Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 1—2

МАТЕМАТИКА

И. И. ПРИВАЛОВ

ОБОБЩЕННЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 25 II 1938)

Пусть D — произвольная конечно-связная область пространства $p \geqslant 2$ измерений, граница $\sum$ которой состоит из конечного числа замкнутых поверхностей Жордана, и E — произвольное множество точек поверхности $\sum$ гармонической меры нуль относительно области D.

Теорема. *Если субгармоническая функция $u(P)$, ограниченная сверху в области D, во всех точках Q границы $\sum$, за исключением, быть может, точек множества E, удовлетворяет условию:*

$$\overline{\lim_{P \to Q}}\, u(P) \leqslant C, \tag{1}$$

то внутри D будет $u(P) \leqslant C$, причем знак равенства возможен лишь в случае, когда $u(P)$ тождественно равна постоянному C.

Отправляясь от произвольной точки P_0 области D и сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, построим открытое множество O поверхности $\sum$, $O \supset E$, так, чтобы $\omega(O, D, P_0) < \varepsilon$, где через $\omega(O, D, P)$ обозначена гармоническая мера открытого множества O относительно области D в точке P.

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$v(P) = u(P) - C - (K - C)\,\omega(O, D, P),$$

где K есть верхняя граница данной функции $u(P)$ в области $D\,(K > C)$*.

Очевидно $v(P)$ есть субгармоническаа функция в области D; что касается ее поведения в граничных точках, то, если точка Q не принадлежит O, имеем $\overline{\lim\limits_{P \to Q}}\, v(P) \leqslant 0$ в силу (1), если же точка Q принадлежит O, то также будет $\overline{\lim\limits_{P \to Q}}\, v(P) \leqslant 0$ в силу свойств гармонической меры $\omega(O, D, P)$, предельные значения которой в точках множества O равны единице.

Итак, для всех граничных точек Q имеем:

$$\overline{\lim_{P \to Q}}\, v(P) \leqslant 0.$$

---

* Если $K \leqslant C$, то теорема не требует доказательства.

Следовательно $v(P) \leqslant 0$ всюду в области D, в частности $v(P_0) \leqslant 0$, т. е.

$$u(P_0) \leqslant C + (K - C)\,\omega(O, D, P_0).$$

Вспомнив, что $\omega(O, D, P_0) < \varepsilon$, находим:

$$u(P_0) < C + (K - C)\,\varepsilon,$$

откуда

$$u(P_0) \leqslant C,$$

так как $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, что и требовалось доказать.

Ограничиваясь рассмотрением области G, ограниченной поверхностью типа Ляпунова S в пространстве $p \geqslant 3$ измерений, а в случае $p = 2$ любой спрямляемой кривой Жордана S, можно доказать теорему.

Множество точек E, расположенное на границе S области G, будет гармонической меры нуль относительно области G тогда и только в том случае, когда оно имеет поверхностную меру нуль.

Случай $p = 2$. Пусть E расположено на единичной окружности и имеет длину нуль. Покажем, что E гармонической меры нуль относительно единичного круга. Отправляясь от сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, построим открытое множество O на единичной окружности так, чтобы $E \subset O$ и mes $O < \varepsilon$. Обозначая через $\omega(E, G, P)$ гармоническую меру множества E относительно круга G в точке P, имеем:

$$\omega(E, G, P) \leqslant \omega(O, G, P) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_O \frac{(1 - r^2)\,d\theta}{1 - 2r\cos(\theta - \varphi) + r^2},$$

где r, φ — полярные координаты точки P. Из последнего неравенства очевидно получим:

$$\omega(E, G, P) < \frac{1}{2\pi}\,\frac{1 + r}{1 - r}\,\varepsilon,$$

откуда следует, что $\omega(E, G, P) = 0$ в каждой точке P, что и нужно.

Если E расположено на спрямляемой кривой Жордана, ограничивающей область G, и имеет длину нуль, то оно будет гармонической меры нуль относительно G. Доказательство этого утверждения немедленно сводится к рассмотренному случаю, если выполнить конформное отображение области G на единичный круг и заметить, что при этом длина преобразованного множества E_1 будет также нуль, и сверх того имеем:

$$\omega(E, G, P) = \omega(E_1, G_1, P_1),$$

где G_1 — единичный круг, а P и P_1 — соответствующие точки при конформном преобразовании.

Обратное предложение также достаточно доказать для единичного круга. Итак, пусть E расположено на единичной окружности и гармонической меры нуль относительно единичного круга. Покажем, что оно будет длины нуль.

В самом деле, отправляясь от точки P_0 и произвольного $\varepsilon > 0$, построим открытое множество O на единичной окружности так, чтобы $E \subset O$ и $\omega(O, G, P_0) < \varepsilon$. С другой стороны, имеем:

$$\omega(O, G, P_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_O \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \varphi) + r^2}\,d\theta,$$

где r, φ — полярные координаты точки P_0. Из последней формулы заключаем:

$$\omega(O, G, P_0) > \frac{1}{2\pi}\,\frac{1 - r}{1 + r}\,\text{mes}\,O,$$

и следовательно $\text{mes } O < 2\pi \frac{1+r}{1-r}\varepsilon$, откуда $\text{mes } E = 0$.

Случай $p \geqslant 3$. Поступая аналогично предыдущему, имеем:

$$\omega(E, G, P) \leqslant \omega(O, G, P) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2(p-2)\pi^{\frac{p}{2}}} \int\limits_O \frac{\partial g(P; Q)}{\partial N} d\sigma,$$

откуда

$$\omega(E, G, P) < C \text{ mes } O < C\varepsilon,$$

так как

$$\frac{\partial g(P; Q)}{\partial N} < C, \text{ mes } O < \varepsilon;$$

следовательно

$$\omega(E, G, P) = 0.$$

Обратно, из формулы:

$$\omega(O, G, P_0) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2(p-2)\pi^{\frac{p}{2}}} \int\limits_O \frac{\partial g(P_0; Q)}{\partial N} d\sigma > c \text{ mes } O,$$

вследствие неравенства

$$\frac{\partial g(P_0; Q)}{\partial N} > c,$$

следует:

$$\text{mes } O < \frac{1}{c}\,\omega(O, G, P_0) < \frac{\varepsilon}{c},$$

так как

$$\omega(O, G, P_0) < \varepsilon;$$

следовательно

$$\text{mes } E = 0.$$

Поступило
26 II 1938.