Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 4—5

МАТЕМАТИКА

Б. В. ГНЕДЕНКО

О СХОДИМОСТИ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛАГАЕМЫХ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 17 XII 1937)

Пусть дана последовательность серий случайных величин:

$$x_{n,1}, \quad x_{n,2}, \ldots, x_{n,k_n} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

независимых в каждой серии и «пренебрегаемых в пределе», т. е. таких, что равномерно относительно k $(1 \leqslant k \leqslant k_n)$

$$\lim_{n \to \infty} P\{|x_{n,k}| > \varepsilon\} \to 0$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Законы распределения случайных величин (1) обозначим соответственно через

$$F_{n,1}(x), \quad F_{n,2}(x), \ldots, \quad F_{n,k_n}(x).$$

Для характеристической функции закона $F_{n,k}(x)$ введем обозначение:

$$f_{n,k}(t) = \rho_{n,k}(t)\, e^{i\omega_{n,k}(t)},$$

где $\rho_{n,k}(t)$ и $\omega_{n,k}(t)$ действительны, $-\pi \leqslant \omega_{n,k}(t) < \pi$.

Очевидно, что $\rho_{n,k}(0) = 1$ и $\omega_{n,k}(0) = 0$. В силу предельной пренебрегаемости $x_{n,k}$

$$\rho_{n,k}(t) \to 1, \quad \omega_{n,k}(t) \to 0 \qquad \text{при } n \to \infty$$

равномерно относительно $k\,(1 \leqslant k \leqslant k_n)$ и t в любом конечном интервале $(|t| \leqslant T)$.

Можно доказать следующую теорему.

Теорема I. *Для того чтобы последовательность законов распределения $F_n(x)$ сумм:*

$$s_n = x_{n,1} + x_{n,2} + \ldots + x_{n,k_n} \tag{2}$$

при $n \to \infty$ сходилась к предельному закону $\Phi(x)$, необходимо и достаточно, чтобы к предельному закону сходились безгранично-делимые законы $\Phi_n(x)$, определенные посредством логарифмов своих характеристических функций:

$$\lg \varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ it\omega_{n,k}(1) + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\, dF_{n,k}(x + \omega_{n,k}(1)) \right\}.$$

Предельные законы для обеих последовательностей совпадают.

Аналогичная теорема в предположении ограниченности квадратических уклонений для сумм была доказана Г. М. Бавли [1]. Теорема I позволяет в теории предельных законов для сумм независимых случайных величин ограничиться рассмотрением безгранично-делимых законов. Гипотеза о возможности приближения сумм предельно-пренебрегаемых слагаемых безгранично-делимыми величинами неоднократно высказывалась А. Н. Колмогоровым.

В качестве следствия из теоремы I вытекает следующий результат А. Я. Хинчина [2].

Класс предельных законов для сумм (2) пренебрегаемых в пределе независимых случайных величин совпадает с классом безгранично-делимых законов.

Известно, что для того, чтобы закон $\Phi(x)$ был безгранично-делимым, необходимо и достаточно, чтобы логарифм его характеристической функции был представим формулой П. Леви:

$$\lg \varphi(t) = i\gamma t + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ e^{iut} - 1 - \frac{iut}{1+u^2} \right\} \frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u),$$

где γ—постоянная, а $G(u)$ — неубывающая, ограниченная функция.

Относительно сходимости последовательности безгранично-делимых законов распределения имеет место следующая теорема.

Теорема II. *Для сходимости последовательности $\{\Phi_n(x)\}$ безгранично-делимых законов к предельному $\Phi(x)$ необходимо и достаточно, чтобы при $n \to \infty$:*

1) $G_n(u) \to G(u)$ *в каждой точке непрерывности* $G(u)$;

2) $\underset{-\infty<u<+\infty}{\operatorname{var}} G_n(u) \to \underset{-\infty<u<+\infty}{\operatorname{var}} G(u)$;

3) $\gamma_n \to \gamma$,

где γ, γ_n, $G(u)$, $G_n(u)$ *определяются по формуле П. Леви для законов* $\Phi(x)$ *и* $\varphi_n(x)$.

В качестве приложения теорем I и II найдем необходимые и достаточные условия для сходимости законов распределения сумм (2) к закону Гаусса.

В силу теоремы Крамера [3] можно ограничиться рассмотрением симметрично распределенных слагаемых $x_{n,k}$. Согласно теореме I исследование условий, при которых

$$F_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

сводится к изучению условий, при которых

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos xt - 1)\, dF_{n,k}(x) \to -\frac{t^2}{2} \ (n \to \infty).$$

По теореме II для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{x} \frac{u^2}{1+u^2}\, dF_{n,k}(x) \underset{n\to\infty}{\to} G(x) = \begin{cases} 0 & (x<0) \\ 1 & (x>0) \end{cases}$$

и

$$G_n(+\infty) \to 1 \ (n \to \infty).$$

Эти условия эквивалентны двум следующим:

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{n,k}(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0, \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{n,k}(x) \underset{n\to\infty}{\to} 1 \tag{4}$$

при любом $\varepsilon > 0$.

На основании неравенства $\frac{u^2}{1+u^2} > \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}$, справедливого для $u > \varepsilon$, заключаем, что соотношение (3) эквивалентно

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|>\varepsilon} dF_{n,k}(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{5}$$

В силу очевидного равенства

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{n,k}(x) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{n,k}(x) - \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} \frac{x^4}{1+x^2} dF_{n,k}(x)$$

и соотношения (5) заключаем, что (4) эквивалентно соотношению

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{n,k}(x) \underset{n\to\infty}{\to} 1. \tag{6}$$

Соотношения (5) и (6) являются легким обобщением условий Феллера [4] для сходимости законов распределения сумм:

$$s_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{B_n} - A_n,$$

n первых членов последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ независимых случайных величин при соответственном выборе постоянных $B_n > 0$ и A_n к закону Гаусса.

Аналогичными рассуждениями можно доказать, что для сходимости законов распределения сумм (2) к закону Пуассона $P(x) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant x} \frac{e^{-1}}{k!}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) $\sum_{k=1}^{k_n} \int_{x>1+\varepsilon} dF_{n,k}(x) \to 0, \quad n \to \infty;$

2) $\sum_{k=1}^{k_n} \int_{x<1+\varepsilon} dF_{n,k}(x) \to 0, \quad n \to \infty;$

3) $\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x-1|<\varepsilon} dF_{n,k}(x) \to 2, \quad n \to \infty;$

4) $\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<1-\varepsilon} x\,dF_{n,k}(x) \to 0, \quad n \to \infty;$

5) $\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<1-\varepsilon} x^2 dF_{n,k}(x) \to 0, \quad n \to \infty,$

при любом $\varepsilon > 0$. В качестве следствия из теорем I и II мы получаем следующую теорему.

Теорема III. *Для того чтобы законы распределения сумм* (2) *сходились к некоторому предельному закону, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция* $G(u)$ *и константа* γ, *что*

$$1)\quad \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{n} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{n,k}[x+\omega_{n,k}(1)] \underset{n\to\infty}{\to} G(u)$$

в каждой точке непрерывности $G(u)$,

$$2)\quad G(-\infty)=0,\quad G(+\infty)=\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{n,k}[x+\omega_{n,k}(1)] < +\infty,$$

$$3)\quad \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \omega_{n,k}(1) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{n,k}(x+\omega_{n,k}(1)) \right\} \underset{n\to\infty}{\to} \gamma.$$

При этом логарифм характеристической функции предельного закона дается формулой:

$$\lg\varphi(t) = i\gamma t + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ e^{iut} - 1 - \frac{iut}{1+u^2} \right\} \frac{1+u^2}{u^2} dG(u),$$

в которой постоянное γ *и функция* $G(u)$ *определены условиями* 3) и 1) *этой теоремы.*

Теоремы I—III можно также использовать для вывода условий применимости закона больших чисел.

Математический институт.
Московский государственный университет.

Поступило
20 XII 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. М. Бавли, Математ. сборн., **1 (43)**, 917—930 (1936). [2] А. Я. Хинчин, Математ. сборн., **2 (44)**, 79—119 (1937). [3] H. Cramer, Math. ZS., **41**, 401—414 (1936). [4] W. Feller, Math. ZS., **40**, 521—559 (1935).