Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 5

*МАТЕМАТИКА*

С. Д. РОССИНСКИЙ

# ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ИЗГИБАНИЯ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ КОНГРУЭНЦИИ С СОХРАНЕНИЕМ ЕЕ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

*(Представлено академиком С. А. Чаплыгиным 17 III 1938)*

§ 1. Задача изгибания прямолинейной конгруэнции с сохранением ее распределительных поверхностей, т. е. тех ее линейчатых поверхностей, линии сжатия которых располагаются на средней поверхности конгруэнции, в своей общей постановке формулируется следующим образом.

Луч некоторой прямолинейной конгруэнции $C$ неизменно связывается с соответствующей касательной плоскостью изгибающейся поверхности $S$. Спрашивается, какими могут быть поверхность $S$ и связанная с ней конгруэнция $C$, если ее лучи, расположенные в последовательности образующих ее распределительных поверхностей, при изгибании поверхности $S$ располагаются в пространстве все время как последовательности образующих распределительных поверхностей изгибающейся конгруэнции $C$?

§ 2. В настоящем сообщении рассматривается тот случай, когда луч конгруэнции $C$ ортогонален соответствующей касательной плоскости поверхности $S$.

В случае произвольного изгибания поверхности $S$ мы приходим только к развертывающимся поверхностям $S$, что особого интереса не представляет.

Допустим теперь, что поверхность $S$ может изгибаться с сохранением сопряженной системы, т. е. обладает главным основанием изгибания, и отнесем ее к этому основанию.

Пусть $\overline{\rho}(u, v)$ есть вектор, определяющий поверхность $S$, а $\overline{n}(u, v)$ — единичный вектор ее нормали.

Обозначим через $E, F, G, D, D'=0, D''$ коэффициенты форм $d\overline{\rho}^2$ и $-d\overline{\rho}\, d\overline{n}$, относящихся к поверхности $S$. Точку входа луча конгруэнции $C$ в соответствующую касательную плоскость поверхности $S$ определим вектором:

$$\overline{\rho}_1(u, v)=\overline{\rho}+\xi(u, v)\overline{\rho}_u+\eta(u, v)\rho_v.$$

Приняв поверхность, определяемую вектором $\overline{\rho}_1(u, v)$, за исходную поверхность конгруэнции $C$, находим для коэффициентов $E_0, F_0, G_0$,

$e, f, f', g$ основных квадратичных форм Kummer'а следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} E_0=\bar{n}_u^2=\frac{GD^2}{H^2}, \quad F_0=\bar{n}_u\bar{n}_v=-KF, \quad G_0=\bar{n}_v^2=\frac{ED''^2}{H^2}, \\ e=\bar{n}_u\bar{\rho}_{1u}=\frac{Fe_2-Ge_1}{H^2}D, \quad f=\bar{n}_u\bar{\rho}_{1v}=\frac{Fg_2-Gg_1}{H^2}D, \\ f'=\bar{n}_v\bar{\rho}_{1u}=\frac{Fe_1-Ee_2}{H^2}D'', \quad g=\bar{n}_v\bar{\rho}_{1v}=\frac{Fg_1-Eg_2}{H^2}D'', \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где $K$ — кривизна поверхности $(S)$, $H^2=EG-F^2$ и

$$e_1=E\left[1+\xi_u+\xi\left\{{11 \atop 1}\right\}+\eta\left\{{12 \atop 1}\right\}\right]+F\left[\eta_u+\xi\left\{{11 \atop 2}\right\}+\eta\left\{{12 \atop 2}\right\}\right],$$
$$e_2=F\left[1+\xi_u+\xi\left\{{11 \atop 1}\right\}+\eta\left\{{12 \atop 1}\right\}\right]+G\left[\eta_u+\xi\left\{{11 \atop 2}\right\}+\eta\left\{{12 \atop 2}\right\}\right],$$

а $g_2$ и $g_1$ получаются соответственно из $e_1$ и $e_2$ посредством подстановок: $(u, v)$, $(E, G)$, $(\xi, \eta)$.

Дифференциальное уравнение распределительных поверхностей конгруэнции $C$:

$$\begin{gathered}[E_0(E_0g-G_0e)-F_0(E_0f+E_0f'-2F_0e)]\,du^2+ \\ +2\,[F_0(E_0g+G_0e)-E_0G_0(f+f')]\,du\,dv+ \\ +[G_0(G_0e-E_0g)-F_0(G_0f+G_0f'-2F_0g)]\,dv^2=0\end{gathered}$$

в силу уравнения Гаусса

$$DD''=KH^2$$

может быть представлено в виде:

$$D^6\lambda du^2+D^4(\lambda_1 du^2+2\mu_1 du\,dv)+D^2(2\mu_2 du\,dv+\nu_2 dv^2)+\nu_3 dv^2=0,$$

где, отбросив случай $K=0$, имеем:

$$\left.\begin{aligned} \lambda&=-Gg_2, & \mu_2&=(KH^2)^2Ee_2, \\ \lambda_1&=KH^2(Ge_1-2Fe_2), & \nu_2&=(KH^2)^2(Eg_2-2Fg_1), \\ \mu_1&=KH^2Gg_1, & \nu_3&=-(KH^2)^3Ee_1. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Поставленная задача приводит к четырем уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \lambda du^2=0, \quad \lambda_1 du^2+2\mu_1 du dv=0, \\ 2\mu_2 du dv+\nu_2 dv^2=0, \quad \nu_3 dv^2=0, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

которые очевидно должны сводиться к одному.

Отбрасывая не представляющий интереса случай совпадающих семейств распределительных поверхностей, получаем прежде всего следующие условия:

$$\lambda=0, \quad \nu_3=0$$

или в силу формул (2) условия:

$$Gg_2=0, \quad Ee_1=0.$$

§ 3. Итак, надо рассмотреть следующие случаи.

1) Пусть $E=G=0$, а следовательно и $\mu_1=\mu_2=0$. Уравнения (3) показывают, что мы должны иметь также и $\lambda_1=\nu_2=0$.

Из формул (2) видно, что это влечет за собой равенства:

$$e_2=0, \quad g_1=0. \tag{4}$$

Таким образом конгруэнция $C$ оказывается изотропной, а соответствующая поверхность $S$ — произвольной минимальной поверхностью. Точка входа луча конгруэнции $C$ в соответствующую касательную плоскость поверхности $S$ определяется уравнениями (4). Это решение следует отнести к числу тривиальных в виду неопределенности распределительных поверхностей изотропной конгруэнции.

2) Допустим теперь, что

$$e_1=0, \quad g_2=0. \tag{5}$$

Оставшиеся уравнения (3) принимают в этом случае вид:

$$Fe_2du^2-Gg_1dudv=0, \quad Ee_2dudv-Fg_1dv^2=0,$$

а так так они должны сводиться очевидно к уравнению $dudv=0$, то

$$Fe_2=0, \quad Fg_1=0.$$

Допущение $e_2=0$, $g_1=0$ приводит только к развертывающимся поверхностям $S$ ([1]). Итак, положим, что

$$F=0.$$

В этом случае поверхность $S$ изгибается с сохранением линий кривизны $(u, v)$ и является следовательно в силу известных результатов Bonnet и Codazzi произвольной поверхностью Монжа (surface moulure).

Формулы (1) показывают, что соответствующая конгруэнция $C$ не является конгруэнцией нормалей. Ее распределительные поверхности соответствуют линиям кривизны поверхности Монжа. Точка входа луча в касательную плоскость поверхности $S$ определяется уравнениями (5). Так как далее в нашем случае

$$E_0g-F_0(f+f')+G_0e=0,$$

то исходная поверхность конгруэнции совпадает с ее средней поверхностью и является геометрическим местом точек входа лучей конгруэнции $C$ в соответствующие касательные плоскости поверхности Монжа. Отсюда следует, что средняя поверхность конгруэнции $C$ сохраняется при рассматриваемом изгибании.

Вместе с тем мы видим, что указанная поверхность Монжа является средней огибающей поверхностью для конгруэнции $C$ и остается таковой во все время своего изгибания. Этот последний результат является следствием общей теоремы о сохранении средней огибающей поверхности конгруэнции при ее изгибании на главном основании, установленной мной ранее ([2]).

Нетрудно наконец усмотреть из формул (1), что фокусы конгруэнции $C$ сохраняются при изгибании, а граничные точки перемещаются.

3. Остаются допущения $G=0$, $e_1=0$ или $E=0$, $g_2=0$. Оба эти предположения приводят только к развертывающимся поверхностям $S$ (1).

Институт математики.
Московский государственный университет.

Поступило
20 III 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Rossinski, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, LIX, fasc. 1, 82—96 (1935). [2] S. Rossinski, C. R., **200**, 1268—1270 (1935).