Учитывая, что $L \neq 0$ и $\cos\theta \neq 0$, разделим правую и левую часть неравенства на величину $L\cos\theta$.

Окончательно получим

$$\frac{d^2\psi}{d\varphi_2} + \left(1 - \frac{d\psi}{d\varphi}\right)\left(1 - 2\frac{d\psi}{d\varphi}\right) tg\theta \geq 0.$$

Полученное выражение будет условием выпуклости кулачка с плоским толкателем.

Литература

1. Артоболевский, И. И. Теория механизмов и машин / И. И. Артоболевский. – М. : Наука, 1975. – 640 с.

К. В. Ридкина
(ГГТУ имени П. О. Сухого, Гомель)
Науч. рук. **В. Ю. Гавриш**, канд. физ.-мат. наук, доцент

РАЗМЕРНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПЕТЛЕВЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Введение. Известно [1], что вычисление квантово-полевых амплитуд в высших порядках теории возмущений сводится к вычислению петлевых интегралов с последующей процедурой перенормировки массы и заряда частиц. Наиболее известными подходами являются процедура регуляризации Паули-Виларса [1], сведение к мастер-интегралам методом Ткачёва-Четыркина [2] и др.

Работа посвящена наиболее рациональному методу расчета петлевых интегралов – методу размерной регуляризации [3], в котором осуществляется аналитическое продолжение к нецелым размерностям пространства. Поскольку изложение всех методов достаточно громоздко, зададимся целью продемонстрировать технику расчёта методом размерной регуляризации в простейшем случае скалярного интеграла.

Постановка задачи. Простейший случай расходящегося интеграла имеет вид

$$I = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - C)^2}, \tag{1}$$

где $q=(q^0,\vec{q})$, а пределы интегрирования опущены. Для вычисления данного интеграла, расходящегося логарифмически, перейдём к d-мерному пространству времени, в котором 4-вектор q

$$q=(q^0,|\vec{q}|,\varphi,\theta_1,\theta_2,...) \tag{2}$$

и, соответственно, выражение (1) примет вид:

$$I=\int\frac{d^d q}{(2\pi)^d}\frac{1}{(q^2-C)^\alpha}=\int\frac{d^{d-1}q}{(2\pi)^d}\int dq^0\frac{1}{((q^0)^2-|\vec{q}|^2-C)^\alpha}. \tag{3}$$

Вычисление интеграла (3) проведём с Виковским поворотом [1]:

$$q^0\to iq_E^0,\qquad \int dq^0\to i\int dq_E^0, \tag{4}$$

в результате которого $q_E^2=-q^2$, а выражение (3) примет вид

$$I=i(-1)^{-\alpha}\int\frac{d^d q_E}{(2\pi)^d}\frac{1}{(q_E{}^2+C)^\alpha}. \tag{5}$$

Дальнейшая процедура вычисления связана с интегрированием по d-мерному пространству

$$\int d^d q_E=\int d\bar{q}\;\bar{q}^{d-1}\;d\Omega_{d-1}, \tag{6}$$

где $\bar{q}=\sqrt{(q_E^0)^2+|\vec{q}|^2}$ −модуль вектора q_E, а $d\Omega_{d-1}$ −элемент телесного угла. Для вычисления последнего воспользуемся следующим трюком: известно, что

$$\int e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{7}$$

Переходя к d-мерному интегрированию в формуле (7)

$$\int e^{-(x_1^2+x_2^2+...+x_d^2)}dx_1dx_2...dx_d = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{2}, \tag{8}$$

или, с учетом того, что

$$|\vec{r}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_d^2}, \quad dx_1dx_2...dx_d = |\vec{r}|^{d-1}\, d|\vec{r}|\, d\Omega_{d-1} \tag{9}$$

из выражения (8) получаем

$$\int e^{-|\vec{r}|^2}\, |\vec{r}|^{d-1}\, d|\vec{r}|\, d\Omega_{d-1} = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{2}, \tag{10}$$

откуда

$$\int d\Omega_{d-1} = 2\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}, \tag{11}$$

где $\Gamma(z)-$гамма-функция Эйлера.

Вычисление петлевого интеграла. Интеграл (5) вычислим с помощью (11) путем сведения к табличному: используя интегральное представление B-функции Эйлера

$$\mathrm{B}(n,m)=\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} = \int dt\; \frac{t^{n-1}}{(1+t)^{n+m}}, \tag{12}$$

вводя переменную $t=\left(\frac{s}{M}\right)^a$ из соотношения (12), получаем:

$$\int \frac{ds^a}{M^a}\left(\frac{s}{M}\right)^{a(n-1)}\frac{M^{a(n+m)}}{(s^a+M^a)^{n+m}} = \int \frac{a\, s^{a-1}ds}{M^a}\left(\frac{s}{M}\right)^{a(n-1)}\frac{M^{a(n+m)}}{(s^a+M^a)^{n+m}} =$$

$$= a\, M^{a\,m}\int ds \frac{s^{a\,n-1}}{(s^a+M^a)^{n+m}}. \tag{13}$$

Вводя обозначения $x = an - 1$, $y = n + m$ из (13), окончательно получаем:

$$\int ds \frac{s^x}{(s^a + M^a)^y} = \frac{1}{a\, M^{ay-x-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1+x}{a}\right)\Gamma\left(\frac{ay-x-1}{a}\right)}{\Gamma(y)}. \tag{14}$$

С учётом выражения (14) после некоторых преобразований получаем [4]:

$$I = i(-1)^{-\alpha} \int \frac{d^d q_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 + C)^\alpha} = i\frac{(-1)^{-\alpha}}{(2\pi)^d} \int d\Omega_{d-1} \int d\bar{q}\ \frac{\bar{q}^{d-1}}{(\bar{q}^2 + C)^\alpha} =$$

$$= i\frac{(-1)^{-\alpha}}{(2\pi)^d} \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \int d\bar{q}\ \frac{\bar{q}^{d-1}}{(\bar{q}^2 + C)^\alpha} = i\frac{(-1)^{-\alpha}}{(2\pi)^d} \pi^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(-\frac{d}{2} + \alpha\right)}{\Gamma(\alpha)} C^{\frac{d}{2}-\alpha}. \tag{15}$$

Анализ выражения (15) показывает, что в частном случае интеграла типа (1) для $d = 4$ и $\alpha = 2$ получаем расходящийся интеграл, дальнейший расчёт которого связан с использованием постоянной Эйлера–Маскерони [4]. Данная процедура достаточно громоздка (см. к примеру [4]).

Заключение. В работе продемонстрирована процедура расчёта петлевых интегралов методом размерной регуляризации. Анализ полученных выражений показывает, что расходимость в таком подходе обусловлена наличием полюсов у гамма-функции Эйлера.

Литература

1. Пескин, М. Е. Введение в квантовую теорию поля / М. Е. Пескин, Д. В. Шрёдер. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика», 2001. – 784 с.

2. Smirnov, A. V. The number of master integrals is finite / A. V. Smirnov, A. V. Petukhov. – Lett. Math. Phys. – Vol. № 97, 2011. – p.37–44.

3. Казаков, Д. И. Радиационные поправки, расходимости, регуляризация / Д. И. Казаков. – Дубна : ОИЯИ, 2008. – 93 с.

4. Romao, J. C. Modern techniques for one-loop calculation / J. C. Romao. – Portugal : Instituto Superior Tecnico, 2004. – 81 p.