Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 7

ФИЗИКА

Д. А. ФРАНК-КАМЕНЕЦКИЙ

НЕСТАЦИОНАРНАЯ СВОБОДНАЯ КОНВЕКЦИЯ

(Представлено академиком Н. Н. Семеновым 15 I 1938)

Все имеющиеся по настоящее время теоретические работы по свободной конвекции посвящены исключительно стационарному режиму. Вопрос о нестационарной свободной конвекции, насколько нам известно, никем не рассматривался.

Нестационарный процесс свободной конвекции описывается двумя уравнениями: уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + (v \operatorname{grad} \vartheta) = \varkappa\Delta\vartheta \tag{1}$$

и уравнением гидродинамики, которое в обычно принятых в теории свободной конвекции допущениях может быть написано как

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \operatorname{grad}) v = g\beta\vartheta + \nu\Delta v, \tag{2}$$

здесь ϑ—разность температур, $\varkappa$—температуропроводность, ν—кинематическая вязкость, β—коэффициент расширения $\left(\text{в случае идеальных газов } \beta = \frac{1}{T}\right)$.

Обрабатывая эти уравнения методами теории размерностей, получаем следующую совокупность безразмерных параметров (критериев подобия):

$$\frac{v_0\tau}{d};\ \frac{\varkappa\tau}{d^2};\ \frac{g\beta\vartheta_0\tau}{v_0};\ \frac{\nu\tau}{d^2}, \tag{3}$$

здесь d—характеристический размер, τ—характеристическое время, v_0 и ϑ_0—характеристические, т. е. отнесенные к начальному моменту и определенным точкам (или усредненные по определенному закону), скорость и разность температур. Не останавливаясь здесь на вопросе о характере начальных и граничных условий (условий однозначности), заметим, что свободной конвекцией по определению называется такой процесс, в котором в состав этих условий не входит скорость; поэтому определяющие параметры мы получим, комбинируя параметры (3) таким образом, чтобы исключить характеристическую скорость v_0. Составив такую комбинацию из первого и третьего параметра (в данном случае их произведение), получим определяющий критерий:

$$\frac{g\beta\vartheta_0\tau^2}{d}.$$

Наоборот, разделив третий параметр на первый, получим выражение для характеристической скорости:

$$v_0 = \sqrt{gd\beta\vartheta_0}.$$

Второй и четвертый параметры для данного вещества отличаются друг от друга в постоянное число раз, поэтому целесообразнее пользоваться одним из них (например вторым) и их отношением $\frac{\varkappa}{\nu} = Pr$, известным в теории подобия под названием критерия Прандтля. Последний меняется только при переходе от одного вещества к другому.

Таким образом окончательно получаем для нестационарной свободной конвекции следующую систему определяющих безразмерных параметров (критериев):

$$\frac{g\beta\vartheta_0\tau^2}{d}; \quad \frac{\varkappa\tau}{d^2}; \quad \frac{\varkappa}{\nu}. \tag{4}$$

Кроме того входит конечно, как всегда, критерий подобия полей физических констант $\frac{\Delta T}{T}$, который мы сейчас оставляем в стороне.

Решение системы (1), (2) должно дать пространственное распределение температур и скоростей в функции от времени. В этом решении время может фигурировать в виде двух безразмерных переменных $\frac{t}{\tau_1}$ и $\frac{t}{\tau_2}$, где τ_1 и τ_2 суть два характеристических времени, определяемых первым и вторым параметрами системы (4):

$$\tau_1 = \frac{d^2}{\varkappa}, \tag{5}$$

$$\tau_2 = \sqrt{\frac{d}{g\beta\vartheta_0}}; \tag{6}$$

τ_1 есть обычное характеристическое время чисто кондукционной теплоотдачи. Время же τ_2 имеет чисто гидродинамическую природу; оно совпадает, с точностью до постоянного множителя, со временем прохождения пути d свободно падающим телом, плотность которого разнится от плотности окружающей среды на величину $\beta\vartheta_0$ (Umlaufzeit немецких авторов).

Решение системы (1), (2) имеет следовательно вид:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = f\left(\frac{x}{d}; \frac{t}{\tau_1}; \frac{t}{\tau_2}\right), \tag{7}$$

$$\frac{v}{\sqrt{gd\beta\vartheta_0}} = f\left(\frac{x}{d}; \frac{t}{\tau_1}; \frac{t}{\tau_2}\right). \tag{7a}$$

Соответственно коэффициент теплоотдачи получится как $\alpha = \frac{\lambda}{\vartheta_0}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_{x_0}$. Здесь x обозначает совокупность пространственных координат, λ—теплопроводность; производная $\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_{x_0}$ берется по направлению, перпендикулярному к поверхности, ограничивающей систему; значение ее берется при $x = x_0$, лежащем на этой поверхности. Введя безразмерные переменные $\theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_0}$ и $\xi = \frac{x}{d}$, можем переписать (7) как

$$\theta = f\left(\xi; \frac{t}{\tau_1}; \frac{t}{\tau_2}\right), \tag{8}$$

а выражение для коэффициента теплоотдачи примет вид

$$\alpha = \frac{\lambda}{d}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)_{\xi_0},$$

или

$$\frac{\alpha d}{\lambda}=\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)_{\xi_0}. \tag{9}$$

Величина $\frac{\alpha d}{\lambda}$ есть безразмерный коэффициент теплоотдачи, называемый обычно критерием Нуссельта и обозначаемый Nu. Значение $\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)_{\xi_0}$ может быть получено посредством дифференцирования (8) и подстановки в результат $\xi=\xi_0$. После этого для коэффициента теплоотдачи получим окончательно:

$$Nu=\frac{\alpha d}{\lambda}=f'\left(\xi_0;\ \frac{t}{\tau_1};\ \frac{t}{\tau_2}\right), \tag{10}$$

где величина ξ_0 определяет положение точки, в которой определяется коэффициент теплоотдачи на поверхности, ограничивающей систему. В подобных точках подобных систем будем иметь

$$Nu=f'\left(\frac{t}{\tau_1};\ \frac{t}{\tau_2}\right). \tag{11}$$

Мы можем конечно написать решение системы (1), (2) и с одним только безразмерным временем — безразлично, τ_1 или τ_2, — но тогда в решение войдет еще один безразмерный параметр, равный отношению этих двух времен $\frac{\tau_1}{\tau_2}$; при этом (8) примет вид:

$$\theta=f\left(\xi;\ \frac{t}{\tau};\ \frac{\tau_1}{\tau_2}\right) \tag{12}$$

и (11) вид:

$$Nu=f'\left(\frac{t}{\tau};\ \frac{\tau_1}{\tau_2}\right), \tag{13}$$

где за τ мы можем выбрать одно из времен τ_1 или τ_2 по своему произволу.

Что же представляет собою величина $\frac{\tau_1}{\tau_2}$? Подставляя значения τ_1 и τ_2 из (5) и (6), получим:

$$\frac{\tau_1}{\tau_2}=\sqrt{\frac{gd^3}{\varkappa^2}\beta\vartheta_0}=\sqrt{Gr}\,Pr, \tag{14}$$

так как величина $\frac{gd^3}{\varkappa^2}\beta\vartheta_0$ есть безразмерный параметр, известный из теории стационарной свободной конвекции и носящий название критерия Грасгофа (Gr).

Таким образом выражения (12) и (13) можно писать как

$$\theta=f\left(\xi;\ \frac{t}{\tau};\ Gr\right), \tag{15}$$

$$Nu=f'\left(\frac{t}{\tau};\ Gr\right), \tag{16}$$

что является естественным следствием теории подобия и конечно легко могло бы быть получено и непосредственно.

Выражения (8) и (11) заключают в себе однако большее содержание, чем эквивалентные им (15) и (16). Из (11) и (12) непосредственно следует, что в пределе при больших значениях одного из времен τ_1 или τ_2 (если такой предел существует) временной ход явления будет описываться только вторым из них.

При $\tau_2\gg\tau_1$, т. е. при $Gr\ll 1$, мы будем иметь предельный случай чистой кондукции, где роль времени релаксации играет величина τ_1. Физически очевидно, что этот предельный случай всегда существует в действительности, т. е. что при $Gr \to 0$ функции f и f' всегда стремятся к определенному пределу.

При $\tau_1 \gg \tau_2$, т. е. при $Gr \gg 1$, мы получим противоположный предельный случай развитой турбулентности, соответствующий рассмотренному нами ранее предельному случаю в теории стационарной свободной конвекции ([1]).

В этом случае характеристическое время теплоотдачи будет пропорционально величине τ_2, т. е. прямо пропорционально корню квадратному из линейного размера и обратно пропорционально корню квадратному из перепада температур. Последние зависимости были уже нами найдены в только что цитированной работе из рассмотрения квази-стационарного случая.

Следует отметить различие между двумя рассмотренными предельными случаями. Если существование первого из них (отсутствие конвекции) физически очевидно, то второй может и не достигаться в действительности. В каждом отдельном конкретном случае может оказаться, что при $Gr \to \infty$ функции f и f' не стремятся к определенному конечному пределу и что предельный случай достигается например только одновременно с обращением самого коэффициента теплоотдачи в бесконечность.

Кроме того, если безразмерный множитель, связывающий τ_1 с точным временем релаксации кондукционной теплоотдачи, бывает обычно порядка единицы, то этого отнюдь нельзя сказать о соответствующем множителе для второго предельного случая. Напротив, рассмотрение простых примеров приводит к выводу, что характеристическое время охлаждения для чисто конвекционного случая пропорционально величине τ_2, но по численной величине может значительно отличаться от нее.

Сопоставляя выводы настоящей работы с выводами нашей предыдущей работы ([1]), мы видим, что критерий Грасгофа является по существу квадратичным и что собственно правильнее было бы пользоваться в качестве определяющего критерия в теории свободной конвекции величиной:

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \sqrt{\frac{gd^3}{\varkappa^2}\beta\vartheta_0} = Gr^{1/2}Pr.$$

Выводы

1. Распределение температур и коэффициент теплоотдачи при нестационарной свободной конвекции могут быть представлены как функции двух безразмерных времен $\frac{t}{\tau_1}$ и $\frac{t}{\tau_2}$, где $\tau_1 = \frac{d^2}{\varkappa}$ есть характеристическое время кондукционной теплоотдачи, а $\tau_2 = \sqrt{\frac{d}{g\beta\vartheta_0}}$ имеет гидродинамическую природу («Umlaufzeit»).

2. Критерий Грасгофа (или точнее $GrPr^2$) есть квадрат отношения этих двух времен: $GrPr^2 = \frac{\tau_1^2}{\tau_2^2}$, вследствие чего указанные функции могут быть преобразованы так, чтобы оставить одно из характеристических времен τ_1 или τ_2 (безразлично какое), но ввести в качестве параметра критерий Грасгофа.

Физико-химическая лаборатория
Академия Наук СССР.
Ленинград.

Поступило
15 I 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Франк-Каменецкий, ДАН, XVII, № 1—2, 9 (1937).