Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 4

МЕХАНИКА

И. А. КИБЕЛЬ

ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ИЗЛУЧЕНИЯ

(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 3 VIII 1939)

Ламинарный пограничный слой, образующийся при движении сжимаемой жидкости вдоль пластинки, послужил за последнее время предметом исследований ряда авторов. В частности было установлено ([1]), что при скоростях на бесконечности, значительно превышающих скорость звука, температура обтекаемой пластинки поднимается до огромных значений. Именно, существует формула, связывающая между собой температуру T_W пластинки (помещенной в поток скорости U и предоставленной самой себе) с температурой на бесконечности T_0 и с числом Бэрстоу $M=\frac{U}{a_0}$ (a_0 — скорость звука на бесконечности):

$$T_W=T_0\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right) \tag{1}$$

(k — отношение теплоемкостей). При установлении этой формулы не было принято в расчет, что предоставленная самой себе пластинка будет терять теплоту путем лучеиспускания; пока T_W мало, потери из-за лучеиспускания будут незначительны и ими, в самом деле, можно пренебречь; однако при больших M (и значит T_W) лучеиспускание внесет значительные поправки и формула (1) окажется неверной. Цель настоящей заметки — дать теорию движения сжимаемой вязкой жидкости вдоль пластинки, излучающей по закону Стефана-Больцмана. Излучением самой жидкости мы пренебрегаем.

Пусть пластинка расположена вдоль положительной оси X от начала координат. Уравнения движения в пограничном ее слое имеют вид:

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}=0, \tag{3}$$

$$c_p\rho u\frac{\partial T}{\partial x}+c_p\rho v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+A\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2. \tag{4}$$

Здесь u и v — составляющие скорости по осям X и Y соответственно, ρ — плотность, μ — коэффициент вязкости, T — температура, A — термический эквивалент работы, λ — коэффициент теплопроводности. Мы примем, что

$$\frac{\mu}{\mu_0}=\left(\frac{T_0}{T}\right)^{0.76}, \tag{5}$$

где μ_0 и T_0 — коэффициент вязкости и температура на бесконечности, и что

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{T_0}{T}, \tag{6}$$

где ρ_0 — плотность на бесконечности (давление сохраняется в пограничном слое). Наконец, будем считать число Прандтля равным единице, так что

$$\lambda = c_p \mu. \tag{7}$$

В качестве краевых условий принимаем, что

$$\left.\begin{aligned} &u=v=0 && \text{при } y=0; \\ &u=U,\ T=T_0 && \text{при } y=\infty. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Кроме того надо записать, что пластинка столько же получает тепла от теплопроводности жидкости, сколько теряет излучением; это мы запишем так ([1]:

$$\int_0^L \lambda \frac{\partial T}{\partial y}\,dx = \int_0^L \sigma\left(T^4 - T_0^4\right)dx \qquad \text{при } y=0, \tag{9}$$

где L — длина пластинки, а σ — постоянная Стефана-Больцмана.

Решение задачи следует в дальнейшем считать приближенным, ибо решение уравнений движения мы будем искать для пластинки бесконечной длины, а в то же время будем пользоваться условием (9), в котором L конечно.

Вводя «температуру торможения», t

$$t = T + \frac{A}{c_p}\cdot\frac{u^2}{2}, \tag{10}$$

преобразуем (4) при помощи (2) и (5) в вид

$$\rho u \frac{\partial t}{\partial x} + \rho v \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial t}{\partial y}\right). \tag{11}$$

Введем еще функцию тока ψ с тем, чтобы заменить (3) уравнениями:

$$\rho u = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial y},\quad \rho v = -\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{12}$$

Перейдем теперь к безразмерным величинам x^*, y^*, u^*, v^*, ρ^*, t^*, ψ^*. Пусть

$$x = Lx^*,\quad y = \frac{L}{\sqrt{R}}y^*,\quad \psi = \frac{LU}{\sqrt{R}}\psi^*,$$

$$u = Uu^*,\quad v = \frac{U}{\sqrt{R}}v^*,\quad \rho = \rho_0\rho^*,\quad t = T_0 t^*,\quad \mu = \mu_0\mu^*;$$

где R (число Рейнольдса) дано в виде

$$R = \frac{\rho_0 U L}{\mu_0}.$$

Наконец перейдем к новым независимым переменным ξ и η:

$$\xi = x^*,\quad \eta = \frac{y^*}{\sqrt{x^*}}$$

([1] Мы предполагаем, что температура во всех точках пластинки устанавливается мгновенно. Если пластинка не проводит тепла, то мы должны написать:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \sigma\left(T^4 - T_0^4\right) \text{ при } y = 0.$$

Тогда температура пластинки будет разной в разных точках. Эта задача вполне поддается решению нашим методом, но здесь мы ее рассматривать не будем.

и введем вместо ψ^* функцию ζ из условия

$$\psi^*(\xi, \eta) = \sqrt{\xi}\,\zeta(\xi, \eta).$$

Будем теперь искать решение, в котором u^*, t^*, ζ суть функции одного только η [1]. Уравнения (12) нам дадут

$$\rho^* u^* = \frac{d\zeta}{d\eta}, \tag{13}$$

$$\rho^* v^* = -\frac{1}{2\sqrt{\xi}}\left(\zeta - \eta\frac{d\zeta}{d\eta}\right).$$

Уравнение (2) примет вид

$$\frac{d}{d\eta}\left(\mu^*\frac{du^*}{d\eta}\right) + \frac{\zeta}{2}\cdot\frac{du^*}{d\eta} = 0; \tag{14}$$

уравнение (11) даст

$$\frac{d}{d\eta}\left(\mu^*\frac{dt^*}{d\eta}\right) + \frac{\zeta}{2}\cdot\frac{dt^*}{d\eta} = 0. \tag{15}$$

Уравнения (14) и (15) позволяют заключить, что

$$t^* = a + bu^*, \tag{16}$$

где a и b — некоторые постоянные. Заметим, что по (5), (6) и (10) мы можем теперь записать

$$\rho^* = \frac{1}{a + bu^* - \frac{k-1}{2}M^2u^{*2}}; \quad \mu^* = \left(a + bu^* - \frac{k-1}{2}M^2u^{*2}\right)^{0.76}. \tag{17}$$

Напишем теперь краевые условия. Вместо (8) имеем

$$u^* = 0, \ \zeta = 0 \qquad \text{при } \eta = 0; \tag{18}$$

$$u^* = 1, \ t^* = 1 + \frac{k-1}{2}M^2 \ \text{при } \eta = \infty. \tag{19}$$

Условие (9) может быть легко преобразовано, если принять в расчет (17), в вид

$$\int_0^1 \mu^*\frac{dt^*}{d\eta}\cdot\frac{1}{\sqrt{\xi}}\,d\xi = \varepsilon\int_0^1 (t^{*4} - 1)\,d\xi \ \text{при } \eta = 0, \tag{20}$$

где

$$\varepsilon = \frac{cLT_0^3}{c_p\mu_0\sqrt{R}}, \tag{21}$$

так как ни μ^* ни t^* не зависят от ξ (20), интегрируется и дает, если вспомнить выражение (17) для μ^*, а также (18):

$$\frac{dt^*}{d\eta} = \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{t^{*4} - 1}{t^{*0.76}} \ \text{при } \eta = 0. \tag{22}$$

Постоянные a и b, входящие в (18), будут связаны соотношением

$$a + b = 1 + \frac{k-1}{2}M^2 \tag{23}$$

[следствие формулы (19)] и соотношением

$$b\left(\frac{du^*}{d\eta}\right)_{\eta=0} = \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{a^4 - 1}{a^{0.76}} \tag{24}$$

([1] Если бы условие (9) надо было заменить соотношением $\lambda\frac{\partial T}{\partial y} = c(T^4 - T_0^4)$, выполняющимся в каждой точке пластинки, то мы не могли бы найти решение как функцию одного η. Здесь пришлось бы воспользоваться разложением в ряд по степеням ξ наподобие того, как это делается для пограничного слоя, образующегося около криволинейного контура.

[следствие (22)]. Если бы мы нашли $\left(\frac{du^*}{d\eta}\right)_{\eta=0}$, то мы определили бы из (23) и (24) a и значит по (16) узнали бы t^* (и температуру) на стенке. Для определения $\left(\frac{du^*}{d\eta}\right)_{\eta=0}$ обратимся к нашей системе уравнений (13), (14), содержащих две неизвестные функции u^* и ζ. При $u^*=0$, $\eta=0$ наши уравнения особенностей не имеют. Перейдем же от η к переменному u^* и будем искать выражение

$$\mu^* \frac{du^*}{d\eta} = \varphi.$$

Получим

$$\varphi \frac{d\zeta}{du^*} = \mu^* \rho^* u^* = \frac{u^*}{\left(a + bu^* - \frac{k-1}{2} M^2 u^{*2}\right)^{0.24}}, \tag{25}$$

$$\frac{d\varphi}{du^*} = -\frac{\zeta}{2}. \tag{26}$$

Раскладывая φ и ζ в ряд по степеням u^*, получим

$$\varphi = \varphi(0) - \frac{u^{*3}}{12a^{0.24}\varphi(0)} \left\{1 - \frac{0.12\, b}{a} u^* + \frac{0.036}{a^2}\left(2\frac{k-1}{2} M^2 a + \right.\right.$$
$$\left. + 1.24 b^2\right) u^{*2} - 0.03333\left[\frac{0.2976}{a^3}\left(6\frac{k-1}{2} M^2 a + 2.24 b^2\right) - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{2\varphi^2(0)\, a^{0.24}}\right] u^{*3} + \ldots\right\}. \tag{27}$$

С другой стороны, для больших значений ζ (т. е. для u^*, близких к единице) мы можем найти асимптотическое выражение для φ, полагая просто

$$\varphi \frac{d\zeta}{du^*} \approx 1; \quad \frac{d\varphi}{du^*} = -\frac{\zeta}{2},$$

т. е.

$$2\varphi \frac{d^2\varphi}{du^{*2}} = -1,$$

откуда получим

$$\frac{d\varphi}{du^*} = -\sqrt{\mathrm{Const} - \ln \varphi} = -\frac{\zeta}{2}, \tag{28}$$

так что

$$\varphi \approx c e^{-\frac{\zeta^2}{4}} \tag{29}$$

и значит

$$u^* \approx 1 + c \int_{\infty}^{\zeta} e^{-\frac{\zeta^2}{4}} d\zeta \approx 1 - 2c \frac{e^{-\frac{\zeta^2}{4}}}{\zeta}. \tag{30}$$

По (29) и (30) имеем

$$\varphi = \frac{\zeta}{2}(1 - u^*),$$

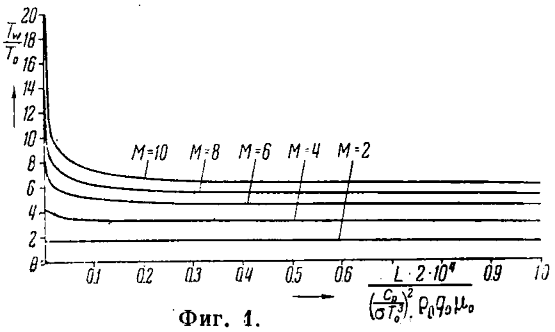
а по (28)

$$\varphi = -(1 - u^*) \frac{d\varphi}{du^*}.$$

Мы можем теперь вставить сюда как для φ, так и для $\frac{d\varphi}{du^*}$ их выражения по (27) (при выбранном заранее u^*); мы получим тогда уравнение для определения $\varphi(0)$ в функциях от a, b и M. Уравнение (24) может быть теперь записано в виде

$$b\varphi(0) = \frac{\varepsilon}{2}(a^4 - 1)$$

и позволит, вместе с (23), определить наконец a в функциях от M и ε. Результаты численных расчетов приведены на фиг. 1. Здесь по оси абсцисс отложено $\frac{L\,2\,10^4}{\left(\frac{c_p}{\sigma T_0^3}\right)^2 \rho_0 a_0 \mu_0}$, а по оси ординат $\frac{T_W}{T_0}$. Значения $L = 0$ отвечают формуле (1); при $L \longrightarrow \infty$ для всех M будет $\frac{T_W}{T_0} \longrightarrow 1$. Для больших M температуры резко падают при увеличении L. Так, если $\rho_0 = 1.3 \cdot 10^{-3}$, $\mu_0 = 1.7 \cdot 10^{-4}$, $T_0 = 2.73 \cdot 10^2$, $\frac{\sigma}{c_p} = 5.833 \cdot 10^{-12}$



Фиг. 1.

(все в CGS), то при $M = 10$ мы получим для $L = 10^2$ см $\frac{T_W}{T_0} \approx 5.2$, а не 21, как это следует по формуле (1).

После того как a и $\varphi(0)$ известны, нетрудно построить распределение скоростей и температур; по формуле

$$c_f = \frac{8}{3} \cdot \frac{\varphi'(0)}{\sqrt{R}}$$

мы можем также без всякого труда рассчитать коэффициент сопротивления c_f.

Ленинградский государственный университет

Поступило
13 VIII 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Kármán a. Tsien, Journ. Aeronaut. Sci., № 10 (1938).