

Н. В. АДАМОВ

**ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ**

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 11 XII 1937)

1. Если дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y), \quad (1)$$

где  $f(x, y)$  — функция  $x$  и  $y$ , непрерывная в области  $G (a \leq x \leq b, c \leq y \leq d)$ , допускающая в этой области непрерывную производную по  $y$ , метод последовательных приближений Пикара позволяет установить существование и единственность решений уравнения (1). Эти решения являются непрерывными функциями параметра  $y_0$  — значения, принимаемого интегралом уравнения (1) при  $x = a$ , имеющими непрерывную производную по  $y_0$ . Для последовательных приближений обычно употребляют оператор

$$A[y] = y_0 + \int_a^x f(x, y) dx.$$

Применение этого оператора требует, вообще говоря, сокращения интервала значений  $x$ ; для существования и сходимости последовательности функций

$$y_1 = A[y_0], \quad y_2 = A[y_1], \dots$$

приходится рассматривать их в интервале  $a \leq x \leq a_1 < b$ .

Поставим задачу: найти оператор  $A[y]$  так, что: 1) нахождение функции по условию

$$y = A[y]$$

эквивалентно решению дифференциального уравнения (1); 2) оператор  $A[y]$  применим к функции  $y$  на всем интервале  $a \leq x \leq b$  по крайней мере в некоторых случаях; 3) если кривые

$$y = \varphi(x, y_0)$$

образуют поле в области  $G$ , т. е. две разные кривые семейства не пересекаются, то и кривые

$$y = A[\varphi(x, y_0)]$$

образуют поле; 4) оператор  $A[y]$  непрерывен, т. е., имея функцию  $y(x)$  такую, что кривые

$$y = y(x) \quad \text{и} \quad y = A[y(x)]$$

принадлежат области  $G$  для  $a \leq x \leq b$ , и взяв произвольное положительное число  $\varepsilon$ , можно найти положительное число  $\delta$ , так что из неравенства

$$|y(x) - \bar{y}(x)| < \delta$$

следует неравенство

$$|A[y(x)] - A[\bar{y}(x)]| < \varepsilon.$$

2. Докажем, что, имея уравнение (1), можно найти оператор  $A[y(x)]$ , удовлетворяющий условиям 1), 2), 3) и 4) предыдущего параграфа. Ищем этот оператор в форме:

$$A[y(x)] = y(x) + \int_a^x (Y dx - X dy),$$

где  $X$  и  $Y$  — две функции  $x$  и  $y$  такие, что

$$Y = X f(x, y);$$

функцию  $X$  можно предположить положительной, условие 1) тогда удовлетворяется: равенство

$$y(x) = A[y(x)]$$

может быть справедливым для всех  $x$  только в случае

$$Y dx - X dy = 0,$$

что равносильно

$$y' = f(x, y) = 0.$$

Если функция  $y(x)$  удовлетворяет для  $a \leq x \leq b$  неравенству

$$c < y(x) < d,$$

умножая  $Y$  и  $X$  на постоянный множитель, который можно взять настолько малым, что абсолютная величина интеграла  $\int_a^x (Y dx - X dy)$  будет сколь угодно мала, мы можем достичь того, что кривая  $y = A[y(x)]$  будет принадлежать области  $G$ .

Условимся говорить, что оператор  $A$  имеет смысл для функции  $y(x)$ , если интеграл  $\int_a^x (Y dx - X dy)$  существует для любого  $x$  в интервале  $(a, b)$  и кривая  $y = A[y(x)]$  расположена в области  $G$  для  $a \leq x \leq b$ .

Теперь следует удовлетворить условию 3). Назовем семейством  $C$  семейство функций  $y(x, y_0)$ , зависящих от параметра  $y_0$ , допускающих первые производные по  $x$  и по  $y_0$  и таких, что производная  $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y_0}$  существует во всей области  $G$ . Для соблюдения условия 3) по отношению к семейству вида  $C$  требуется, чтобы неравенство

$$\frac{\partial y}{\partial y_0} > 0$$

влекло за собой неравенство

$$\frac{\partial}{\partial y_0} A[y(x, y_0)] > 0.$$

Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial y_0} A[y(x, y_0)] = \frac{\partial y}{\partial y_0} + \int_a^x \left( \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y_0} - X \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y_0} \right) dx;$$

интегрируя по частям последнее слагаемое под знаком интеграла, получим:

$$\frac{\partial}{\partial y_0} A[y(x, y_0)] = \frac{\partial y}{\partial y_0} (1 - X) + \left( X \frac{\partial y}{\partial y_0} \right)_{x=a} + \int_a^x \frac{\partial y}{\partial y_0} \left( \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial x} \right) dx.$$

Мы видим теперь, что если функция  $X$  удовлетворяет условиям:

$$X > 0, (2); \quad X < 1, (2'); \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} > 0, (2''),$$

то неравенство  $\frac{\partial Y}{\partial y_0} > 0$  влечет за собой неравенство:

$$\frac{\partial}{\partial Y_0} (A[y(x, y_0)]) > 0,$$

чем и обеспечивается выполнение условия 3) предыдущего параграфа для семейства вида  $C$ . Функцию  $X$  можно взять в виде  $X = \varphi(x)$ , тогда неравенство (2'') сводится к

$$[\varphi'(x) + \varphi(x) \frac{\partial f}{\partial y}] > 0;$$

считая функцию  $\varphi(x)$  положительной, имеем:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} > - \frac{\partial f}{\partial y},$$

и, так как производная  $\frac{\partial f}{\partial y}$  ограничена:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| < M,$$

можно взять

$$\varphi(x) = h e^{M(x-a)},$$

и неравенство удовлетворено. Неравенства (2) и (2') удовлетворяются при соответствующем подборе постоянной  $h > 0$ .

Теперь легко доказать, что оператор  $A$  удовлетворяет условию 3) по отношению к любому семейству функций  $y(x, y_0)$  таких, что кривые  $y = y(x, y_0)$  образуют поле  $D$  в области  $G$  и оператор  $A$  имеет смысл для функций этого семейства. Возьмем две кривые из поля

$$y = y(x, y_0') \quad \text{и} \quad y = y(x, y_0'') \quad (y_0' > y_0'').$$

Кривые  $y = A[y(x, y_0')]$  и  $y = A[y(x, y_0'')]$  не пересекаются; образуем вспомогательное поле кривых

$$y = y(x, y_0'') + \frac{y_0' - y_0''}{y_0' - y_0''} (y(x, y_0') - y(x, y_0'')).$$

Это поле  $D'$  удовлетворяет тем же условиям, что и поле  $C$ , о котором только что шла речь. Оператор  $A$  имеет смысл для всех кривых этого поля и преобразует это поле в поле же. Две кривые этого нового поля, соответствующие значениям параметра  $y_0'$  и  $y_0''$ , т. е. кривые  $y = A[y(x, y_0')]$  и  $y = A[y(x, y_0'')]$ , не могут пересекаться. Так как эти кривые взяты из поля  $D$  совершенно произвольно, то оператор  $A$  преобразует поле  $D$  в поле же.

Для доказательства непрерывности оператора  $A$  представим разность  $A[y] - A[\bar{y}]$  в виде:

$$y - \bar{y} + \int_a^x (Y(x, y) - Y(x, \bar{y})) dx - (Xy - X\bar{y})_a^x + \int_a^x \frac{dX}{dx} (y - \bar{y}) dx.$$

Непрерывность оператора следует теперь из непрерывности функций  $Y(x, y)$ ,  $X(x)$ ,  $\frac{dX}{dx}$ .

Если существует интеграл  $\bar{y}(x)$  уравнения (1), обращающийся в  $y_0$  при  $x = a$  и такой, что кривая  $y = \bar{y}(x)$  расположена в области  $G$  для  $a \leq x \leq b$ , и если оператор  $A$  имеет смысл для функций

$$y_0(x), y_1(x) = A[y_0(x)], y_2 = A[y_1(x)], \dots,$$

где  $y_0(x)$  — функция, принимающая при  $x = a$  значение  $y_0$ , то последовательность функций  $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \dots$  сходится равномерно к интегралу  $\bar{y}(x)$ . Действительно, вычисление показывает, что для  $n$  целого положительного:

$$|y_n(x) - \bar{y}(x)| < M \left[ (1 - k)^n + n(1 - k)^{n-1} Bl(x - a) + C_n^2 (1 - k)^{n-2} \frac{[Bl(x - a)]^2}{2!} + \dots + \frac{[Bl(x - a)]^n}{n!} \right], \quad (3)$$

где  $k$  и  $l$  — два числа такие, что

$$k \leq X \leq l \leq 1$$

и

$$|y_0(x) - \bar{y}(x)| < M; \quad \left| 2 \frac{\partial f}{\partial y} \right| < B$$

(эти числа существуют, см. выше). Пусть  $h$  — число положительное и меньшее, чем  $\frac{k}{2}$ . Найдем целое число  $m$  так, что

$$\frac{(Bl(x - a))^p}{p!} < h^p$$

для  $p > m$ . Правая часть неравенства (3) состоит из двух слагаемых, из которых первое есть

$$M \left( (1 - k)^n + n(1 - k)^{n-1} Bl(x - a) + \dots + C_n^m (1 - k)^{n-m} \frac{(Bl(x - a))^m}{m!} \right);$$

число  $k$  менее единицы, следовательно каждое слагаемое в только что написанной сумме стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Второе слагаемое в правой части неравенства

$$C_n^{m+1} (1 - k)^{n-m-1} \frac{(Bl(x - a))^{m+1}}{m+1!} + \dots + \frac{(Bl(x - a))^n}{n!} < \left( 1 - \frac{k}{2} \right)^n$$

тоже стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , чем и доказывается требуемое.

3. Следующие теоремы дают некоторые свойства последовательных приближений рассматриваемого типа.

**Теорема I.** Если начальная функция  $y_0(x)$  больше некоторого интеграла  $\bar{y}(x)$  уравнения (1) для всех значений  $x$  ( $a \leq x \leq b$ ), любая из функций:

$$y_1(x) = A[y_0(x)], y_2(x) = A[y_1(x)], \dots$$

тоже больше  $\bar{y}(x)$  для всех значений  $x$  ( $a \leq x \leq b$ ).

Достаточно очевидно доказать наше положение для первого приближения. Образует вспомогательное поле [предполагается конечно, что кривые  $y = y_0(x)$  и  $y = \bar{y}(x)$  принадлежат области  $G$  и оператор  $A$  имеет смысл для функции  $y_0(x)$ ]:

$$y = \bar{y}(x) + \frac{y_0 - \beta}{\alpha - \beta} (y_0(x) - \bar{y}(x)),$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — значения функций  $y_0, \bar{y}$  для  $x = a$ . Это поле применением оператора  $A$  преобразуется в поле же, и кривая поля  $y = \bar{y}(x)$  остается неизменной. Ни одна из кривых этого нового поля не пересекает кривую  $y = \bar{y}(x)$ . Это относится и к кривой  $y = y_1(x)$ , что и доказывает теорему.

**Примечание.** Теорема сохраняет силу, если

$$y_0(x) > y(x) \quad (x > a); \quad y_0(a) = \bar{y}(a).$$

Это доказывается рассмотрением поля кривых, содержащего кривую

$$y = \bar{y}(x) - \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — произвольно малое положительное число. Мы опускаем за недостатком места доказательство, так же как и доказательства следующих теорем.

**Теорема II.** Если оператор  $A$  имеет смысл для функций:

$$y_0(x), \quad y_1(x) = A[y_0(x)], \quad y_2 = A[y_1(x)], \dots,$$

и если

$$y_0(x) > y_1(x) \quad (a < x \leq b),$$

то и

$$y_1(x) > y_2(x) > y_3(x) > \dots,$$

т. е. последовательные приближения в этом случае образуют монотонную последовательность.

**Теорема III.** Если 1) уравнение (1) имеет интеграл  $\bar{y}(x)$  такой, что соответствующая интегральная кривая принадлежит области  $G$  для  $a \leq x \leq b$ ; 2) оператор  $A$  имеет смысл для функции  $y_0(x)$ ; 3) кривые  $y = y_0(x)$  и  $y = A[y_0(x)]$  лежат в области  $G$  и не имеют общей точки, отличной от начальной точки, то интегральная кривая  $y = \bar{y}(x)$  не имеет общей точки с кривой  $y = y_0(x)$  кроме начальной точки.

Метод доказательства тот же — образование вспомогательных полей.

Государственный университет.  
Свердловск.

Поступило  
16 XII 1937.