**Доклады Академии Наук СССР**
1938. Том XVIII, № 8

*МЕХАНИКА*

Н. МОИСЕЕВ

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ В ОБОБЩЕННОМ СМЫСЛЕ ЯКОБИ

*(Представлено академиком В. Г. Фесенковым 23 I 1938)*

Пусть $T$ — простая периодическая, регулярная траектория проблемы

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x}=2n\dot{y}+U'_x, \\ &\ddot{y}=-2n\dot{x}+U'_y, \\ &n=\text{const}, \quad U=U(x,y), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

соответствующая значению $h_T$ постоянной интеграла Якоби

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=2(U+h) \tag{2}$$

и имеющая прямое направление синодического движения *.

Пусть

$$f(x,y)=f \tag{3}$$

будет топографическая система простых регулярных циклов, определенных для всех значений параметра $f$ из интервала

$$f_i \leqslant f \leqslant f_e \tag{4}$$

и обладающих тем свойством, что каждой паре $(f_1, f_2)$ значений $f$ из интервала (4), удовлетворяющих неравенству

$$f_1 < f_2,$$

соответствует такая пара циклов (3)

$$f(x,y)=f_1 \quad \text{и} \quad f(x,y)=f$$

что кривая

$$f(x,y)=f_1$$

* Случай обратного синодического направления движения вдоль $T$ разбирается аналогичным образом. В случае, когда $n=0$, направление движения роли не играет.

оказывается целиком расположенной внутри кривой

$$f(x,y)=f_2.$$

Обозначим через $(f_i, f_e)$ кольцевидную часть плоскости $xy$, ограниченную кривыми:

$$f(x,y)=f_i \tag{5}$$

и

$$f(x,y)=f_e, \tag{6}$$

и предположим, что функция $f(x,y)$ повсюду в кольце $(f_i, f_e)$ допускает непрерывные частные призводные первого и второго порядка по переменным $x$ и $y$. Предположим так же, что кольцо $(f_i, f_e)$ не содержит внутри себя ни точек кривой нулевой скорости, соответствующей значению константы Якоби $h_T$, ни особых точек силовой функции $U(x,y)$. В случае, если кольцо $(f_i, f_e)$ циклов (3) обладает всеми указанными свойствами, мы будем называть его кольцом допустимых циклов или же допустимым кольцом.

Вернемся к траектории $T$. Может случиться так, что мы сможем построить такое кольцо допустимых циклов (3), (4), что траектория $T$ окажется одной из кривых (3), соответствующей некоторому значению $f_T$ параметра $f$, которое будет удовлетворять неравенству:

$$f_i < f_T < f_e.$$

В этом случае мы будем говорить, что траектория $T$ включена в кольцо (4) допустимых циклов (3).

После этих предварительных замечаний мы можем формулировать следующее определение обобщенной якобиевой устойчивости:

Если оказывается возможным включить траекторию $T$ в такое кольцо $(f_i, f_e)$ допустимых циклов (3), что характеристика контактов [1] траекторий проблемы (1), принадлежащих к изоэнергетическому семейству $(h_T)$, с циклами (3), вычисленная для того же направления синодического движения, каким обладает $T$, т. е. функция $\ddot{f}_+(h_T)$ *, будет положительной повсюду внутри кольца $(f_i, f_T)$ и отрицательной повсюду внутри кольца $(f_T, f_e)$, причем не будет обращаться в нуль ни в одной точке внутри полного кольца $(f_i, f_e)$, кроме точек самой траектории $T$, то в таком случае мы условимся говорить, что траектория $T$ обладает обобщенной якобиевой устойчивостью по отношению к кольцу допустимых циклов $(f_i, f_e)$. Сокращенное обозначение того же факта будет: траектория $T$ устойчива в смысле $SJG(f_i, f_e)$.

Аналогично формулируется и определение обобщенной якобиевой неустойчивости. Именно:

Если оказывается возможным включить траекторию $T$ в такое кольцо $(f_i, f_e)$ допустимых циклов (3), что характеристика контактов $\ddot{f}_+(h_T)$ ** будет отрицательной внутри кольца $(f_i, f_T)$ и положительной внутри кольца $(f_T, f_e)$, не обращаясь при этом в нуль нигде внутри полного кольца $(f_i, f_e)$ за исключением точек траектории $T$, то в таком случае мы условимся говорить, что траектория $T$ обладает обобщенной якобиевой неустойчивостью по отношению к кольцу допустимых циклов

* В случае, когда $T$ есть траектория обратного направления, должно взять функцию $\ddot{f}_-(h_T)$.

** См. предыдущее примечание.

$(f_i, f_e)$. Сокращенное обозначение того же факта будет: траектория $T$ неустойчива в смысле $IJG(f_i, f_e)$.

Обозначим через $\delta n$ смещение по нормали к данной траектории $T$. Тогда система кривых

$$\delta n = c, \tag{7}$$

определенных в некотором интервале значений параметра $c$:

$$-a \leqslant c \leqslant +a, \tag{8}$$

где $a$ взято достаточно малым, будет не чем иным, как частным видом допустимого кольца (3), (4). Это показывает [2], что устойчивость (неустойчивость) периодической траектории в обычном смысле Якоби является не чем иным, как частным видом обобщенной якобиевой устойчивости (неустойчивости), определенной нами выше.

Во избежание возможных недоразумений должно иметь в виду, что нас интересует здесь устойчивость (неустойчивость) всей данной периодической траектории, а вовсе не устойчивость (неустойчивость) некоторых частей этой траектории. В силу этого мы называем здесь $T$ устойчивой в обычном смысле Якоби [сокращенное обозначение: $SJ$ или $SJG(\delta n)$] только в том случае, если характеристика $D$, входящая в известное уравнение

$$\frac{d^2 \delta n}{dt^2} = D \delta n, \tag{9}$$

будет отрицательной повсюду на траектории $T$ и не будет обращаться в нуль ни в одной точке $T$. Что касается неустойчивости, то мы называем $T$ неустойчивой в обычном смысле Якоби [сокращенное обозначение: $IJ$ или $IJG(\delta n)$] только в том случае, если характеристика $D$ является положительной повсюду на $T$, не обращаясь в нуль ни в одной точке $T$.

Укажем некоторые свойства траекторий проблемы (1), связанные с понятием обобщенной якобиевой устойчивости и могущие быть весьма легко доказанными при помощи элементарных соображений теории характеристик контактов [1].

1) Если существует такое допустимое кольцо циклов $(f_i, f_e)$, по отношению к которому $T$ оказывается устойчивой (неустойчивой) в обобщенном смысле Якоби, то в таком случае не существует другого допустимого кольца циклов $(g_i, g_e)$, по отношению к которому та же траектория $T$ была бы неустойчивой (устойчивой) в том же обобщенном смысле Якоби.

В силу этого одна и та же траектория $T$ не может быть устойчивой и неустойчивой одновременно в обобщенном смысле Якоби.

2) Если $T$ устойчива в смысле $SJG(f_i, f_e)$, то невозможно, чтобы она была неустойчива в смысле $IJG(\delta n)$. Если $T$ неустойчива в смысле $IJG(f_i, f_e)$, то невозможно, чтобы она была устойчива в смысле $SJG(\delta n)$.

3) Если $T$ устойчива в смысле $SJ$, то она также устойчива и в обобщенном смысле Якоби. Если $T$ неустойчива в смысле $IJ$, то она так же неустойчива и в обобщенном смысле Якоби.

4) Если $T$ устойчива в смысле $SJG(f_i, f_e)$, то в таком случае каждая из смежных траекторий, имеющая контакты с циклами (3) внутри кольца $(f_i, f_e)$, должна иметь и общие точки с $T$, причем дуга смежной траектории между точкой контакта и названной общей точкой должна быть целиком заключена внутри кольца $(f_i, f_e)$*.

---

* Упоминаемые здесь общие точки по всей видимости могут быть лишь точками пересечения и асимптотические, не пересекающие $T$ траектории здесь, как будто, невозможны.

Употребленный здесь термин «смежная траектория» должен обозначать траекторию, принадлежащую к тому же изоэнергетическому семейству $(h_T)$, что и $T$, и протекающую в своей части, заключенной внутри кольца, в том же направлении синодического движения, что и $T$. Таким образом «смежная траектория» не может иметь петель, заключенных целиком внутри кольца $(f_i, f_e)$ и неохватывающих его внутренней границы (5). В сокращенной терминологии это может быть выражено и так: смежная траектория не может быть траекторией пагидального или пагидально-периплегматического типа, неохватывающие (5) петли которой целиком заключены внутри кольца (4).

5) Если $T$ устойчива в смысле $SJG(f_i, f_e)$, то в таком случае не существует иных смежных простых периодических траекторий, заключенных целиком внутри кольца $(f_i, f_e)$, но не пересекающих $T$.

6) Если $T$ неустойчива в смысле $IJG(f_i, f_e)$, то в таком случае ни одна из смежных траекторий, имеющая внутри кольца контакт с одним из циклов (3), не может после этого контакта достигнуть общей с траекторией $T$ точки, не выходя предварительно из кольца $(f_i, f_e)$.

7) Если $T$ неустойчива в смысле $IJG(f_i, f_e)$, то в таком случае не существует ни одной смежной траектории, целиком заключенной внутри кольца $(f_i, f_e)$.

8) Если $T$ неустойчива в смысле $IJG(f_i, f_e)$, то в таком случае все положительные смежные полутраектории, не выходящие из кольца $(f_i, f_e)$, должны быть асимптотическими к $T$.

Выражение «положительная полутраектория», употребленное здесь, должно обозначать часть траектории, описываемую движущейся точкой при неограниченном возрастании времени $t$, начиная с некоторого начального момента $t_0$. В случае периодической траектории «полутраектория» совпадает с самой траекторией.

Оставляя здесь продолжение перечисления различных свойств траекторий, связанных с понятием обобщенной якобиевой устойчивости, мы заметим лишь, что теория этой устойчивости представляет весьма большой интерес для теории локализации периодических траекторий при помощи критериев, аналогичных критерию Виттекера [3]. При этом особенно замечательным оказывается то, что понятие обычной устойчивости в смысле Якоби менее тесно связано с названной теорией локализации, чем понятие устойчивости обобщенной.

Мы закончим настоящую заметку разбором одного простого примера приложения двух разновидностей устойчивости в смысле Якоби, интересующих нас здесь.

Пусть $n = 0$ и $U = \frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Предположим, что константа $h$ интеграла (2) отрицательна. Тогда все траектории проблемы (1) будут кеплеровыми эллипсами. Возьмем один из них, например эллипс

$$r = \frac{p_T}{1 - e_T \cos \varphi},$$

за траекторию $T$. Соответствующее значение константы $h_T$ будет связано с $e_T$ и $p_T$ формулой:

$$h_T = -\frac{(1 - e_T^2)}{2p_T}.$$

Возьмем топографическую систему эллипсов:

$$p = r(1 - e_T \cos\varphi).$$

Условие контакта будет:

$$\dot{p} = \dot{r}(1 - e_T \cos\varphi) + re_T \dot{\varphi} \sin\varphi = 0.$$

Характеристика контакта или, что то же самое, значение второй производной

$$\ddot{p} = \ddot{r}(1 - e_T \cos\varphi) + 2e_T \dot{r}\dot{\varphi} \sin\varphi + e_T r\dot{\varphi}^2 \cos\varphi + e_T r\ddot{\varphi} \sin\varphi,$$

вычисленное как функция полярных координат $r$ и $\varphi$ и константы $h_T$ при помощи уравнений движения, интеграла энергии и условия контакта, будет иметь вид:

$$\ddot{p} = \frac{(1 - e_T^2)(1 - e_T \cos\varphi)^2}{r(1 - 2e_T \cos\varphi + e_T^2)} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_T}\right).$$

Предполагая, что $p_T > 0$, мы всегда можем выбрать два числа $p_i$ и $p_e$ так, чтобы было

$$0 < p_i < p_T < p_e$$

и чтобы кольцо $(p_i, p_e)$ было допустимым кольцом циклов. Ясно кроме того, что это кольцо включает в себя траекторию $T$. Выражение для $\ddot{p}$ показывает нам далее, что

$$\ddot{p} > 0 \qquad \text{при} \qquad p_i \leqslant p < p_T$$

и

$$\ddot{p} < 0 \qquad \text{при} \qquad p_T < p \leqslant p_e.$$

В силу этого эллипс $T$ является устойчивым в смысле $SJG(p_i, p_e)$.

Таким образом все кеплеровы эллипсы (за исключением имеющих $p_T = 0$) обладают обобщенной якобиевой устойчивостью типа $SJG(p_i, p_e)$. Этот факт находится в полном согласии с очевидным замечанием, что все изоэнергетические кеплеровы эллипсы пересекаются между собой. Таким образом замечание это можно в известном смысле рассматривать как следствие результата, полученного нами выше. Что же касается обычной якобиевой устойчивости, то она не может нам доставить результатов такой общности. Действительно, как это было показано Степановым ([4]), обычной якобиевой устойчивостью обладают лишь те кеплеровы эллипсы, для которых $\frac{p}{1+e} \geqslant -\frac{1}{4h}$. На каждом из остальных кеплеровых эллипсов характеристика $D$ не является функцией неизменного знака.

Поступило
2 II 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Моисеев, Тр. ГАИШ, **7**, 1 (1936). [2] Н. Моисеев, Астрономич. журнал, **13**, 78 (1936). [3] Н. Моисеев, Тр. ГАИШ, **9**, 2 (1937). [4] В. Степанов, Астрономич. журнал, **13**, 436 (1936).