

НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

Н. МОИСЕЕВ

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ, ФОРМАЛЬНО ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ ПРОСТЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

(Представлено академиком В. Г. Фесенковым 23 I 1938)

Пусть

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r} &= r\dot{\vartheta}^2 + 2nr\dot{\vartheta} + U'_r, \\ \ddot{\vartheta} &= -\frac{2r\dot{\vartheta}}{r} - 2n\frac{\dot{r}}{r} + \frac{1}{r^2} U'_\vartheta, \\ n &= \text{const}; \quad U = U(r, \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

будут дифференциальные уравнения некоторой проблемы небесной механики. Известно много различных методов получения рядов вида:

$$r = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta), \quad (2)$$

формально удовлетворяющих уравнениям (1). Имея в виду в настоящей заметке изложить некоторые простые соображения, касающиеся вопроса о сходимости рядов (2), мы начнем для определенности с изложения одного из возможных способов установления этих рядов, способа, который, как кажется, до сих пор опубликован не был.

Пусть

$$f \equiv r - \Phi(\vartheta) = 0 \quad (3)$$

будет уравнение аналитической кривой. Характеристика контактов траекторий системы (1), принадлежащих изоэнергетическому семейству (h), с кривой (3) будет (^{1, 2}):

$$\ddot{f}_{\pm} = \frac{1}{P^2} [2(U+h)S \pm 2nP^3\sqrt{2(U+h) + P^2Q}], \quad (4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} P^2 &= \frac{1}{r^2} (r^2 + \Phi'^2), \\ Q &= \frac{1}{r^2} (U'_r r^2 - U'_\vartheta \Phi'), \\ S &= \frac{1}{r^3} (r^2 + 2\Phi'^2 - r\Phi'') \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

и где r выражено как функция от ϑ при помощи уравнения (3). Из двух знаков перед радикалом в формуле (4) должно брать знак верхний (плюс) для случая прямых синодических движений и нижний знак (минус) для случая движений обратных.

Если характеристика контактов \ddot{f}_+ (\ddot{f}_-) вдоль кривой (3) оказывается тождественно равной нулю, то в таком случае сама кривая (3) необходимо является траекторией проблемы (1), соответствующей прямому (обратному) направлению синодического движения. Таким образом условие совпадения кривой (3) с одной из траекторий проблемы (1) может быть записано в виде:

$$2(U+h)S \pm 2nP^3 \sqrt{2(U+h)} + P^2Q = 0, \quad (6)$$

или же в виде:

$$\begin{aligned} & 4(U+h)^2 r^2 (r^2 + 2\Phi'^2 - r\Phi'')^2 + 4(U+h)r(r^2 + \\ & + \Phi'^2 [(r^2 + 2\Phi'^2 - r\Phi'')(U_r r^2 - U_\vartheta \Phi') - 2n^2 r (r^2 + \Phi'^2)^2] + \\ & + (r^2 + \Phi'^2)^2 (r^2 U_r' - \Phi' U_\vartheta')^2 = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где r должно заменить его выражением через ϑ при помощи уравнения (3). Уравнение (7) можно рассматривать как дифференциальное уравнение траектории проблемы (1), принадлежащей к изоэнергетическому семейству (h). Вследствие исчезновения двойного знака это уравнение определяет траектории обоих направлений синодического движения, как прямого так и обратного. Различение этих случаев друг от друга может быть выполнено при помощи формы (6) того же уравнения (7).

Заменяя в уравнении (7) функцию $\Phi(\vartheta)$ рядом (2), мы можем получить бесконечную систему уравнений, определяющих коэффициенты a_0 , a_k и b_k как функции постоянной Якоби h . В общем случае названные функции не будут однозначными. В силу этого указанный способ, равно как и всякий иной способ установления формальных рядов (2), в общем случае доставит нам некоторое число $N_+(h)$ рядов (2), формально представляющих периодические решения, делающие простой оборот вокруг точки $r=0$ в прямом направлении, а так же некоторое количество $N_-(h)$ рядов (2), соответствующих формальным простым периодическим решениям обратного направления движения. Для краткости мы ограничимся рассмотрением лишь траекторий прямого направления, причем предположим, что $N_+(h)$ является конечным числом.

Обозначим через $N_+^c(h)$ количество сходящихся рядов, заключенных среди общего количества формальных рядов $N_+(h)$. Очевидно, что $N_+^c(h)$ будет тогда обозначать так же и количество различных замкнутых траекторий, принадлежащих к семейству (h) и делающих простой оборот вокруг точки $r=0$. Остающиеся $N_+(h) - N_+^c(h)$ рядов (2) будут рядами расходящимися и следовательно не будут представлять никаких решений проблемы (1).

Предполагая, что $N_+(h)$ является известным, мы ставим здесь вопрос об определении числа $N_+^c(h)$. При решении этого вопроса мы используем теорему о существовании периодических траекторий, связанную с критерием Виттекера и доказанную в одной из предыдущих статей (2, 3).

Допустим, что изучение контактов траекторий изоэнергетического семейства (h) с кривыми некоторой топографической системы аналитических правильных циклов, делающих каждый один простой оборот вокруг точки $r=0$, привело нас к установлению существования $M_+(h)$

кольцевидных зон Виттекера, не имеющих общих точек и содержащих каждая по меньшей мере одну простую периодическую траекторию прямого направления вокруг той же точки $r=0$ ^(2,3).

После этого мы можем утверждать следующее:

Теорема 1. Количество сходящихся рядов (2) $N_+(h)$ не может быть меньше, чем количество кольцевидных областей Виттекера $M_+(h)$.

Теорема 2. Если количество формальных рядов (2) $N_+(h)$ равно количеству кольцевидных зон Виттекера $M_+(h)$, то в таком случае каждый из формальных рядов сходится и представляет простое периодическое решение проблемы (1). Каждая из областей Виттекера будет содержать в этом случае только одну простую периодическую траекторию. Наконец все $N_+(h)$ простых периодических траекторий будут изолированы друг от друга.

Эти две теоремы могут быть прилагаемы также и в случае, когда, взамен полной совокупности всех простых периодических траекторий вокруг точки $r=0$, мы рассматриваем лишь некоторую часть этой совокупности, обнимающую траектории, характеризуемые некоторым общим признаком (P) . Пусть $N_+(h, P)$ будет число тех формальных решений (2), которые могут обладать свойством (P) , в то время как $M_+(h, P)$ пусть обозначает количество зон Виттекера, обладающих тем же свойством (P) . Тогда теоремы 1 и 2 будут справедливы по отношению к числам $N_+(h, P)$ и $M_+(h, P)$ в той же степени, в какой они были справедливы по отношению к числам $N_+(h)$ и $M_+(h)$.

Что касается условия (P) , то оно может иметь достаточно разнообразные формы. Так например, можно понимать под свойством (P) условие стремления к нулю размеров орбиты при стремлении константы h к некоторому предельному значению h_0 . В таком случае $N_+(h, P)$ будет количество формальных рядов (2), для которых все коэффициенты a_0, a_k и b_k стремятся к нулю при стремлении h к h_0 . В то же время $M_+(h, P)$ будет количеством зон Виттекера, стягивающихся в точку $r=0$ при стремлении h к h_0 .

В завершение настоящей заметки мы разберем два примера приложения указанных теорем.

Пример 1. Проблема трех тел Гилла.

В названном частном случае ограниченной проблемы трех тел Гиллом были получены ряды, формально представляющие прямоугольные координаты x и y в простой периодической траектории прямого синодического движения вокруг одной из притягивающих масс T ⁽⁴⁾. Коэффициенты этих рядов являются однозначными функциями константы Якоби h , стремящимися к нулю при h , стремящемся к $-\infty$. В силу этого мы имеем здесь $N_+(h, P) = 1$.

Однако, как было доказано нами ⁽³⁾, при каждом h из некоторого интервала $(-\infty, h_1)$ существует в той же проблеме одна зона Виттекера, сопряженная с топографической системой концентрических кругов и соответствующая прямым синодическим движениям вокруг T . Размеры названной зоны стремятся к нулю при стремлении h к $-\infty$. Вследствие этого мы имеем здесь: $M_+(h, P) = 1$.

Таким образом в силу теоремы 2 мы можем утверждать, что формальные ряды Гилла сходятся для всякого h из интервала $(-\infty, h_2)$, где h_2 не может быть меньше, чем h_1 . Одновременно мы можем быть уверены в том, что каждому h из интервала $(-\infty, h_1)$ соответствует только одна простая периодическая траектория прямого движения вокруг T , причем вокруг каждой зоны Виттекера содержится только одна траектория названного типа. Тем самым доказано совпадение гил-

лова класса периодических орбит с нашим классом $(\rho_+^{0'})_d$. Правдоподобность этого совпадения подчеркивалась нами в цитированной заметке (3).

Что касается сходимости рядов Гилла, то она впервые была строго доказана Ляпуновым (5).

Пример 2. Периодические траектории вокруг коллинеарных точек либрации ограниченной проблемы трех тел.

Пусть L — одна из названных точек либрации. Известно (6), что изыскание рядов типа (2), формально удовлетворяющих уравнениям движения, приводит к заключению, что для каждого значения h существует одно единственное формальное решение интересующего нас типа, соответствующее обратному направлению синодического движения и обладающее тем свойством, что все коэффициенты ряда (2) стремятся к нулю, когда h стремится к значению h_L . В силу этого мы имеем здесь $N_-(h, P) = 1$.

Однако нетрудно показать, пользуясь методом, указанным нами в предыдущей заметке (7), что для каждого h из некоторого интервала (h_L, h_1) существует одна кольцевидная зона Виттекера, окружающая точку L и содержащая внутри себя по крайней мере одну простую периодическую траекторию обратного движения вокруг точки L . Размеры названной зоны стремятся к нулю, когда h стремится к h_L . Таким образом мы имеем здесь: $M_-(h, P) = 1$.

Все условия теоремы 2 выполнены, и мы можем заключить, что формальные ряды, получаемые упомянутым выше методом Ляпунова, должны сходиться по крайней мере внутри интервала (h_L, h_1) . Что касается зон Виттекера, то каждая из них оказывается содержащей внутри себя лишь одну единственную простую периодическую траекторию обратного синодического движения вокруг точки L . Класс периодических орбит Ляпунова оказывается таким образом тождественным с нашим классом $(f_-^{0'})$, определенным в цитированной заметке (7).

Сходимость формальных рядов Ляпунова, новое доказательство коей было дано только что, впервые была доказана самим Ляпуновым.

В заключение заметки мы позволим себе еще одно замечание. Известно, что числовые исследования Э. Стрёмгрена (8) привели этого знаменитого астронома к заключению о существовании трех классов простых периодических орбит, началом коих являются инфинитезимальные орбиты обратного движения вокруг коллинеарных точек либрации (классы Стрёмгрена a , b и c). Из сказанного выше следует, что начало каждого из этих классов должно совпадать с соответствующим классом Ляпунова, упомянутым выше.

Поступило
2 II 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Моисеев, Тр. ГАИШ, 7, 1 (1936). ² Моисеев, Тр. ГАИШ, 9, 2 (1938).
³ Моисеев, Тр. ГАИШ, 9, 2 (1938). ⁴ Hill, *Researches in the Lunar Theory*, Works, 1. ⁵ Ляпунов, Тр. О-ва любит. естествозн., 8 (1896). ⁶ Ляпунов, *Общая задача об устойчивости движения*. ⁷ Моисеев, ДАН, XV, № 9 (1937).
⁸ Strömberg, *Kor. Publ.*, 100 (1937).