Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 5

МАТЕМАТИКА

Академик И. М. ВИНОГРАДОВ

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ОЦЕНКИ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

В настоящей работе я даю ряд новых оценок, относящихся к аналитической теории чисел. Подробные доказательства будут опубликованы в другом месте.

Введем следующие обозначения:

Символическое неравенство

$$A \ll B$$

показывает, что

$$|A| \leqslant cB,$$

где c — положительное постоянное; n — целое постоянное > 0; $\nu = \frac{1}{n}$; $\alpha_n, \ldots, \alpha_1$ — вещественные; $f(x) = \alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x$.

Я имею в виду сообщить следующие результаты:

1. Пусть $n > 2$; N целое > 1; m целое > 0;

$$\alpha_n = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}; \quad (a, q) = 1; \quad q > 0; \quad |\theta| \leqslant 1;$$

$$S = \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i m f(p)},$$

где p пробегает простые числа.

Тогда имеем

$$S \ll N\left(\frac{m^5}{N} + \frac{m^5}{q} + \frac{q^{2.5}}{N^{2.5n}}\right)^{\beta} (\log N)^{1.5 \log\log N}; \quad \beta = \frac{1}{49n^6 (\log n)^2}.$$

При условии

$$\min\left(q, \frac{N^n}{q}\right) \ll e^{\sqrt{\log N}}$$

имеем также

$$S \ll N\left(\frac{m^2}{q} + \frac{mq}{N^n}\right)^{\gamma} (\log N)^{1.5}; \quad \gamma = \frac{1}{39.2n^6 (\log n)^2}.$$

Этот результат является уточнением моих прежних результатов в том же направлении (1).

2. Пусть $n \geqslant 14$; m целое > 0; P целое > 1;

$$\alpha_n = \frac{a}{q} + \lambda q^{-2}; \quad (a, q) = 1; \quad \lambda \ll \Lambda; \quad q_1 \ll q \ll q_1;$$

$$S = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)}.$$

В моей книге «Новый метод в аналитической теории чисел» (²) для случая *

$$P^{n-1} \leqslant p_1 \leqslant P^{n-\tau}; \quad \Lambda m \ll P^{\tau\nu^3}; \quad 1 \ll \tau \leqslant 1$$

была дана следующая оценка:

$$S \ll P^{1-\rho}; \quad \rho > \frac{2\tau}{n^3\left(1 + 2.5\,\frac{\log\log n^2}{\log n^2}\right)\log\frac{n^2}{\tau}}.$$

Эту оценку теперь я могу дополнить двумя новыми, более точными при малых значениях τ, оценками:

При условиях

$$P^{n-1} \leqslant q_1 \leqslant P^{n-\tau}; \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1; \quad m\Lambda \ll P$$

имеем:

$$S \ll P^{1-\rho}(\log q)^{\frac{\rho}{\tau}}; \quad \rho = \frac{\tau}{8.24\, n^3 \log n},$$

или также

$$S \ll P^{1-\rho_1}; \quad \rho_1 = \frac{\tau}{16.48 n^3 \log n}.$$

В то время как в указанной моей книге τ должно превосходить некоторое положительное (произвольно малое) постоянное, теперь τ может стремиться к нулю с возрастанием P.

3. Пусть $n > 2$; m целое > 0; P целое > 1; s обозначает одно из чисел $2, \ldots, n-1$;

$$\alpha_s = \frac{a_s}{q_s} + \frac{\theta}{q_s^2}; \quad (a_s, q_s) = 1; \quad 0 < q_s \leqslant P^s; \quad |\theta| \leqslant 1;$$

$$S = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)}.$$

Тогда имеем

$$S \ll P\left(\frac{m}{q_s} + \frac{m}{P} + \frac{q_s}{P^s}\right)^{\lambda}; \quad \lambda = \frac{1}{33.7\, n^6 (\log n)^2}.$$

4. Пусть q простое нечетное; m—делитель числа $q-1$; $1 < m \leqslant q-1$; s—одно из чисел $0, \ldots, m-1$; k целое, не делящееся на q; N целое положительное; p пробегает простые числа.

Тогда число T чисел формы $p+k$ с условием $p \leqslant N$; $\operatorname{ind}(p+k) \equiv s \pmod m$ выражается формулой

$$T = \frac{\pi(N)}{m} + O\left(N^{1+\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N^{\frac{1}{3}}}}\right),$$

где ε—произвольно малое положительное постоянное.

Этот результат является обобщением более частного результата, относящегося к случаю $n=2$, который доказан мной ранее и в настоящее время печатается.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
4 IV 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Труды Тбилисского математического института, III (1937). [2] Труды Математического института Академии Наук СССР, X (1937).

---

* В частности воспользуюсь случаем исправить одну неточность указанной моей книги. Именно, в теореме 1 главы VII нижнюю границу значений r, при которых имеет место асимптотическая формула Hardy-Littlewood'a, выражающая число представлений целого положительного N в форме

$$N = x_1^n + \ldots + x_r^n; \quad n \geqslant 14,$$

следует заменить такой:

$$r > n^3(\log n + 2.2 \log\log n).$$