Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XX, № 5

МАТЕМАТИКА

М. ЛАВРЕНТЬЕВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И О ГАЗОВЫХ СТРУЯХ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 9 VI 1938)

1. Определения. Пусть нам дана положительная и дважды дифференцируемая функция $q(t)$, $|q''(t)| \leqslant M$. Мы скажем, что отображение

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

некоторой области D плоскости $z = x + iy$ принадлежит классу A_q, если в каждой точке (x_0, y_0) области D будут выполнены следующие условия:

1) Функции u и v обладают в области D непрерывными частными производными по x и по y, а функциональный определитель $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$ больше нуля.

2) При линейном преобразовании

$$u = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x_0} x + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y_0} y; \qquad v = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x_0} x + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y_0} y$$

круг K плоскости z переходит в эллипс E с осями, параллельными координатным осям.

3) Считая радиус круга K равным единице и обозначая через V и b полуоси эллипса E, параллельные соответственно осям u и v, будем иметь $V = bq(V)$.

Из данного определения непосредственно следует, что при $q(t) \equiv 1$ функции класса A_q будут аналитическими. Кроме того нетрудно видеть, что при $q(t) = q_0(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2\alpha}\right)^{-\beta}$, где α и β суть положительные постоянные, функции u и v будут удовлетворять уравнениям газовой динамики для установившихся течений; задачи на построение установившихся течений газа эквивалентны задачам построения отображений, класса A_{q_0}, области течения на области специального вида. $V = V(z)$ будет при этом давать величину скорости потока в точке z.

2. Основные свойства отображений класса A_q. Наряду с условиями, принятыми выше, будем в дальнейшем предполагать, что функция $q(t)$ удовлетворяет условиям: 1) $q(t)$ ограничена сверху и снизу положительными константами, 2) при любых положительных t имеем:

$$q(t) - tq'(t) > k > 0, \qquad k = \text{const}.$$

Заметим, что для отображений, определяющих течение газа, эти условия будут выполнены при всех дозвуковых режимах.

Теорема 1. *Пусть даны три кривые* $y=y_1(x)$, $y=y(x)$ *и* $y=\overline{y}(x)$, $|x|<\infty$,

$$y_1(x)<\overline{y}(x)\leqslant y(x),$$

где функции y, y_1, $\overline{y}$ *однозначны и обладают ограниченной второй производной. Пусть* $w=f(z)$ *и* $w=\overline{f}(z)$ *суть отображения класса* A_q *(соответственно) областей* $y_1(x)<y<y(x)$ *и* $y_1(x)<y<\overline{y}(x)$ *на полосу* $0<v<h$ *при условии соответствия бесконечно удаленных граничных точек. При этих условиях во всех точках кривой* $y_1(x)$ *будем иметь*

$$\frac{df(z)}{ds}\leqslant\frac{d\overline{f}(z)}{ds};$$

если кроме того имеем $y(x_0)=\overline{y}(x_0)$, *то в точке* $[x_0,\ y(x_0)]$ *будем иметь*

$$\frac{df(z)}{d\sigma}\geqslant\frac{d\overline{f}(z)}{d\sigma},$$

где ds *и* $d\sigma$ *суть соответственно дифференциалы дуг кривых* $y_1(x)$ *и* $y(x)$. *Знаки равенств достигаются только при совпадении* $y(x)$ *и* $\overline{y}(x)$.

Теорема 2. *Пусть кривая* $y=y(x)$, $y(x)>0$, *удовлетворяет условиям из теоремы* 1, *пусть в точке* x_0 *производная* $y'(x)$ *достигает максимума* (минимума), *а в окрестности той же точки* $y''(x)$ *удовлетворяет условию Hölder'а. При этих условиях, обозначая через* $w=f(z)$, $f(-\infty)=-\infty$, $f(\infty)=\infty$ *отображение класса* A_q *области* $D: 0<y<y(x)$ *на полосу* $0<v<h$, *в точке* $[x_0, y(x_0)]$ *будем иметь:*

$$\frac{d^2f(z)}{ds^2}<0\qquad\left(\frac{d^2f(z)}{ds^2}>0\right).$$

Теорема 3. *При обозначениях, принятых в теореме* 2, *если кривая* $y(x)$ *содержит дугу* γ *окружности круга* K, *расположенного вне области* D (в области D), *то на* γ *функция* $V=\frac{df(z)}{ds}$ *не может достигать минимума* (максимума).

3. Теоремы существования. Отмеченные выше предложения доказываются чисто геометрически параллельно со следующей основной теоремой существования.

Теорема 4. *Пусть нам даны две кривые* $y=y_1(x)$ *и* $y=y(x)$, *удовлетворяющие условиям из теоремы* 1, *и пусть* $q(t)$ *ограничена сверху и снизу и удовлетворяет* 2). *При этих условиях существует отображение* $w=f(z)$, $f(-\infty)=-\infty$, $f(\infty)=\infty$ *класса* A_q, *переводящее область* $y_1(x)<y<y(x)$ *в полосу* $0<v<h$. *Отображение единственно с точностью до поступательного сдвига полосы* $0<v<h$ *и непрерывно зависит от параметра* h.

Опираясь на все приведенные выше предложения, можно доказать существование решения и установить ряд его свойств для некоторых задач струйной теории. Будем обозначать через

$$w=f(z,\gamma,q,h),\ f(-\infty,\gamma,q,h)=-\infty,\ f(\infty,\gamma,q,h)=\infty$$

отображение класса A_q области, ограниченной линиями γ_1 и γ, на полосу $0<v<h$.

Теорема 5. *Пусть* γ_1 *есть кривая, расположенная в нижней полуплоскости и определяемая однозначной функцией* $x: y=F_1(x)$,

$|F_1''(x)| < C = \text{const}$, $|x| < \infty$. *Пусть кроме того дана дуга* $\Gamma_1: y = \varphi(x)$, *где* $\varphi(x)$ *однозначна и дважды дифференцируема на отрезке* $(0, x_1)$, *причем* $\varphi(x) > F_1(x)$. *При этих условиях существует единственная кривая* $\Gamma_2: y = \psi(x)$, $\psi(x_1) = \varphi(x_1)$, $\psi(x) \leqslant 0$, *определенная при* $x \geqslant x_1$, *такая, что в каждой ее точке с отрицательной ординатой будем иметь*

$$\frac{df(z, \gamma, q, h)}{ds} = c = \text{const},$$

где γ *есть кривая, составленная из отрицательной части оси* x *дуги* Γ_1 *и кривой* Γ_2, *а* ds *есть дифференциал дуги* γ. *Полученная функция* $f(z, \gamma, q, h)$ *непрерывно зависит от* h.

Отметим одно аэродинамическое следствие из последней теоремы. Допустим, что при $x \to \pm\infty$ функция F_1 стремится к пределам, отличным от нуля, и рассмотрим задачу о существовании в полосе $|y| < -F_1(x)$ газового потока, обтекающего дугу $y = \pm\varphi(x)$ со срывом струй в концах этой дуги и имеющего в $-\infty$ заданную скорость V_0. Мы можем утверждать, что найдется такое число $\overline{V}_0$, что при $V_0 \leqslant \overline{V}_0$ решение поставленной задачи существует, причем при $V_0 = \overline{V}_0$ в потоке найдется точка, где скорость потока будет не меньше скорости звука.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
15 VI 1938.