

Н. ЕФИМОВ

ИЗГИБАНИЕ ОКРЕСТНОСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ТОЧКИ
ПОВЕРХНОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 VIII 1939) *

В ранее опубликованной нашей заметке ⁽¹⁾ приведен ряд предложений, относящихся к исследованию некоторых арифметических инвариантов регулярной параболической точки аналитической поверхности. Относительно одного из этих инвариантов — индекса (ind) параболической точки [см. ⁽¹⁾] — было отмечено:

1. Если порядок прикосновения поверхности с касательной плоскостью в параболической точке M_0 равен единице и точка M_0 имеет определенный индекс, то возможными его значениями являются лишь числа: $-1, 0, +1$.

2. Для всякой поверхности U с параболической точкой M_0 существует изометричная поверхность U' , которая в точке M'_0 , соответствующей M_0 , имеет с касательной плоскостью первый порядок прикосновения; следовательно индекс этой точки примет одно из трех значений: $-1, 0, +1$, если только окажется вообще определенным.

Среди поверхностей U' существует бесконечное множество таких, на которых параболическая точка M'_0 имеет определенный индекс⁽¹⁾, что вытекает из следующей теоремы:

Если M_0 — параболическая точка поверхности U и t — произвольное направление при точке M_0 , то существует изометричная U поверхность U' , порядок прикосновения которой с касательной плоскостью в соответствующей M_0 точке M'_0 равен единице и для которой направление t' , соответствующее t , является асимптотическим.

При этом естественно возникает вопрос, будет ли значение индекса параболической точки одинаковым для всех поверхностей U' , которые определены указанным выше образом. Этот вопрос решен нами с исключением из рассмотрения некоторого частного класса поверхностей.

Пусть $S(u, v)$ обозначает двумерное риманово многообразие с линейным элементом

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

коэффициенты которого E, F, G регулярны в окрестности точки $u=0, v=0$. Обозначим через $K(u, v)$ гауссову кривизну в точке (u, v) и, предположив $K(0,0)=0$, ограничим класс рассматриваемых нами многообразий $S(u, v)$, допуская, что среди ветвей кривой $K(u, v)=0$,

⁽¹⁾ Поверхности с гауссовой кривизной, тождественно равной нулю, нами не рассматриваются.

проходящих через точку $u=0, v=0$, нет геодезических. При этом допущении имеет место следующая теорема:

Теорема. Каким бы ни было многообразие $S(u, v)$, все поверхности евклидова трехмерного пространства, изометричные $S(u, v)$, порядок прикосновения которых с касательной плоскостью в параболической точке $u=0, v=0$ равен единице, имеют в этой точке один и тот же индекс; значение индекса, $-1, 0$ или $+1$, определяется, таким образом, только метрикой поверхности.

Эта теорема устанавливает, что все многообразия $S(u, v)$ распределяются на три категории и каждой категории соответствует определенная форма реализации многообразия $S(u, v)$ в виде поверхности U евклидова пространства, имеющей первый порядок прикосновения с касательной плоскостью в параболической точке $M_0 (u=0, v=0)$ и определенный индекс этой точки. Именно:

1. $\text{Ind } M_0 = +1$; поверхность U в точке M_0 выпукла (хотя как угодно близко к M_0 могут существовать точки с отрицательной кривизной).
2. $\text{Ind } M_0 = -1$; поверхность U вблизи M_0 имеет форму седла.
3. $\text{Ind } M_0 = 0$; поверхность U аналогична поверхности вращения, меридиан которой имеет точку перегиба.

Обратно, каждому из этих трех видов поверхности U соответствует характерная внутренняя геометрия.

Из теорем, сформулированных в заметке (1), следует, что при непрерывном изгибании окрестности параболической точки поверхности индекс этой точки вообще говоря не меняется. В том случае, когда поверхность с касательной плоскостью в параболической точке имеет порядок прикосновения $p > 2$, неизменяемость индекса при непрерывном изгибании вытекает из того, что бесконечно малая деформация, соответствующая непрерывному изгибанию, имеет высокий порядок малости; при этом (может быть с редкими исключениями) порядок бесконечно малой деформации тем выше, чем больше p . Точные формулировки мы даем в нижеприводимых теоремах, в которых выясняются также некоторые алгебраические источники отмеченных обстоятельств.

В дальнейшем $U(M_0)$ обозначает произвольную окрестность параболической точки M_0 поверхности U , τ — касательную плоскость в точке M_0 , p — порядок прикосновения U и τ . Мы будем предполагать, что $p \geq 3$.

Выбрав декартову ортогональную систему координат x, y, z так, чтобы начало ее было расположено в M_0 и x, y — оси в плоскости τ , представим $U(M_0)$ уравнением

$$z = f^{(p+1)}(x, y) + f^{(p+2)}(x, y) + \dots, \quad (1)$$

где $f^{(m)}(x, y)$ — однородная форма степени m .

Поверхность

$$z = f^{(p+1)}(x, y) + f^{(p+2)}(x, y) + \dots + f^{(p+k)}(x, y) \quad (2)$$

мы будем называть соприкасающимся параболоидом порядка $p+k$ и обозначать через $P_m(M_0)$ ($m = p+k$).

Полагая

$$f^{(p+1)}(x, y) = a_0 x^{p+1} + \left(\frac{p+1}{1}\right) a_1 x^p y + \dots + a_{p+1} y^{p+1}, \quad (3)$$

рассмотрим матрицу

$$A = \begin{vmatrix} a_0 a_1 \dots a_{p-1} \\ a_1 a_2 \dots a_p \\ a_2 a_3 \dots a_{p+1} \end{vmatrix} \quad (4)$$

и обозначим через $R(A)$ ее ранг. Имеет место следующая теорема:

Теорема А. Если форма $f^{(p+1)}(x, y)$ не имеет вещественных кратных линейных множителей и $R(A) = 3$, то при всяком непрерывном изгибании поверхности $U(M_0)$ порядок p остается без изменения и соприкасающийся параболоид $P_{p+1}(M_0)$ не испытывает деформации¹.

Пусть теперь $F(x, y)$ — однородная форма степени m . Обозначив через A матрицу, которая для формы $F(x, y)$ построена так же, как матрица (4) для формы $f^{(p+1)}(x, y)$, предположим $R(A) = 3$. Рассмотрим всевозможные однородные формы $\Theta(x, y)$ степени $n > m$, удовлетворяющие тождеству

$$F_{yy}\Theta_{xx} - 2xyF\Theta_{xy} + F_{xx}\Theta_{yy} \equiv 0. \quad (5)$$

Определим число $N(F)$ следующим условием: $N(F) = k$, если все формы $\Theta(x, y)$ степени $n = m+1, m+2, \dots, m+k$ равны тождественно нулю и существует форма $\Theta(x, y)$ степени $n = m+k+1$.

З а м е ч а н и е. Если $R(A) < 3$, то существуют формы $\Theta(x, y)$ любой степени, удовлетворяющие тождеству (5).

С другой стороны, существуют формы $f(x, y)$ степени m , для которых $N(f) = m-3$. Примером может служить форма $f(x, y) = x^m + mxy^{m-1}$.

Теорема В. Пусть поверхности $U(M_0)$ и $U'(M_0)$ определены уравнениями

$$z = F^{(m)}(x, y) + F^{(m+1)}(x, y) + \dots \quad (m \geq 4)$$

и

$$z = F^{(m)}(x, y) + \Theta^{(m+1)}(x, y) + \dots,$$

где $F^{(k)}(x, y)$ и $\Theta^{(k)}(x, y)$ — однородные формы; если $U(M_0)$ и $U'(M_0)$ изометричны, то

$$\Theta^{(m+k)}(x, y) \equiv F^{(m+k)}(x, y)$$

при всех $k = 1, 2, \dots, N(F^{(m)})$.

Если при всяком непрерывном изгибании поверхности $U(M_0)$ соприкасающийся параболоид $P_m(M_0)$ не испытывает деформации, то мы будем называть число $m-p$ порядком относительной неизгибаемости поверхности $U(M_0)$.

Из теорем (А) и (В) следует

Теорема С. Пусть поверхность $U(M_0)$ определена уравнением

$$z = f^{(m)}(x, y) + f^{(m+1)}(x, y) + \dots;$$

если однородная форма $f^{(m)}(x, y)$ не имеет вещественных кратных линейных множителей и равенство (4) определяет для нее матрицу A третьего ранга, то поверхность $U(M_0)$ имеет порядок относительной неизгибаемости $h \geq N(f^{(m)})$.

Отсюда и из замечания, сделанного после теоремы А, следует, что существуют поверхности, обладающие положительным порядком относительной неизгибаемости, который может быть как угодно велик.

Воронежский государственный университет

Поступило
8 VII 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. Е ф и м о в, ДАН, XXIII, № 9 (1939).

¹ Здесь и в дальнейшем мы предполагаем, что левая часть уравнения изгибаемой поверхности и ее производные по координатам x, y, z до $p+1$ порядка являются функциями, непрерывными относительно параметра изгиба.