Доклады Академии Наук СССР

1939. Том XXV, № 5

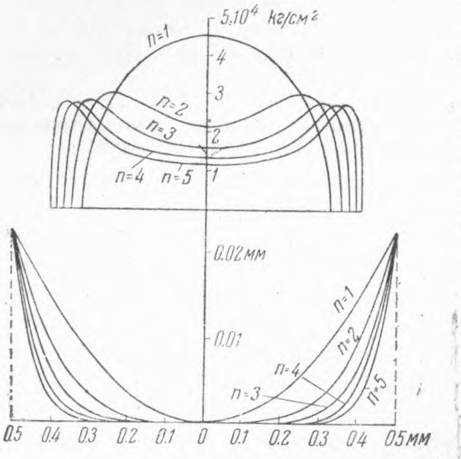
ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

И. Я. ШТАЕРМАН

К ТЕОРИИ ГЕРЦА МЕСТНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ СЖАТИИ УПРУГИХ ТЕЛ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 26 IX 1939)

Решение задачи о местных деформациях и напряжениях при сжатии упругих тел, данное Герцем, содержит ряд существенных ограничений. В частности предполагается, что первоначальное расстояние $l(x, y)$ между точками поверхностей сжимаемых тел, соприкасающихся в начале координат, может быть апроксимировано ввиду малых размеров поверхности давления суммой членов второй степени разложения функции $l(x,y)$ в степенной ряд. Таким образом, решение Герца не применимо в том случае, когда вторые производные функции $l(x,y)$ обращаются в нуль в начале координат.



Нами решена задача о местных деформациях при упругом сжатии при более общих предположениях как для случая тел вращения, ось которых совпадает с линией действия сжимающих сил, так и для случая цилиндрических тел (плоская задача). Из полученного нами решения вытекает тот результат, что диаграмма распределения напряжений весьма чувствительна по отношению к кривой расстояний между сжимаемыми телами. Как видно из фигуры, при повышении степени параболической кривой, представляющей кривую расстояний между сжимаемыми телами, максимальное напряжение, имеющее особо важное значение для технических расчетов, сдвигается из центра поверхности давления к его краю.

В случае тел вращения длина l зависит лишь от расстояния r от начала координат. Предположим, что все производные от функции l по аргументу r до $2n-1$-ой включительно обращаются в нуль при $r=0$. В этом случае радиус поверхности давления ρ и давление $p(r')$ в точке поверхности давления, отстоящей на расстоянии r' от линии действия сжимающих сил, определяются интегральным уравнением

$$(\vartheta_1+\vartheta_2)\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\rho} p(r')\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{\sqrt{r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2}}\right)r'dr'd\varphi' = Ar^{2n} \quad (r\leqslant\rho) \quad (1)$$

и условием

$$2\pi \int_0^\rho p(r')\, r' dr' = P, \tag{2}$$

где

$$\vartheta_1 = \frac{1-\sigma_1^2}{\pi E_1}, \qquad \vartheta_2 = \frac{1-\sigma_2^2}{\pi E_2},$$

E_1, σ_1 и E_2, σ_2 — упругие постоянные сжимаемых тел,

$$A = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n l}{dr^n}\right)_{r=0}, \qquad A > 0,$$

P — сжимающая сила.

Кроме того должно выполняться неравенство:

$$(\vartheta_1+\vartheta_2)\int_0^{2\pi}\int_0^\rho p(r')\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{\sqrt{r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2}}\right) r' dr' d\varphi' < Ar^{2n} \quad (r>\rho). \tag{3}$$

Решение интегрального уравнения (1) имеет вид:

$$p(r') = \frac{A\rho^{2n-1}}{\pi^2(\vartheta_1+\vartheta_2)}\left[\frac{2.4\ldots 2n}{1.3\ldots(2n-1)}\right]^2 p_n\left(\frac{r'}{\rho}\right), \tag{4}$$

где

$$p_n(t) = \left[t^{2n-2} + \frac{1}{2}t^{2n-4} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\right]\sqrt{1-t^2}, \tag{5}$$

в чем можно убедиться непосредственной подстановкой функции $p(r')$ из (4) в (1).

Подставляя функцию $p(r')$ из (4) в (3), убеждаемся в том, что неравенство (3) удовлетворяется.

Подставляя (4) в (2), находим радиус поверхности давления ρ:

$$\rho = \sqrt[2n+1]{\frac{2n+1}{2n}\,\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\,\frac{\pi(\vartheta_1+\vartheta_2)P}{2A}}. \tag{6}$$

Находим далее сближение α тел при сжатии:

$$\alpha = 2\pi(\vartheta_1+\vartheta_2)\int_0^\rho p(r')\,dr' = \frac{2.4\ldots 2n}{1.3\ldots(2n-1)}A\rho^{2n}. \tag{7}$$

Отыщем теперь те значения r', при которых давление $p(r')$ приобретает экстремальное значение. Приравнивая нулю производную функции $p(r')$ по r', получаем уравнение:

$$t\left[t^{2n-2} - \frac{1}{2}t^{2n-4} - \frac{1}{2.4}t^{2n-6} - \ldots - \frac{1.3\ldots(2n-5)}{2.4\ldots(2n-2)}\right] = 0, \tag{8}$$

где $t = \frac{r'}{p}$. При $n=1$ (случай, рассмотренный Герцем) уравнение (8) имеет лишь один корень $t=0$. В этом случае, как известно, давление $p(r')$ достигает наибольшей величины в центре поверхности давления. При $n>1$ корень $t=0$ соответствует минимуму функции $p(r')$. Наибольшей величины давление достигает в этом случае не в центре поверхности давления, а на окружности

$$r' = t_n\rho, \tag{9}$$

где t_n — корень уравнения

$$t^{2n-2} - \frac{1}{2}t^{2n-4} - \frac{1}{2.4}t^{2n-6} - \ldots - \frac{1.3\ldots(2n-5)}{2.4\ldots(2n-2)} = 0,$$

заключенный в интервале $(0, 1)$.

В качестве примера мы сопоставляем случай, когда шарик диаметром в 1.1 см прижимается силой, равной 100 кг, к плоской стальной поверхности, с тем случаем, когда степень параболоида вращения, апроксимирующего поверхность шарика в окрестности точки касания, последовательно возрастает с 2 до 10 так, что поверхности параболоидов во всех случаях пересекают поверхность шарика по окружности диаметром в 1 мм.

На фигуре внизу показаны сечения апроксимирующих параболоидов, вверху представлено радиальное распределение давления по поверхности давления в рассмотренных случаях.

В плоской задаче l зависит лишь от расстояния x до плоскости, в которой действуют сжимающие силы.

Если все производные функции l по x до $2n-1$-ой включительно обращаются в нуль при $x=0$, то полуширина поверхности давления a и давление $p(x')$ в точке поверхности давления, отстоящей на расстоянии x' от плоскости, в которой действуют сжимающие силы, определяются интегральным уравнением:

$$2(\vartheta_1+\vartheta_2)\int_{-a}^{+a} p(x')\ln\left|\frac{x-x'}{x'}\right| dx' = Ax^{2n} \qquad (|x|\leqslant a) \tag{10}$$

и условием

$$\int_{-a}^{+a} p(x')\,dx' = P, \tag{11}$$

где

$$A=\frac{1}{n!}\left(\frac{d^n l}{dx^n}\right)_{x=0}, \qquad A>0,$$

а P — сжимающая сила, приходящаяся на единицу длины образующей сжимаемых цилиндров.

Кроме того должно соблюдаться неравенство:

$$2(\vartheta_1+\vartheta_2)\int_{-a}^{+a} p(x')\ln\left|\frac{x-x'}{x'}\right| dx' < Ax^{2n} \qquad (|x|>a). \tag{12}$$

В этом случае

$$p(x')=\frac{nAa^{2n-1}}{\pi(\vartheta_1+\vartheta_2)}\,p_n\left(\frac{x'}{a}\right);$$

$$a=\sqrt[2n]{\frac{2.4\ldots 2n}{1.3\ldots(2n-1)}\;\frac{(\vartheta_1+\vartheta_2)P}{nA}}.$$

Характер изменения распределения давления по поверхности давления при возрастании n в этом случае тот же, что и в случае сжатия тел, симметричных относительно линии действия сжимающих сил.

От решения уравнения (1) можно перейти к решению уравнения, в правой части которого находится полином от аргумента r.

Институт математики
Академии Наук УССР

Поступило
26 IX 1939