Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XX, № 5

МАТЕМАТИКА

Ф. И. ХАРШИЛАДЗЕ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИИ В ВИДЕ ПРЕДЕЛА СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА, РАСПРОСТРАНЕННОГО НА БЕСКОНЕЧНЫЙ ПРОМЕЖУТОК

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 17 V 1938)

В недавно появившейся статье S. Bochner'a и S. Izumi (1) устанавливаются достаточные условия представимости функции в виде предела сингулярного интеграла, распространенного на бесконечный промежуток. Именно, авторы исследуют равенство

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\, k(nt)\, dt = f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} k(t)\, dt. \tag{*}$$

При этом они налагают требование непрерывности функции $f(t)$ в точке $t=x$.

Настоящая заметка посвящена обобщению результатов отмеченной статьи для того случая, когда точка $t=x$ является точкой Lebesgue'a функции $f(t)$, т. е. точкой, в которой выполняется соотношение

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} |f(t)-f(x)|\, dt = 0.$$

Нам понадобятся две леммы, которые приведем без доказательства.

1. Лемма И. П. Натансона (2). Если $f(t)$ и $\psi(t)$ положительные суммируемые функции, заданные в (a, b), и $\psi(t)$ убывает, то

$$\int_a^b f(t)\, \psi(t)\, dt \leqslant 4\mu \int_a^b \psi(t)\, dt,$$

где

$$\mu = \sup_{0\leqslant h\leqslant b-a} \left\{ \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(t)\, dt \right\}.$$

2. Лемма S. Bochner'a и S. Izumi (1). Если

1) $\int_a^b |g(t)|\, dt < +\infty, \qquad (0 < a < b < \infty)$

2) $|H(t)| \leqslant M < +\infty$,

3) $\int\limits_a^\infty \frac{|H(t)|}{t} dt < +\infty$,

то имеет место равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b g(t) H(nt) dt = 0.$$

Теорема I. *При условиях:*

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|^p}{1+|t|} dt < +\infty, \qquad (p > 1)$

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |t^{q-1} k^q(t)| dt < +\infty, \qquad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$

3) *существует функция* $k_1(z)$ *такая, что*

a) $k_1(z)$ *возрастает при* $z \leqslant 0$ *и убывает при* $z \geqslant 0$;

b) $|k(z)| \leqslant k_1(z)$,

c) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k_1(z) dz < +\infty$,

равенство (*) *имеет место в каждой точке Lebesgue'а функции* $f(t)$.

Теорема II. *Если*

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|}{1+|t|} dt < +\infty$,

2) $|tk(t)| \leqslant M < +\infty$,

3) *существует функция* $k_1(z)$, *удовлетворяющая условиям* a), b) *и* c) *теоремы I, то равенство* (*) *выполняется в каждой точке Lebesgue'а функции* $f(t)$.

Замечание: Очевидно, без умаления общности можно положить $x=0$ и $k(t)=0$ при $t<0$.

Кроме того можно считать, что $f(0)=0$. Действительно, полагая

$$\varphi(t) = \begin{cases} f(0) \text{ в промежутке } (0,1) \\ 0 \text{ вне этого промежутка,} \end{cases}$$

будем иметь:

$$\left| n\int\limits_0^\infty \varphi(t) k(nt) dt - \varphi(0) \int\limits_0^\infty k(t) dt \right| =$$

$$= \left| \int\limits_0^\infty \left\{ \varphi\left(\frac{t}{n}\right) - \varphi(0) \right\} k(t) dt \right| \leqslant |\varphi(0)| \int\limits_n^\infty |k(t)| dt$$

и так как последний интеграл стремится к нулю, то теоремы достаточно доказать для разности $f(t)-\varphi(t)$.

Итак, требуется доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^\infty f(t)\,k(nt)\,dt=0,$$

при условии

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h |f(t)|\,dt=0.$$

Доказательство теоремы I. Для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое $\delta>0$, что при $h\leqslant\delta$ будет

$$\frac{1}{h}\int_0^h |f(t)|\,dt<\varepsilon;$$

для такого δ имеем:

$$n\int_0^\delta |f(t)\,k(nt)|\,dt\leqslant\int_0^\delta |f(t)|\,nk_1(nt)\,dt\leqslant 4\varepsilon\int_0^\infty k_1(t)\,dt$$

(последнее неравенство следует из леммы И. П. Натансона).

Оценим интеграл по промежутку (δ,∞):

$$n\int_\delta^\infty |f(t)|\,|k(nt)|\,dt\leqslant\left(\int_\delta^\infty\frac{|f(t)|^p}{t}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_\delta^\infty n^q t^{q-1}|\,k^q(nt)|\,dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Первый множитель правой части есть конечное число, а

$$\left(\int_\delta^\infty n^q t^{q-1}|\,k^q(nt)|\,dt\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\int_{n\delta}^\infty |\,t^{q-1}k^q(t)\,|\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

и по условию 2) стремится к нулю, когда $n\to\infty$. Таким образом теорема доказана.

Доказательство теоремы II. Представим изучаемый интеграл в форме:

$$n\int_0^\infty f(t)\,k(nt)\,dt=n\int_0^a f(t)\,k(nt)\,dt+n\int_a^b f(t)\,k(nt)\,dt+n\int_b^\infty f(t)\,k(nt)\,dt.$$

Первое слагаемое бесконечно мало вместе с a, что устанавливается так же, как в теореме I.

Далее,

$$n\int_b^\infty |f(t)|\,|k(nt)|\,dt\leqslant\int_b^\infty\left|\frac{f(t)}{t}\,nt\,k(nt)\right|dt\leqslant M\int_b^\infty\frac{|f(t)|}{t}\,dt$$

и при достаточно больших b третье слагаемое также сколь угодно мало.

Остается доказать, что при любых a и b, где $0<a<b<\infty$, будет

$$\lim_{n\to\infty} n\int_a^b f(t)\,k(nt)\,dt=0.$$

Но это непосредственно следует из приведенной леммы Bochner'a и Izumi, если положить: $g(t)=\frac{f(t)}{t}$ и $H(t)=t\,k(t)$.

Замечание 1. Если функция $f(t)$ ограничена всюду, $|f(t)| \leqslant M$, и $k(t)$ удовлетворяет условию 3) теоремы I, то равенство (*) имеет место в каждой точке Lebesgue'а функции $f(t)$. В самом деле

$$\left| n \int_{0}^{\infty} f(t)\, k(nt)\, dt \right| \leqslant n \int_{0}^{\delta} |f(t)|\, k_1(nt)\, dt + M \int_{n\delta}^{\infty} k_1(t)\, dt.$$

Первое слагаемое бесконечно мало вместе с δ, что устанавливается так же, как в теореме I, а второе слагаемое при любом $\delta > 0$ стремится к нулю, когда $n \longrightarrow \infty$.

Замечание 2. Обе теоремы применимы к ядру Вейерштрасса:

$$k(t) = e^{-t^2}.$$

Стало быть, если $f(t)$ ограничена или удовлетворяет условиям одной из двух доказанных теорем, то имеет место предельный переход:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-n^2 (t-x)^2}\, dt = f(x)$$

во всех точках Lebesgue'а функции $f(t)$ (т. е. почти везде).

Ленинградский государственный университет.

Поступило 31 V 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] The Tôhoku Mathematical Journ., **42**, II, 191—194. [2] Труды Ленингр. индустр. ин-та, № 4, 39 (1937).