(1+\lambda)G}{1+(1+\lambda)^2}\sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_2}};\quad B_2=-\frac{\lambda G}{1+(1+\lambda)^2}\sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_2}}.$$

Зная распределение плотности и вязкости в атмосфере и гидросфере, можно построить общую картину воздушных и морских течений планетарного характера.

Главная геофизическая обсерватория

Поступило
3 XII 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Юдин и М. Швец, Тр. ГГО, вып. 31 (печатается). [2] Н. Е. Кочин, Тр. ГГО, вып. 4 (1934). [3] В. Б. Штокман, Известия Акад. Наук, сер. географ. и геофиз., № 1 (1939). [4] В. Шулейкин, Физика моря, стр. 12 (1933). [5] Брент, Физическая и динамическая метеорология, стр. 234 (1938).