Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 3

МЕХАНИКА

В. В. СТЕПАНОВ

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ВЕРОЯТНОСТИ УСТОЙЧИВОСТИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 11 XII 1937)

Н. Д. Моисеев ввел в двух работах ([1], [2]) определение вероятности устойчивости. Это естественное расширение понятия устойчивости по Ляпунову, как указывает сам автор в первой работе, имеет существенный интерес по следующей причине: если в окрестности точки равновесия динамической системы существует только одно движение, не остающееся для $0 \leqslant t < \infty$ в произвольно малой окрестности этой точки, то по Ляпунову эта точка неустойчива; между тем при случайных возмущениях начальных данных в таком случае весьма невероятно, чтобы возмущенное движение совпало именно с этим исключительным. Таким образом практически следует рассматривать в этом случае положение равновесия как устойчивое.

Данное автором определение числа, характеризующего вероятность устойчивости, достаточно сложно, поэтому я намерен дать здесь почти эквивалентное определение, которое по моему мнению значительно проще.

1. Мы рассматриваем систему

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad s = 1, 2, \ldots n,$$

причем $X_s(0, 0, \ldots, 0) = 0$, функции X_s непрерывны в окрестности U начала координат O и таковы, что в этой окрестности начальная точка $P(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ определяет единственное решение системы $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\ldots, x_n(t)$ или, короче, $f(P, t)$.

Такое решение $f(P, t)$ мы называем движением и рассматриваем его для значений $t \geqslant 0$. Введем еще обозначение:

$$\sup_{0 \leqslant t < \infty} \rho(f(P, t), O) = \overline{R}(P).$$

Вероятность устойчивости тривиального решения

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

мы определяем следующим образом.

Строим около точки O два шара радиусов r и R, $S(r)$ и $S(R)$; $r < R$, $S(R) \subset U$.

Обозначаем через $E(R, r)$ множество точек $P \in S(r)$, для которых $\overline{R}(P) < R$. (Движения, для которых $\overline{R}(P) < R$, мы будем называть R-устойчивыми.) Средняя плотность множества $E(R, r)$ в $S(r)$ есть

$$\frac{\mathfrak{M}\, E(R, r)}{\mathfrak{M}\, S(r)}, \tag{1}$$

где $\mathfrak{M}$ обозначает лебегову n-мерную меру.

Обозначаем

$$\lim_{r\to 0}\frac{\mathfrak{M}E(R,r)}{\mathfrak{M}S(r)}=PS(R), \tag{2}$$

предполагая, что этот предел существует для всякого достаточно малого R.

Величина (2) характеризует вероятность R-устойчивости в точке O.

Так как числитель в выражении (1) есть неубывающая функция от R, то при условии существования (2) всегда существует

$$\lim_{R\to 0}PS(R)=PS. \tag{3}$$

Величину (3) *мы будем называть вероятностью устойчивости невозмущенного* (тривиального) *решения.*

Примечание. Вместо шара $S(r)$ и множества $E(R,r)$ мы можем брать их общие части с некоторым измеримым множеством M. Тогда вместо выражений (2), (3) следует рассматривать:

$$\lim_{r\to 0}\frac{\mathfrak{M}(E(R,r)\cdot M)}{\mathfrak{M}(S(r)\cdot M)}=PS_M(R), \tag{2'}$$

$$\lim_{R\to 0}PS_M(R)=PS_M \tag{3'}$$

[в предположении, что знаменатель в (2′) неравен нулю].

Величину (3′) мы будем называть *относительной вероятностью устойчивости по отношению к множеству* M. Это замечание пригодится нам в дальнейшем.

2. Сравним наше определение с тем, которое дано Н. Д. Моисеевым ([2]). Он рассматривает множества M, имеющие O в качестве предельной точки, и вводит величину

$$\sup_{P\subset M\cdot S(r)}\overline{\overline{R}}(P)=\overline{\overline{R}}(r,M).$$

Если

$$\lim_{r\to 0}\overline{\overline{R}}(r,M)=0, \tag{S}$$

то множество M принадлежит S-классу (устойчивому) и обозначается MS.

Покажем, что если $\mathfrak{M}(MS\cdot S(r))>0$ для всякого $r>0$, то относительная вероятность устойчивости $PS_{MS}=1$. Из определения (S) следует, что для данного $R>0$ найдется такое $\delta(R)$, что при $r<\delta(R)$ имеем:

$$\overline{\overline{R}}(r,MS)<R,$$

т. е. множества $E(R,r)\cdot MS$ и $S(r)\cdot MS$ тождественны. А отсюда в силу (2) и (3) следует:

$$PS_{MS}=1.$$

Если множество MS имеет в точке O определенную плотность d, т. е.

$$\lim_{r\to 0}\frac{\mathfrak{M}(MS\cdot S(r))}{\mathfrak{M}S(r)}=d,$$

то из формул (2) и (3) получаем:

$$\lim_{R\to 0}\lim_{r\to 0}\frac{\mathfrak{M}(E(R,r)\cdot MS)}{\mathfrak{M}S(r)}=d,$$

т. е. *множество MS привносит в PS величину вероятности d*. Далее, Н. Д. Моисеев называет множество M множеством типа I (неустойчивое), если для него предельное соотношение (S) не имеет места. Среди множеств типа I особую роль играют неприводимые MI, т. е. такие, которые не содержат подмножества типа S. Рассмотрим структуру неприводимого MI. Берем последовательность.

$$R_1 > R_2 > \ldots > R_k > \ldots, \lim_{k \to \infty} R_k = 0.$$

Обозначим через M_k множество точек $P \in MI$, для которых $\overline{R}(P) > R_k$. Очевидно

$$M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_k \subset \ldots \subset MI.$$

Я утверждаю, что найдутся такие N и $r_0 > 0$, что множества $M_N \cdot S(r_0)$ и $MI \cdot S(r_0)$ тождественны.

Допустим обратное, тогда найдется точка P_1 такая, что $\rho(O, P_1) < r_1 = \frac{R_1}{2}$ и $\overline{R}(P) < R_1$. Вообще пусть $R_{n_k} < r_{k-1}$, определим $r_k = \frac{1}{2} R_{n_k}$; в силу непустоты множества $S(r_k) \cdot (MI - M_{n_k})$ найдется точка $P_k \in S(r_k)$, для которой $\overline{R}(P_k) < R_{n_k}$.

Множество $\Sigma = \{P_k\}$ имеет O предельной точкой и обладает тем свойством, что $\lim\limits_{r \to 0} \overline{R}(r, \Sigma) = 0$, т. е. $\Sigma \subset MI$ есть множество типа S, что противоречит неприводимости MI.

Отсюда следует: для всякого неприводимого MI найдутся такие $r_0 > 0$ и $R_0 > 0$, что $\overline{R}(P) > R_0$ для $P \in S(r_0) \cdot MI$.

Таким образом $E(R_0, r_0) \cdot MI = 0$, и из (2') и (3'), если $\mathfrak{M}(S(r) \cdot MI) > 0$ для $r > 0$, мы имеем:

$$PS_{MS} = 0.$$

Таким образом неприводимое MI ничего не вносит в значение вероятности устойчивости PS.

После этих замечаний легко показать, что во всех многочисленных случаях, для которых Н. Д. Моисеев [(2), стр. 515—519] определяет вероятность устойчивости, он получает то значение, которое дается нашими формулами (2) и (3). В самом деле, эти случаи сводятся к определению плотности некоторого множества MS (или MS^*, см. ниже) в точке O. При этом или

$$S(r) = MS + MI \tag{A}$$

или

$$S(r) = MS^* + MI^*, \tag{B}$$

где множества MS^* и MI^* аппроксимируются множествами типов MS и MI равномерно относительно средней плотности; наконец возможны случаи, когда разбиения (A) и (B) сферы $S(r)$ совершаются с точностью до множества плотности нуль в точке O.

Во всех этих случаях значение вероятности устойчивости даются нашими формулами (2) и (3), причем соответствующие пределы существуют.

Институт математики.
Московский государственный университет.

Поступило
16 XII 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Д. Моисеев, ДАН, I, 5 (1936). [2] N. Moisseiev, Math. ZS., **42**, 513—537 (1937).