

С. М. РЫТОВ

О ПЕРЕХОДЕ ОТ ВОЛНОВОЙ К ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКЕ

(Представлено академиком Л. И. Мандельштамом 20 XI 1937)

Обычно переход к приближению геометрической оптики дискутируется для скалярного волнового уравнения. При этом в нулевом приближении относительно длины световой волны λ получается уравнение эйконала, а в первом приближении — закон сохранения светового потока. Между тем последовательная электромагнитная теория должна была бы исходить из векторных уравнений Максвелла*. Можно ожидать при этом, что исследование первого приближения даст не только закон для интенсивности, но и для поляризации, т. е. позволит ответить на вопрос о том, как вращаются векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} вокруг луча при перемещении вдоль по лучу.

В настоящей заметке показывается, что из условий существования первого приближения действительно следует не только закон сохранения светового потока, но и чрезвычайно простой закон вращения векторов поля.

Уравнения Максвелла для диэлектрика (мы считаем, что магнитная проницаемость равна единице) в случае монохроматической волны, т. е. при \mathbf{E} и \mathbf{H} , пропорциональных $e^{i\omega t}$, имеют вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -ik\mathbf{H}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= ik\varepsilon(x, y, z)\mathbf{E}, \end{aligned} \quad (1)$$

где ε — диэлектрическая постоянная среды и

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Ищем решение в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\mathbf{A}(x, y, z)}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot e^{-ik\psi(x, y, z)}, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{B}(x, y, z) \cdot e^{-ik\psi(x, y, z)}. \end{aligned}$$

Подставляя это в (1), получаем

$$\begin{aligned} [\nabla\psi, \mathbf{B}] + \sqrt{\varepsilon}\mathbf{A} &= -\frac{i}{k}\operatorname{rot} \mathbf{B}, \\ -\sqrt{\varepsilon}\mathbf{B} + [\nabla\psi, \mathbf{A}] &= -\frac{i}{k}\left(\operatorname{rot} \mathbf{A} - \frac{1}{2\varepsilon}[\nabla\varepsilon, \mathbf{A}]\right). \end{aligned} \quad (2)$$

* Для однородной среды это было сделано В. С. Игнатовским, Труды ГОИ, I, вып. 3 (1920), см. также В. А. Фок, Труды ГОИ, III, вып. 27 (1924).

Разложим теперь \mathbf{A} и \mathbf{B} по степеням $\frac{i}{k}$, предполагая, что соответствующие ряды сходятся:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{A}_0 + \frac{i}{k} \mathbf{A}_1 + \dots, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \frac{i}{k} \mathbf{B}_1 + \dots\end{aligned}$$

Подставляя эти ряды в (2) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\frac{i}{k}$, мы получаем уравнения нулевого приближения:

$$\begin{aligned}[\nabla\phi, \mathbf{B}_0] + \sqrt{\varepsilon} \mathbf{A}_0 &= 0, \\ -\sqrt{\varepsilon} \mathbf{B}_0 + [\nabla\phi, \mathbf{A}_0] &= 0\end{aligned}\quad (3)$$

и уравнения первого приближения:

$$\begin{aligned}[\nabla\phi, \mathbf{B}_1] + \sqrt{\varepsilon} \mathbf{A}_1 &= -\text{rot } \mathbf{B}_0, \\ -\sqrt{\varepsilon} \mathbf{B}_1 + [\nabla\phi, \mathbf{A}_1] &= -\left(\text{rot } \mathbf{A}_0 - \frac{1}{2\varepsilon} [\nabla\varepsilon, \mathbf{A}_0]\right).\end{aligned}\quad (4)$$

Однородные уравнения (3) имеют нетривиальное решение при условии, что детерминант системы равен нулю. Как нетрудно убедиться, это условие есть уравнение эйконала:

$$(\nabla\phi)^2 = \varepsilon.$$

Полагая

$$\nabla\phi = \sqrt{\varepsilon} \mathbf{t},$$

где \mathbf{t} — единичный вектор волновой нормали, мы приводим уравнения (3) и (4) к виду:

$$\left. \begin{aligned}[\mathbf{t}, \mathbf{B}_0] + \mathbf{A}_0 &= 0, \\ -\mathbf{B}_0 + [\mathbf{t}, \mathbf{A}_0] &= 0;\end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned}[\mathbf{t}, \mathbf{B}_1] + \mathbf{A}_1 &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \text{rot } \mathbf{B}_0 = \mathbf{X}, \\ -\mathbf{B}_1 + [\mathbf{t}, \mathbf{A}_1] &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\text{rot } \mathbf{A}_0 - \frac{1}{2\varepsilon} [\nabla\varepsilon, \mathbf{A}_0]\right) = \mathbf{Y}.\end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Уравнения (5) допускают два и только два линейно независимых частных решения, соответствующих двум направлениям поляризации, а именно:

$$\left. \begin{aligned}\mathbf{A}_0 = \mathbf{n}, \\ \mathbf{B}_0 = \mathbf{b},\end{aligned} \right\} \text{ и } \left. \begin{aligned}\mathbf{A}_0 = \mathbf{b}, \\ \mathbf{B}_0 = -\mathbf{n},\end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

где векторы \mathbf{n} и \mathbf{b} , которые мы можем считать единичными, удовлетворяют только тому условию, что они образуют с \mathbf{t} ортогональную связку. Для определенности мы возьмем \mathbf{n} за единичный вектор главной нормали луча, и тогда \mathbf{b} будет единичным вектором бинормали. Общее решение уравнений (5) запишется в виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_0 &= \Phi_1 \mathbf{n} + \Phi_2 \mathbf{b}, \\ \mathbf{B}_0 &= \Phi_1 \mathbf{b} - \Phi_2 \mathbf{n},\end{aligned}$$

где Φ_1 и Φ_2 — произвольные функции.

Таким образом в нулевом приближении мы имеем в каждой точке луча (линии \mathbf{t}) ортогональную связку $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{t}$, но, поскольку Φ_1 и Φ_2 пока неопределенны, она никак не связана с такими же связками

в других точках луча, т. е. изменение интенсивности и вращение векторов \mathbf{A}_0 и \mathbf{B}_0 пока неизвестны. И то и другое должно определиться из условий разрешимости системы неоднородных уравнений первого приближения (6), детерминант которой равен нулю. Эти условия заключаются, как известно, в требовании ортогональности правых частей (6) к каждому из линейно независимых решений транспонированной, однородной системы. Но, как нетрудно видеть, матрица однородных уравнений (5) антисимметрична, и поэтому уравнения транспонированной системы отличаются от уравнений исходной только общим знаком. Следовательно правые части уравнений (6) должны быть ортогональны просто к каждому из решений (7) исходной системы. Это дает два условия:

$$\begin{aligned}(\mathbf{X}, \mathbf{b}) + (\mathbf{Y}, \mathbf{n}) &= 0, \\ -(\mathbf{X}, \mathbf{n}) + (\mathbf{Y}, \mathbf{b}) &= 0,\end{aligned}$$

причем в \mathbf{X} и \mathbf{Y} следует подставить общее решение однородной системы. Выполнив подстановку, мы получаем после некоторых простых преобразований:

$$\left. \begin{aligned}\Phi_1 (\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{n} + \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{b}) - \Phi_2 \operatorname{div} \mathbf{t} - 2(\mathbf{t}, \nabla \Phi_2) + \frac{\Phi_2}{2\varepsilon} (\mathbf{t}, \nabla \varepsilon) &= 0, \\ \Phi_2 (\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{n} + \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{b}) + \Phi_1 \operatorname{div} \mathbf{t} + 2(\mathbf{t}, \nabla \Phi_1) - \frac{\Phi_1}{2\varepsilon} (\mathbf{t}, \nabla \varepsilon) &= 0.\end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Умножив первое уравнение на $-\frac{\Phi_2}{\sqrt{\varepsilon}}$, второе на $\frac{\Phi_1}{\sqrt{\varepsilon}}$ и сложив, мы находим закон изменения интенсивности:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\Phi_1^2 + \Phi_2^2}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \mathbf{t} \right) = 0.$$

Умножив первое уравнение на Φ_1 , второе на Φ_2 и сложив, мы получаем

$$\frac{1}{2} (\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{n} + \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{b}) = \frac{(\mathbf{t}, \Phi_1 \nabla \Phi_2 - \Phi_2 \nabla \Phi_1)}{\Phi_1^2 + \Phi_2^2} = \left(\mathbf{t}, \nabla \operatorname{arctg} \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \right) = (\mathbf{t}, \nabla) \cdot \varphi, \quad (9)$$

где $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\Phi_2}{\Phi_1}$ — угол между \mathbf{A}_0 и главной нормалью.

Воспользуемся теперь соотношением:

$$-\mathbf{t} \operatorname{rot} \mathbf{t} + \mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{n} + \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{b} = \frac{2}{T}^*,$$

где T — радиус кручения.

В нашем случае \mathbf{t} дает направление потенциального вектора ($\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \nabla \phi$), т. е. $\mathbf{t} \operatorname{rot} \mathbf{t} = 0$, а значит

$$\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{n} + \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{b} = \frac{2}{T}. \quad (10)$$

Внося это в (9) и учитывая, что

$$(\mathbf{t}, \nabla) = \frac{dx}{ds} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{ds} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{dz}{ds} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{d}{ds}, \quad (11)$$

где s — дуга, отсчитанная по кривой (в данном случае по лучу), мы получаем окончательный результат в виде:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{T}. \quad (12)$$

* См. например R. R o t h e, Anwendungen der Vektoranalysis auf Geometrie, Jahresber. d. deutsch. math. Ver., XXI, 257 (1912).

Итак, если луч обладает кручением, то \mathbf{E} и \mathbf{H} вращаются относительно естественного трехгранника, и это вращение тем больше, чем больше кручение. \mathbf{E} и \mathbf{H} неподвижны относительно естественного трехгранника только в отсутствие кручения, т. е. в том случае, когда луч является плоской кривой.

Нетрудно далее подсчитать абсолютные скорости вращения единичных векторов \mathbf{e} и \mathbf{h} , дающих направления \mathbf{E} и \mathbf{H} :

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{n} \cos \varphi + \mathbf{b} \sin \varphi, \\ \mathbf{h} &= \mathbf{b} \cos \varphi - \mathbf{n} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (13)$$

Пользуясь (12) и формулами Френе:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{R}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\frac{\mathbf{t}}{R} - \frac{\mathbf{b}}{T}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{\mathbf{t}}{T},$$

где R — радиус кривизны, мы находим:

$$\frac{d\mathbf{e}}{ds} = -\frac{\cos \varphi}{R} \mathbf{t}, \quad \frac{d\mathbf{h}}{ds} = \frac{\sin \varphi}{R} \mathbf{t}.$$

Таким образом по отношению к независимой системе координат вращение каждого из векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} с ростом s приостанавливается около тех точек луча, в которых этот вектор коллинеарен с бинормалью.

С помощью (10), (12) и (13) легко получить далее, что сумма

$$\mathbf{e} \operatorname{rot} \mathbf{e} + \mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h} = 0 \quad (14)$$

при всяком кручении и кривизне, но порознь $\mathbf{e} \operatorname{rot} \mathbf{e}$ и $\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}$, вообще говоря, отличны от нуля*. Таким образом в общем случае не существует триортогональной системы поверхностей, ортогональные траектории которых были бы линиями \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{t} . Необходимое и согласно (14) достаточное условие существования такой системы было бы $\mathbf{e} \operatorname{rot} \mathbf{e} = 0$.

Вращение плоскости поляризации, выражаемое формулой (12), можно рассматривать обычным образом как результат различия скоростей составляющих циркулярно-поляризованных волн. Нетрудно убедиться, что скорости распространения волн с правой и левой круговой поляризацией будут:

$$v_{\text{пр., лев.}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mp \frac{\lambda}{2\pi T}}}$$

Я пользуюсь случаем выразить свою благодарность проф. М. А. Леонтовичу за проявленное им внимание и ряд ценных советов.

Физический институт им. П. Н. Лебедева.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
22 XII 1937.

* $\mathbf{e} \operatorname{rot} \mathbf{e} = -\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h} = \gamma$, где γ — так называемое геодезическое кручение линий \mathbf{e} , лежащих на поверхностях $\psi = \text{const}$.