Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XX, № 1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

И. БЕРШТЕЙН

О ФЛУКТУАЦИЯХ ВБЛИЗИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

(Представлено академиком Л. И. Мандельштамом 26 IV 1938)

В настоящей заметке делается попытка приближенно рассмотреть вопрос о флуктуациях вблизи периодического движения для автоколебательных систем с одной степенью свободы, близких к линейным консервативным.

Решение поставленной задачи дается при помощи уравнения Эйнштейна-Фоккера, причем при определении коэффициентов этого уравнения, характеризующих динамический процесс, используется так называемый метод ван-дер-Поля ([1,2]), хорошо известный в теории нелинейных колебаний; коэффициенты же этого уравнения, характеризующие статистический процесс, выражаются через величины, известные из теории флуктуаций в электрических цепях.

§ 1 посвящен получению основного уравнения Эйнштейна-Фоккера.

§ 2 — решению этого уравнения для т. н. «изотропного» случая и вычислению для этого случая флуктуаций амплитуды, фазы и размытости спектра.

§ 3 — решению основного уравнения и вычислению спектра в более общих предположениях.

§ 4 — применению полученных результатов к ламповой схеме.

Автор предполагает в другом месте дать теорию опыта, позволяющего проверить развитые здесь соображения.

§ 1. Предположим, что поведение рассматриваемой системы отображается уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= y + \mu F(x, y) + f_1(\tau), \\ \frac{dy}{d\tau} &= -x + \mu G(x, y) + f_2(\tau), \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A)}$$

где μ — достаточно малый параметр, определяющий степень близости рассматриваемой динамической системы к линейной консервативной, а $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$ — функции, отображающие так называемые «случайные» воздействия на систему. Переходя к полярным координатам ($x = R\cos\vartheta$, $y = R\sin\vartheta$) и беря, следуя ван-дер-Полю, усредненные по ϑ значения динамических членов, получаем:

$$\frac{dR}{d\tau} = \mu\Phi(R) + f_1(\tau)\cos\vartheta + f_2(\tau)\sin\vartheta;$$

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = -1 + \mu\Psi(R) - \frac{f_1(\tau)}{R}\sin\vartheta + \frac{f_2(\tau)}{R}\cos\vartheta,$$

где

$$\Phi(R)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}[F(R\cos\vartheta, R\sin\vartheta)\cos\vartheta+G(R\cos\vartheta, R\sin\vartheta)\sin\vartheta]\,d\vartheta,$$

$$\Psi(R)=\frac{1}{2\pi R}\int\limits_0^{2\pi}[-F(R\cos\vartheta, R\sin\vartheta)\sin\vartheta+G(R\cos\vartheta, R\sin\vartheta)\cos\vartheta]\,d\vartheta.$$

Пусть $R=R_0\,(R_0>0)$— корень уравнения $\Phi(R)=0$ и пусть $\Phi'(R_0)<0$. Для динамических уравнений, полученных по ван-дер-Полю, окружность $R=R_0$ в этом случае является устойчивым предельным циклом, которому соответствует синусоидальное движение

$$x=R_0\cos\omega\tau,\quad \text{где}\quad \omega=1-\mu\Psi(R_0).$$

Для исследования случайных отклонений движения от синусоидального положим $R=R_0+z$ и перейдем к уравнениям для z и ϑ, отбрасывая члены, содержащие высшие степени z:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dz}{d\tau}&=-p_1z+f_1(\tau)\cos\vartheta+f_2(\tau)\sin\vartheta,\\ \frac{d\vartheta}{d\tau}&=-\omega+p_2z-\frac{f_1(\tau)}{R_0}\sin\vartheta+\frac{f_2(\tau)}{R_0}\cos\vartheta,\end{aligned}\right\}\qquad\text{(B)}$$

где $p_1=-\mu\Phi'(R_0)$; $p_2=\mu\Psi'(R_0)$.

Предположим, что «случайные» функции $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$ таковы, что существуют пределы:

$$b_1=\lim_{\Delta\tau\to0}\frac{\overline{\left[\int\limits_\tau^{\tau+\Delta\tau}f_1(\tau)\,d\tau\right]^2}}{\Delta\tau};\quad b_2=\lim_{\Delta\tau\to0}\frac{\overline{\left[\int\limits_\tau^{\tau+\Delta\tau}f_2(\tau)\,d\tau\right]^2}}{\Delta\tau};$$

$$b_3=\lim_{\Delta\tau\to0}\frac{\overline{\left[\int\limits_\tau^{\tau+\Delta\tau}f_1(\tau)\,d\tau\int\limits_\tau^{\tau+\Delta\tau}f_2(\tau)\,d\tau\right]}}{\Delta\tau}.$$

Мы предположим, что $b_3=0$, и примем, что b_1 и b_2 не зависят от R и ϑ. При этих предположениях уравнение Эйнштейна-Фоккера имеет вид:

$$\frac{\partial w}{\partial\tau}-\frac{\partial}{\partial z}(p_1zw)-\omega\frac{\partial w}{\partial\vartheta}+\frac{\partial}{\partial\vartheta}(p_2zw)=\frac{D}{2}\left\{R_0^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}[(1-q\cos2\vartheta)\,w]+\right.$$
$$\left.+2R_0\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\vartheta}[q\sin2\vartheta w]+\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}[(1+q\cos2\vartheta)\,w]\right\},\qquad\text{(C)}$$

где

$$D=\frac{b_1+b_2}{2R_0^2};\qquad q=\frac{b_2-b_1}{b_1+b_2}.$$

Это уравнение совместно с соотношениями $x=(R_0+z)\cos\vartheta$, $y=(R_0+z)\sin\vartheta$ является той идеальной математической моделью, которая согласно нашим предположениям, приближенно отображает поведение рассматриваемой автоколебательной системы вблизи устойчивого периодического режима. Очевидно, что эта идеальная модель решает вопрос о размытости спектра лишь вблизи основной частоты динамической системы.

§ 2. Рассмотрим случай «изотропных» флуктуаций, когда $b_1 = b_2$. В этом случае уравнение (C) превращается в уравнение с постоянными коэффициентами, интересующее нас решение которого имеет вид:

$$w(z_0, \vartheta_0; z, \vartheta; \tau - \tau_0) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi\alpha_{11}}} e^{-\frac{(z-\alpha_1)^2}{2\alpha_{11}}} \left\{ 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\delta}{2\alpha_{11}}} \cos n\left[\vartheta - \alpha_2 - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}(z - \alpha_1)\right] \right\}, \quad \text{(D)}$$

где

$$\alpha_1 = z_0 e^{-p_1(\tau-\tau_0)},$$

$$\alpha_2 = \vartheta_0 - \omega(\tau - \tau_0) + \frac{p_2}{p_1} z_0 [1 - e^{-p_1(\tau-\tau_0)}],$$

$$\alpha_{11} = \frac{DR_0^2}{2p_1}[1 - e^{-2p_1(\tau-\tau_0)}],$$

$$\alpha_{22} = \left[D + \frac{Dp_2^2R_0^2}{p_1^2}\right](\tau - \tau_0) + \frac{DR_0^2}{2}\frac{p_2^2}{p_1^3}[4e^{-p_1(\tau-\tau_0)} - e^{-2p_1(\tau-\tau_0)} - 3],$$

$$\alpha_{12} = \frac{DR_0^2}{2}\frac{p_2}{p_1^2}[1 - 2e^{-p_1(\tau-\tau_0)} + e^{-2p_1(\tau-\tau_0)}]; \quad \delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2.$$

При $\tau \to +\infty$ получим стационарное решение:

$$w_0(z, \vartheta) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{p_1}{\pi DR_0^2}}\, e^{-\frac{p_1 z^2}{DR_0^2}}.$$

Формула (D) позволяет вычислить флуктуации амплитуды, фазы и размытости спектра.

Эти вычисления проведем, полагая $p_2 = 0$, так как при $p_2 \neq 0$ вычисления становятся весьма громоздкими. Отметим, что для большинства обычных схем $p_2 = 0$.

Для флуктуаций амплитуды получим (при $\tau \to +\infty$):

$$\overline{z^2} = \frac{DR_0^2}{2p_1}. \quad \text{(E)}$$

Эта формула показывает, что флуктуации амплитуды сильно нарастают при подходе системы (путем изменения параметра) к бифуркационным значениям, соответствующим $p_1 = 0$*. При нахождении решения (D) предполагалось, что ϑ меняется от 0 до 2π. Если мы примем, что ϑ меняется от $-\infty$ до $+\infty$, то решение задачи о флуктуациях будет более сложным, так как в этом случае уравнение (C) не будет иметь отличного от нуля стационарного решения. Отметим, что при последнем способе отсчета углов для флуктуации фазы получается обычный диффузионный закон:

$$\overline{(\vartheta + \omega\tau)^2} = D\tau. \quad \text{(F)}$$

Следуя Леонтовичу ([3]), уравнение Эйнштейна-Фоккера может быть использовано для нахождения размытости спектра. Пусть T — некоторый промежуток времени, который в дальнейшем мы будем неограниченно увеличивать. Представим интересующее нас движение в виде ряда Фурье:

$$x = (R_0 + z)\cos\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos \nu_n\tau + b_n \sin \nu_n\tau], \quad \text{(G)}$$

где $\nu_n = \frac{2\pi}{T} n$.

---

* Напомним, что при очень малых p_1 формула (E) теряет силу, так как становится необходимым учитывать нелинейность динамических уравнений.

Для средних произведений коэффициентов Фурье имеем:

$$\overline{a_n a_m} = \frac{4}{T^2} \int\limits_0^T \int\limits_0^T \overline{x(\tau_0)\, x(\tau)} \cos \nu_n \tau_0 \cos \nu_m \tau \, d\tau_0 \, d\tau$$

и аналогичные выражения для $\overline{b_n b_m}$ и т. д.

Здесь

$$\overline{x(\tau_0)\, x(\tau)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz_0 \int\limits_0^{2\pi} d\vartheta_0 x_0 w_0 (z_0, \vartheta_0)\, \overline{x(u)}, \tag{H}$$

где $x_0 = (R_0 + z_0) \cos \vartheta_0$; $u = \tau - \tau_0$, а

$$\overline{x(u)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \int\limits_0^{2\pi} d\vartheta x w (z_0, \vartheta_0; z, \vartheta; u).$$

После выкладок получим:

$$\overline{x(\tau_0)\, x(\tau)} = \frac{R_0^2}{2} e^{-\frac{\alpha_{22}}{2}} \left(1 + \frac{D}{2p_1} e^{-p_1 u}\right) \cos \omega u.$$

И наконец при достаточно большом T с любой точностью имеем:

$$\overline{a_n^2} = \overline{b_n^2} = \frac{DR_0^2}{2T} \left\{ \frac{1}{\frac{D^2}{4} + (\nu_n - \omega)^2} + \frac{1}{\frac{D^2}{4} + (\nu_n + \omega)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{D + p_1}{p_1} \left[\frac{1}{\left(\frac{D}{2} + p_1\right)^2 + (\nu_n - \omega)^2} + \frac{1}{\left(\frac{D}{2} + p_1\right)^2 + (\nu_n + \omega)^2} \right] \right\}$$

и аналогично с той же степенью точности $\overline{a_n} = \overline{b_n} = 0$; $\overline{a_n b_n} = 0$; $\overline{a_n a_m} = \overline{b_n b_m} = \overline{a_n b_m} = 0$ при $n \neq m$. Принимая во внимание, что число членов ряда Фурье с частотами, лежащими в достаточно малом интервале $\Delta\nu$, равно $\Delta n = \frac{T}{2\pi} \Delta\nu$, перейдем от средних значений квадратов коэффициентов Фурье к средней спектральной плотности $\overline{C^2(\nu_n)}$, определив ее соотношением:

$$\overline{C^2(\nu_n)}\, \Delta\nu = [\overline{a_n^2} + \overline{b_n^2}]\, \Delta n.$$

Замечая далее, что в практически интересных случаях всегда

$$\omega \gg p_1 \gg D\,^*, \tag{K}$$

находим, что картина спектра в непосредственной близости к о с н о в н о й ч а с т о т е динамической системы дается выражением:

$$\overline{C^2(\nu)} = \frac{DR_0^2}{2\pi} \frac{1}{\frac{D^2}{4} + (\nu - \omega)^2}. \tag{L}$$

Введем условную «ширину спектра», определив ее, как

$$\delta\nu = \frac{\int\limits_0^\infty \overline{C^2(\nu)}\, d\nu}{[\overline{C^2(\nu)}]_{\max}},$$

откуда получаем:

$$\delta\nu \approx \frac{\pi}{2} D.$$

---

* Обычно $\frac{p_1}{\omega} \sim 10^{-3}$, а $\frac{D}{\omega} \approx 10^{-10}$.

§ 3. Полученные выше простые результаты относились к случаю $q=0$, т. е. $b_1=b_2$. Практически однако $b_1 \neq b_2$ и даже часто q близко к 1. В этом случае будем искать в виде ряда по степеням q как стационарную вероятность w_0, так и $\overline{x(u)}$, полагая попрежнему $p_2=0$. Для нахождения $\overline{x(u)}=\overline{(R_0+z)\cos\vartheta}$ надо найти $\overline{\cos\vartheta}$ и $\overline{z\cos\vartheta}$. Умножая уравнение (C) поочередно на $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta$ и интегрируя по ϑ от 0 до 2π и по z от $-\infty$ до $+\infty$, получим два обыкновенных диференциальных уравнения для $\overline{\cos\vartheta}$ и $\overline{\sin\vartheta}$, содержащие $\overline{\cos 3\vartheta}$ и $\overline{\sin 3\vartheta}$. Таким же образом получим уравнения для $\overline{\cos 3\vartheta}$ и $\overline{\sin 3\vartheta}$, содержащие $\overline{\cos 5\vartheta}$ и $\overline{\sin 5\vartheta}$ и т. д. Из этих уравнений можно найти сколько угодно членов разложения $\overline{\cos\vartheta}$ в ряд по степеням q. Аналогично находим ряд для $\overline{z\cos\vartheta}$. Подставляя ряды для w_0 и $\overline{x(u)}$ в (H), получим ряд по степеням q для спектра.

Ни сходимость рядов для $\overline{x(u)}$ и w_0 ни сходимость ряда для спектра не доказана. Однако произведенные выкладки показали, что члены с q и q^2 в ряде для спектра при условии (K) исчезающе малы по сравнению с основным членом, выраженным формулой (L) *.

§ 4. Рассмотрим в качестве примера схему динатронного генератора. Уравнения такой схемы при обычных идеализациях и в обычных обозначениях имеют вид:

$$L\frac{di}{dt}+ri-v=\varphi_1(t),$$
$$C\frac{dv}{dt}+i=i_a=F(v)+\varphi_2(t).$$

Здесь через $\varphi_1(t)$ обозначена случайная электродвижущая сила, обусловливающая так называемый тепловой эффект, и через $\varphi_2(t)$ обозначен случайный ток, соответствующий так называемому дробовому эффекту.

Как известно

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{\left[\int\limits_t^{t+\Delta t}\varphi_1(t)\,dt\right]^2}}{\Delta t}=2rkT,$$

где r — омическое сопротивление контура, k — постоянная Больцмана и T — абсолютная температура.

Обозначим

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{\left|\int\limits_t^{t+\Delta t}\varphi_2(t)\,dt\right|^2}}{\Delta t}=Q.$$

Эта величина, при не слишком большом пространственном заряде в лампе имеет тот же порядок, что и в насыщенном диоде ([4], [5]), т. е.

$$Q\approx eI_0,$$

где e — заряд электрона, а I_0 — средний анодный ток.

---

* Члены с q дают поправку порядка $\frac{D}{\omega}$, члены с q^2 — порядка $\left(\frac{D}{\omega}\right)^2$.

Таким образом если формула (L) верна с достаточной точностью и при $q \neq 0$, то размытость спектра [при условии (K)] можно получить, усредняя статистические коэффициенты в уравнении Эйнштейна-Фоккера по ϑ, т. е. так же, как согласно методу ван-дер-Поля усредняются динамические коэффициенты.

Обозначая $\frac{1}{\sqrt{LC}}=\omega$; $i\sqrt{\frac{L}{C}}=x$; $v=y$ переписываем уравнения схемы в виде:

$$\frac{dx}{dt}=\omega y-\frac{r}{L}x+\omega\varphi_1(t),$$
$$\frac{dy}{dt}=-\omega x+\frac{1}{C}F(y)+\frac{1}{C}\varphi_2(t),$$

откуда находим

$$b_1=\omega^2 2rkT;\quad b_2=\frac{Q}{C^2};\quad b_{12}=0;\quad D=\frac{\omega^2}{2R_0^2}\left[2rkT+\frac{L}{C}Q\right].$$

Определим порядок величины размытости спектра *. Полагая

$$\omega=2\pi\cdot3\cdot10^6\ \text{сек.}^{-1},\quad R_0=15\ \text{вольт},\quad r=30\,\Omega,\quad T=300^\circ,$$
$$\sqrt{\frac{L}{C}}=10^3\Omega,\ I_0=10^{-2}\ \text{ампер},$$

находим, обозначая через $\delta\omega$ введенную нами в предыдущем параграфе ширину размытости спектра,

$$\frac{\delta\omega}{\omega}\approx\frac{D}{\omega}\approx\frac{\omega}{2R^2}\frac{LQ}{C}\approx10^{-10}.$$

Для подсчета флуктуаций амплитуды представим характеристику динатрона в виде:

$$F(v)=I_0+\alpha v-\gamma v^3.\qquad(\alpha>0;\gamma>0),$$

откуда

$$\mu\Phi(R)=\frac{\omega^2R}{2}\left(\alpha L-rC-\frac{3}{4}\gamma LR^2\right);\quad \mu\Psi(R)\equiv0,$$
$$R_0^2=\frac{4(\alpha L-rC)}{3\gamma L},\quad p_1=\frac{3}{4}\gamma\omega^2LR_0^2;\qquad p_2=0.$$

Полагая $\gamma=10^{-8}$, находим

$$p_1\approx3\cdot10^4;\quad \frac{p_1}{\omega}\approx2\cdot10^{-3};\quad \frac{D}{p_1}\approx5\cdot10^{-8}.$$

Средний квадрат флуктуации амплитуды определяется соотношением:

$$\frac{\sqrt{\overline{\overline{z^2}}}}{R_0}=\sqrt{\frac{D}{2p_1}}\approx10^{-4}.$$

Физико-технический институт университета.
Горький.

Поступило
26 IV 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Appleton a. B. van der Pol, Phil. Mag., Ser. 6, **43,** 177 (1922). [2] А. Андронов и С. Хайкин, Теория колебаний, I, 440, Москва (1937). [3] M. Leontowitsch, ZS. f. Phys., **72,** 247 (1931). М. Леонтович, Статья о флуктуациях для физической энциклопедии. [4] M. Ziegler, Physica, **3, 1** (1936). [5] I. Berstein, Sow. Phys. **10,** 510 (1936).

* В случае лампового генератора с контуром в цепи анода размытость спектра получается примерно того же порядка; в случае контура в сетке — при обычных идеализациях размытость меньше в 10^2-10^3 раз.

Заметим, что полученные величины размытости спектра вероятно меньше имеющихся в действительности, так как мы не учитывали эффект нестационарности излучения катода (Flickereffekt), флуктуаций батарей и т. д.