Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 1—2

НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

Н. Ф. РЕЙН

К РАЗВИТИЮ МЕТОДА ОЦЕНКИ ПЕРИОДОВ РЕШЕНИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ, СВЯЗАННОГО С ИНТЕГРАЛОМ ВИТТЕКЕРА

(Представлено академиком В. Г. Фесенковым 28 II 1938)

Рассмотрим плоскую ограниченную задачу трех тел во вращающихся осях, уравнения которой:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = U'_x,$$
$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = U'_y, \quad n = \text{const}; \quad U = U(x, y), \tag{1}$$

допускают интеграл Якоби

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2(U + h), \tag{2}$$

где U — силовая функция и h — постоянная Якоби.

Введем интеграл Виттекера ([1])

$$I = \frac{1}{2\pi}\int\int \Delta^2 \ln(U + h)\, dx\, dy, \tag{3}$$

где Δ^2 — оператор Лапласа и где интегрирование распространено на часть плоскости (x, y), ограниченную простым и правильным замкнутым контуром. Пусть B — простая и правильная замкнутая траектория рассматриваемой проблемы и пусть C_i и C_e соответственно внутренняя и наружная границы кольцевидной области, заключающей внутри себя траекторию. Будем предполагать, что внутри области (C_i, C_e) не содержится ни особенностей силовой функции U, ни точек кривой нулевой скорости:

$$U + h = 0, \tag{4}$$

построенной для значения h, соответствующего траектории B.

Обозначая через L_B, L_{C_i}, L_{C_e} значения криволинейного интеграла

$$L = \frac{1}{2\pi}\int \frac{U'_x dy - U'_y dx}{U + h}, \tag{5}$$

взятого соответственно вдоль B, C_i и C_e, мы имеем формулы:

$$I_{BC_i} = L_B - L_{C_i} \tag{6}$$

и

$$I_{BC_e} = L_{C_e} - L_B, \tag{7}$$

где I_{BC_e} и I_{BC_i} суть значения интеграла (3), распространенного соответственно на части плоскости (x, y), заключенные между кривыми B и C_i и кривыми C_e и B.

Замечая, что L_B связано с синодическим периодом T траектории B соотношением (2)

$$L_B = -2 \mp \frac{2nT}{\pi}, \tag{8}$$

где верхний знак (—) соответствует случаю траектории прямого синодического движения, а нижний знак (+) соответствует траектории обратного синодического движения, мы заключаем, что формула (6) и формула (7) дают нам каждая возможность вычисления упомянутого периода T. Непосредственное использование этих формул требует однако знания самой траектории B. В том случае, когда эта траектория нам неизвестна, а известна только зона (C_i, C_e), ее заключающая, мы можем извлечь из формул (6) и (7) приближенную оценку периода T, исходя из того, что в сделанных нами предположениях дополнительные члены I_{BC_i} и I_{BC_e} стремятся к нулю при C_i и C_e, стремящихся к траектории B.

В предыдущей заметке (3) мы ввели в рассмотрение вспомогательную кривую или сепаранту Φ^0, определяемую уравнением

$$\Phi \equiv (U''_{xx} + U''_{yy})(U+h) - (U'^2_x + U'^2_y) = 0. \tag{9}$$

Если сепаранта, построенная для того же значения h, что и траектория B, не имеет общих точек с областью (C_i, C_e), то тогда мы имеем либо

$$I_{BC_i} > 0; \qquad I_{BC_e} > 0 \tag{10}$$

либо

$$I_{BC_i} < 0; \qquad I_{BC_e} < 0, \tag{11}$$

откуда вытекают неравенства

$$L_{C_e} > L_B > L_{C_i} \tag{12}$$

в случае (10) и неравенства

$$L_{C_i} > L_B > L_{C_e} \tag{13}$$

в случае (11), позволяющие получить оценку периода снизу и сверху.

Случай, когда сепаранта имеет общие точки с зоной (C_i, C_e), остался нами не рассмотренным. Обращаясь теперь к рассмотрению этого случая, мы допускаем, что сепаранта (9) конечное число раз пересекает зону (C_i, C_e) и делит ее на области Φ^+, где $\Phi > 0$, и Φ^-, где $\Phi < 0$. Ветви сепаранты Φ^0, на которых Φ обращается в нуль, не меняя знака при переходе с одной стороны ветви на другую, естественно могут быть исключены из рассмотрения.

Обозначим через L_{Φ^0} значение интеграла (5), взятого вдоль всех кусков сепаранты, заключенных внутри зоны (C_i, C_e), и условимся за положительное направление обхода по сепаранте считать то, при котором область Φ^+ остается слева. Введем кроме того следующие обозначения:

$I^+_{BC_i}$ $[I^+_{BC_e}]$ — значение интеграла (3), распространенного на все те части зоны (B, C_i) $[(B, C_e)]$, которые попадают в область Φ^+;

$I^-_{BC_i}$ $[I^-_{BC_e}]$ — значение интеграла (3), распространенного на все те части зоны (B, C_i) $[(B, C_e)]$, которые попадают в область Φ^-;

$L^+_{C_i}$ $[L^+_{C_e}]$ — значение интеграла (5), взятого вдоль части контура C_i $[C_e]$, лежащей в области Φ^+;

$L^-_{C_i}$ $[L^-_{C_e}]$ — значение интеграла (5), взятого вдоль части контура C_i $[C_e]$, лежащей в области Φ^-.

Тогда мы будем иметь:

$$I^+_{BC_i} - I^-_{BC_e} = L_B - L^+_{C_i} - L^-_{C_e} + L_{\Phi^0} \tag{14}$$

и

$$I^-_{BC_i} - I^+_{BC_e} = L_B - L^-_{C_i} - L^+_{C_e} - L_{\Phi^0}. \tag{15}$$

Замечая теперь, что

$$I^+_{BC_i} - I^-_{BC_e} > 0 \tag{16}$$

и

$$I^-_{BC_i} - I^+_{BC_e} < 0, \tag{17}$$

мы приходим к неравенствам

$$L^-_{C_i} + L^+_{C_e} + L_{\Phi^0} > L_B > L^+_{C_i} + L^-_{C_e} - L_{\Phi^0}, \tag{18}$$

которые представляют собой обобщение неравенств (12) и (13) на тот случай, когда сепаранта Φ^0 имеет общие точки с зоной, заключающей внутри себя траекторию. Нетрудно убедиться в том, что неравенства (18) сохраняют свою силу и в том случае, когда сепаранта имеет замкнутую ветвь, целиком расположенную внутри зоны (C_i, C_e).

В частном случае, когда зона (C_i, C_e) целиком расположена в области Φ^+, мы имеем

$$L_{\Phi^0} = 0; \; L^-_{C_i} = L^-_{C_e} = 0; \; L^+_{C_i} = L_{C_i}; \; L^+_{C_e} = L_{C_e}, \tag{19}$$

и неравенства (18) переходят в неравенства (12). Если же зона оказывается целиком расположенной в области Φ^-, то

$$L_{\Phi^0} = 0; \; L^+_{C_i} = L^+_{C_e} = 0; \; L^-_{C_i} = L_{C_i}; \; L^-_{C_e} = L_{C_e}, \tag{20}$$

и неравенства (18) переходят в неравенства (13).

С помощью неравенств (18) и формулы (8) мы получаем следующие неравенства, служащие для оценки периода T:

а) Случай траектории прямого синодического движения:

$$-2 - L^+_{C_i} - L^-_{C_e} + L_{\Phi^0} > \frac{2nT}{\pi} > -2 - L^-_{C_i} - L^+_{C_e} - L_{\Phi^0}. \tag{21}$$

б) Случай траектории обратного синодического движения:

$$2 + L^-_{C_i} + L^+_{C_e} + L_{\Phi^0} > \frac{2nT}{\pi} > 2 + L^+_{C_i} + L^-_{C_e} - L_{\Phi^0}. \tag{22}$$

Неравенства (21) и (22) позволяют оценивать синодический период простой и правильной замкнутой траектории, не требуя интеграции самих уравнений движения.

Поступило
28 II 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. T. Whittaker, Monthly Notices, LXII, № 5 (1902). [2] Н. Ф. Рейн, ДАН, XV, № 8 (1937). [3] Н. Ф. Рейн, ДАН, XVI, № 6 (1937).