Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 4—5

МАТЕМАТИКА

Ю. Ф. СИРВИНТ

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПРОСТРАНСТВА L

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 26 XII 1937)

Линейная трансформация нормированного пространства может не быть вполне непрерывной, в то время как одна из ее степеней и следовательно все следующие вполне непрерывны. Это обстоятельство имеет непосредственное значение в абстрактной теории Фредгольма [1].

Рассмотрим сначала класс линейных трансформаций $U(x)$ пространства L*:

$$U(x) = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt \qquad \operatorname{vrai}\max_{0 \leqslant s,\, t \leqslant 1} |K(s, t)| = K_0 < \infty. \tag{I}$$

Вот два свойства этого класса, которые будут нас интересовать:

1) среди операций (I) имеются невполне непрерывные,

2) квадрат операции (I) вполне непрерывен.

Чтобы доказать 1), введем последовательность $\{y_n(s)\}$, $n = 0, 1, \ldots$ функций, определенных в (0,1) следующим образом:

$$y_n(s) = \begin{cases} 1, \text{ когда } \dfrac{2k}{2^n} < s \leqslant \dfrac{2k+1}{2^n} \; (k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1}), \\ -1, \text{ когда } \dfrac{2k-1}{2^n} < s \leqslant \dfrac{2k}{2^n} \; (k = 1, \ldots, 2^{n-1}). \end{cases} \tag{1}$$

Последовательность $\{y_n\}$ элементов L, определенная сейчас, не является компактной, ибо $\| y_n - y_m \| = 1 \quad (n \neq m)$.

Определим теперь последовательность интервалов, не налегающих друг на друга $\{d_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$ с $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n = (0,1)$.

Положим:

$$K(s, t) = y_n(s), \text{ когда } t \in d_n. \tag{2}$$

---

* Обозначения взяты из книги, цитированной под [1]. В остальном, если e — линейное множество точек и E плоское множество, то через $|e|$ мы обозначаем $m_l e$ и через $\| E \|$ обозначаем $m_s E$.

Операция $U(x)$ с ядром (2) принадлежит классу (I). Она невполне непрерывна. В самом деле, пусть для каждого d_n

$$x_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{|d_n|}, & \text{когда } t \in d_n, \\ 0 & \text{вне } d_n. \end{cases}$$

Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, ибо $\|x_n\| = 1$. Но $U(x_n) = y_n$, и предложение 1) оказывается доказанным.

Что касается предложения 2), то его можно доказать, опираясь на критерий полной непрерывности в L, данный Гельфандом ([2]). Здесь мы предпочтем другой путь.

Лемма. *Пусть $K(s,t)$ есть измеримая функция в $(0 \leqslant s,\ t \leqslant 1)$ и $\operatorname{vrai}\max\limits_{0\leqslant s,t\leqslant 1} |K(s,t)| = K_0 < \infty$. Тогда, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует измеримая функция $K_\varepsilon(s,t)$, непрерывная по s, когда t фиксировано в множестве меры 1. При этом $\operatorname{vrai}\max |K_\varepsilon(s,t)| \leqslant K_0$, и если обозначить через $\varphi(s,t)$ характеристическую функцию множества, на котором $K(s,t) \neq K_\varepsilon(s,t)$, то*

$$\operatorname{vrai}\max_{0\leqslant t\leqslant 1} \int_0^1 \varphi(s,t)\,ds \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство. Построим некоторую убывающую последовательность множеств E_n точек квадрата $(0 \leqslant s,\ t \leqslant 1)$ с $\|E_n\| = \frac{1}{2^n}$ и последовательность функций $K_{\varepsilon,n}(s,t)$, определенных соответственно на E_n, вдоль которых они непрерывны.

Пусть E_0 будет квадрат $0 \leqslant s, t \leqslant 1$. Предположим, что множества $E_0, E_1, \ldots, E_n$ уже построены, и построим функцию $K_{\varepsilon,n}(s,t)$ и множество E_{n+1}.

Так как $\|E_n\|$ равно $\frac{1}{2^n}$, то существует на E_n непрерывная функция, не превосходящая по абсолютной величине K_0 и совпадающая с $K(s,t)$ на подмножестве E_n с плоской мерой, превосходящей $\frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Эта функция и будет названа $K_{\varepsilon,n}(s,t)$; характеристическая функция множества, где $K(s,t) \neq K_{\varepsilon,n}(s,t)$, пусть будет $\varphi_n(s,t)$.

Пусть

$$e_n^* = \mathop{\mathcal{E}}_{t}\left[\int_0^1 \varphi_n(s,t)\,ds > \varepsilon\right].$$

Вследствие $|e_n^*| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$ существует множество e_n точек t такое, что

$$e_n^* \subset e_n \quad \text{и} \quad |e_n| \doteq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Положим:

$$E_{n+1} = \mathop{\mathcal{E}}_{(s,t)}(t \in e_n).$$

Итак, E_{n+1} будет множество, составленное из отрезков единичной длины, параллельных оси s.

Построив так последовательность множеств E_n и функций $K_{\varepsilon,n}(s,t)$, мы положим:

$$K_\varepsilon(s,t) = \begin{cases} K_{\varepsilon,n}(s,t) & \text{на } E_n - E_{n+1}, \\ \text{произвольно на } \prod\limits_{n=0}^{\infty} E_n. \end{cases}$$

Так определенная функция $K_\varepsilon(s,t)$ удовлетворяет всем условиям леммы.

Заметим, что, применяя указанный метод, можно доказать теорему в стиле известной теоремы Лузина о «свойстве С», именно:

«Если $K(s,t)$ есть измеримая функция в $(0 \leqslant s, t \leqslant 1)$, то она, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, непрерывна по s на измеримом множестве E, таком, что совокупность линий $t = \mathrm{const}$, пересекающих E по линейному множеству с мерой, меньшей $1-\varepsilon$, имеет меру нуль».

Перейдем теперь к доказательству предложения 2).

Построим для операции $U(x)$ (I) операцию $U_\varepsilon(x)$ с ядром $K_\varepsilon(s,t)$, определенным по лемме. Мы будем тогда иметь $\|U - U_\varepsilon\| \leqslant 2K_0\varepsilon$ и следовательно:

$$\|U^2 - U_\varepsilon^2\| \leqslant 4K_0^2\varepsilon. \tag{3}$$

Операция $U_\varepsilon(x)$ может быть рассматриваема как линейная операция, переводящая L в C. С другой стороны, когда $x \in C$, она может быть рассматриваема, как линейная и вполне непрерывная трансформация пространства C ([3]). В виду того что сходимость в C более сильная, чем сходимость в L, из вышесказанного следует, что операция $U_\varepsilon(x)$, рассматриваемая как линейная трансформация пространства L, имеет вполне непрерывную вторую степень.

Полная непрерывность квадрата исходной операции $U(x)$ следует отсюда в виду оценки (3), согласно известной теореме ([4]).

Методы, изложенные выше, могут быть применены и к изучению класса трансформаций:

$$U(x) = \int_0^s \frac{K(s,t)}{(s-t)^{\frac{m-1}{m}}}\, x(t)\, dt \qquad \begin{array}{l} m \text{ — целое положительное,} \\ \operatorname*{vrai\,max}\limits_{\substack{0 \leqslant s \leqslant 1 \\ 0 \leqslant t \leqslant s}} |K(s,t)| = K_0 < \infty. \end{array} \tag{II}$$

Два предложения имеют место:

1) среди трансформаций (II) есть невполне непрерывные,

2) $(m+1)$-я степень трансформации (II) вполне непрерывна.

Институт математики и механики.
Ленинградский государственный университет.

Поступило
26 XII 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, chap. X (1932). [2] И. Гельфанд, Абстрактные функции и общие формы некоторых линейных и вполне непрерывных линейных операций, Диссертация, Москва (1935). [3] S. Banach, l. c., стр. 98. [4] S. Banach, l. c., стр. 96.