Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 9

МАТЕМАТИКА

И. Н. ХЛОДОВСКИЙ

ПОЧТИ АБСОЛЮТНО МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 24 X 1939)

1. Акад. С. Н. Бернштейн (1) изучил основные свойства абсолютно монотонных функций. При изучении акад. С. Н. Бернштейн исходил из классического определения абсолютно монотонной функции, т. е. такой функции, все конечные разности которой не отрицательны. Это определение может быть заменено эквивалентным определением, допускающим естественное обобщение и значительно сокращающим доказательство многих теорем теории абсолютно монотонных функций.

Результаты, полученные Hausdorff'ом (2) по теории моментов, позволяют определить абсолютно монотонную функцию следующим образом.

Определение 1. *Функцию $f(x)$ назовем абсолютно монотонной в сегменте $[a, b]$, если произвольная последовательность значений*

$$f(x_0),\ f(x_1),\ \ldots,\ f(x_n), \tag{1}$$

где $b \geqslant x_0$, $x_n \geqslant a$, $x_k - x_{k+1} = \delta > 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$, будет последовательностью моментов неубывающей в сегменте $[0, 1]$ функции $\omega(x)$, т. е. если

$$f(x_k) = \int_0^1 x^k\, d\omega(x) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Это определение естественно обобщается.

Определение 2. *Функцию $F(x)$ назовем почти абсолютно монотонной в сегменте $[a, b]$, если произвольная последовательность ее значений* (1) *будет последовательностью моментов неубывающей функции, определенной в сегменте $[0, l(\delta)]$ [допускается $l(\delta) = \infty$].*

В частности $F(x)$ будет почти абсолютно монотонной на полупрямой $-\infty < x \leqslant 0$, если последовательность значений $\{F(\alpha + k\delta)\}_{n=0}$ $\alpha \leqslant 0, \delta < 0$ будет последовательностью моментов неубывающей в сегменте $[0, l(\delta, \alpha)]$ функции.

2. Классические методы Stieltjes'a (3) и методы функционального анализа, основоположником которого является Riesz (4), позволяют доказать следующие свойства почти абсолютно монотонных функций. В настоящей работе ограничимся рассмотрением почти абсолютно монотонных функций, определенных на полупрямой $x \leqslant 0$.

Прежде всего заметим, что изучаемому классу функций может быть дано следующее определение, эквивалентное определению 2 и являющееся обобщением классического определения.

Определение 3. $F(x)$ *назовем почти абсолютно монотонной в* $(-\infty, 0)$, *если для произвольных отрицательных чисел* α *и* δ *и целого* N *существует положительное число* β, *вообще говоря, зависящее от* α, δ *и* N *и такое, что все обобщенные конечные разности*

$$\underset{\beta}{\Delta^n} F(\alpha) = F(\alpha) - \binom{n}{1}\frac{1}{\beta}F(\alpha+\delta) + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}\frac{1}{\beta^n}F(\alpha+n\delta),$$

где $n = N-k$ *и* $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, *будут неотрицательными.*

Заметим, что определение 3 легко может быть перефразировано в новый необходимый и достаточный критерий того, чтобы последовательность чисел $\{c_k\}$ была последовательностью моментов неубывающей в $(0, \infty)$ функции.

3. Обозначим символом $\Phi(x)$ почти абсолютно монотонную функцию в $(-\infty, 0)$. Для $\Phi(x)$ имеют место следующие теоремы:

1°. $\Phi(x)$—*аналитическая функция в полуплоскости* $R(x) < 0$. $\Phi(x)$ *единственным образом может быть представлена в виде*

$$\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{xt}\, d\omega(t),$$

где $\omega(t)$—*неубывающая функция, нормированная условиями*:

$$\omega(-\infty) = 0, \quad \omega(x) = \frac{1}{2}[\omega(x-0)+\omega(x+0)].$$

2°. *Если некоторая последовательность значений* $\{\Phi(\alpha+k\delta)\}$ *будет последовательностью моментов неубывающей в конечном сегменте* $[0, l(\alpha,\delta)]$ *функции, тогда при любом фиксированном* $x < 0$ *и произвольном отрицательном* δ *последовательность* $\{\Phi(x+k\delta)\}$ *будет последовательностью моментов в конечном интервале.*

3°. *Порядком* $\Phi(x)$ *назовем длину наименьшего интервала* $(0, \beta)$, *в котором последовательность* $\{\Phi(-k)\}$ *будет последовательностью моментов неубывающей функции. Для того чтобы* $\Phi(x)$ *была конечного порядка* β, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Phi(nx)}{\Phi(n+1x)} = \beta^{-x}.$$

Если $\Phi(x)$ *будет порядка* β, *тогда*

$$\Phi(x) = \beta^{-x} f(x),$$

где $f(x)$ *абсолютно монотонна при* $-\infty < x \leqslant 0$.

4°. *Все детерминанты Hankel'я* $|\Phi(k\delta)|_0^n$, $|\Phi(k\delta)|_{k=1}^n$ *не отрицательны. Если первым обратится в нуль детерминант вида* $|\Phi(k\delta)|_0^n$, *тогда*

$$\Phi(x) = \alpha_1\lambda_1^{-x} + \alpha_2\lambda_2^{-x} + \ldots + \alpha_n\lambda_n^{-x},$$

где $\alpha_k > 0$ *и* $\lambda_k > 0$. *Если же первым обратится в нуль детерминант вида* $|\Phi(k\delta)|_1^n$, *тогда*

$$\Phi(x) = \int\limits_0^{\beta} t^{-x}\, ds(t),$$

где $s(t)$ — *ступенчатая функция с конечным числом точек разрыва и разрывная при* $x = 0$.

5°. *Для того чтобы* $\Phi(x)$ *определялась конечным числом значений, необходимо и достаточно, чтобы*

$$|\Phi(k\delta)|_0^n > 0 \quad 2n-1 \leqslant m < N \quad |\Phi(k\delta)|_1^n > 0 \quad 2n \leqslant m < N,$$
$$|\Phi(k\delta)|_0^n = 0 \quad m < 2n-1 \leqslant N \quad |\Phi(k\delta)|_1^n = 0 \quad m < 2n \leqslant N.$$

Например 2^{-x} единственная, почти абсолютно монотонная в $(-\infty, 0)$, определяемая двумя значениями $\Phi(0)=1$ и $\Phi(-1)=2$.

6°. *Все почти абсолютно монотонные* $\Phi(x)$, *принимающие в точках* $x=k\delta$ *заданные значения* $\{\Phi(k\delta)\}$, *ограничены двумя почти абсолютно монотонными функциями* $f_\delta(x)$ *и* $\varphi_\delta(x)$ *следующим образом*:

$$\Phi(k\delta)=f_\delta(k\delta)=\varphi_\delta(k\delta) \quad (k=0, 1, 2, \ldots),$$
$$f_\delta(x)\leqslant\Phi(x)\leqslant\varphi_\delta(x), \text{ если } 2k\delta<x<2\overline{k+1}\,\delta,$$
$$\varphi_\delta(x)\leqslant\Phi(x)\leqslant f_\delta(x), \text{ если } 2\overline{k+1}\delta<x<2k\delta.$$

7°. *Если* $\Phi(x)$ *непрерывна слева в точке* $x=0$, *то последовательность значений* $\{\Phi(k\delta)\}$ *однозначно определяет* $\Phi(x)$ *тогда и только тогда, если*

$$\rho(\delta)=\lim_{n\to\infty}\frac{|\Phi(k\delta)|_1^n}{|\Phi(k\delta)|_2^n}=0.$$

Если же $\Phi(x)$ *разрывна слева при* $x=0$, *то для того, чтобы последовательность ее значений* $\{\Phi(k\delta)\}$ *однозначно определяла* $\Phi(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$r(\delta)=\lim_{n\to\infty}\frac{|\Phi(k\delta)|_1^n}{\begin{vmatrix} 0 & \Phi(0) & \ldots & \Phi(\overline{n-1}\delta) \\ \Phi(0) & \Phi(\delta) & \ldots & \Phi(n\delta) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Phi(\overline{n-1}\delta) & \Phi(n\delta) & \ldots & \Phi(\overline{2n-1}\delta) \end{vmatrix}}=0.$$

8°. Действительное число δ назовем *интерполяционным числом* функции $\Phi(x)$, если последовательность значений $\{\Phi(k\delta)\}$ однозначно определяет $\Phi(x)$.

Если δ*—интерполяционное число* $\Phi(x)$, *тогда произвольное отрицательное число* $\delta^1>\delta\,(|\delta|>|\delta^1|)$ *будет также интерполяционным числом* $\Phi(x)$.

9°. *Последовательность чисел* $\{\Phi^{(k)}(\alpha)\}$, *где* $\alpha<0$, *будет последовательностью моментов неубывающей при* $-\infty<x<\infty$ *функции, если порядок* $\Phi(x)$ *будет* >1, *и последовательностью моментов неубывающей при* $0\leqslant x<\infty$ *функции, если порядок* $\Phi(x)$ *меньше или равен* 1.

Заметим, что теорема 9 позволяет установить закон двойственности, по которому каждой теореме, высказанной относительно значений $\{\Phi(k\delta)\}$, соответствует теорема, высказанная относительно последовательности значений производных $\{f^{(k)}(0)\}$ абсолютно монотонной функции.

В частности таким образом могут быть получены все теоремы акад. С. Н. Бернштейна, изложенные в первой главе цитированной выше работы. Приведем следующий пример применения закона двойственности, приводящий к результату, в явном виде не содержащемуся в работе акад. С. Н. Бернштейна.

Почти абсолютно монотонную функцию

$$\Phi(x)=\int_0^\infty t^{-x}\,d\omega(t) \quad (x\leqslant 0)$$

назовем сопряженной с абсолютно монотонной

$$f(x)=\int_0^\infty e^{xt}\,d\omega(t) \quad (x\leqslant 0).$$

Абсолютно монотонная $f(x)$ при $x \leqslant 0$ имеет сопряженную тогда и только тогда, когда $f(x)$ имеет все производные при $x=0$. Нетрудно видеть, что

$$f^{(k)}(0)=\Phi(-k) \quad (k=0, 1, \ldots).$$

Обращение теоремы 7° приводит к теореме

10°. *Для того чтобы абсолютно монотонная* $f(x)$ *при* $x \leqslant 0$ *однозначно определялась последовательностью*

$$f(0),\ f^{\alpha}(0),\ f^{2\alpha}(0), \ldots,\ f^{n\alpha}(0), \ldots,$$

где α*—произвольное целое положительное число, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|f^{(k\alpha)}(0)|_1^n}{|f^{(k\alpha)}(0)|_2^n}=0,$$

если сопряженная $\Phi(x)$ непрерывна при $x=0$, или чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|f^{(k\alpha)}(0)|_1^n}{\begin{vmatrix} 0 & f^{(\alpha)}(0) & \ldots & f^{(\overline{n-1}\alpha)}(0) \\ f^{(\alpha)}(0) & f^{(2\alpha)}(0) & \ldots & f^{(n\alpha)}(0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f^{(\overline{n-1}\alpha)}(0) & f^{(n\alpha)}(0) & \ldots & f^{(\overline{2n-1}\alpha)}(0) \end{vmatrix}}=0,$$

если $\Phi(x)$ разрывна в точке $x=0$.

Химико-технологический институт
им. Д. И. Менделеева

Поступило
26 X 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Bernstein, Acta math., **52**, p. 1—66. [2] F. Hausdorff, Math. ZS., **16**, p. 220 (1923). [3] I. Stieltjes, Ann. de la Faculté des Sci. de Toulouse, IX (1895). [4] F. Riesz, Arkiv för mat. etc., **17**, № 16, p. 1—52 (1923).