Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 7

МАТЕМАТИКА

О. А. ВОЛЬБЕРГ

ЗАДАЧА О СТАЦИОНАРНОЙ И НЕСТАЦИОНАРНОЙ ОЧЕРЕДЯХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 VI 1939)

Пусть s приборов обслуживают бесконечную совокупность клиентов, каждый из которых, независимо от других клиентов, может с одинаковой вероятностью предъявить требование на обслуживание в любой из двух равных промежуток времени. Среднюю частоту требований α будем считать заданной. В таком случае, как известно, при весьма общих предпосылках можно считать, что вероятность предъявления k требований в течение промежутка времени t выражается законом распределения Пуассона

$$v_k(t) = \frac{(\bar{at})^k}{k!} e^{-at}, \tag{1}$$

который мы и примем.

Далее, будем считать заданной функцию распределения времен обслуживания $\psi(\mu)$:

$$P(\mu_n^* \leqslant \mu) = \psi(\mu), \tag{2}$$

где μ_n^*—длительность обслуживания $n+1$-го клиента.

Установим вместе с F. Pollaczek'ом [1] такой порядок использования приборов: каждый клиент, предъявивший требование на обслуживание, прикрепляется к очередному прибору, а следующий клиент к следующему прибору, так что при наличии s приборов каждый клиент сменяет у обслуживающего прибора того клиента, который предъявил требование за s человек до него.

Допустим, что клиент, предъявивший требование на обслуживание в момент занятости очередного прибора, не отказывается от своего требования, а становится в очередь в ожидании его освобождения. Найдем закон распределения времени ожидания клиента, предъявившего требование на обслуживание в некоторый момент.

Для определенности задачи нам придется еще предполагать известными «начальные условия», характеризующие начальную загруженность приборов. Обозначим вероятность того, что время начальной занятости $k+1$-го прибора u_k^* не превышает u, через $\pi_k(u)$:

$$P(u_k^* \leqslant u) = \pi_k(u) \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots s-1) \tag{3}$$

и будем считать функции $\pi_k(u)$ $[0 \leqslant k \leqslant s \dot{=} 1]$ заданными. Длительности обслуживания μ_k^* и времена начальной занятости u_k^* мы будем считать ограниченными сверху (и, разумеется, не меньшими нуля) так, что функции распределения $\psi(\mu)$ и $\pi_k(u)$ $(k=0, 1, 2, \ldots, s=1)$ мы полагаем равными единице при всех достаточно больших значениях аргументов (и, разумеется, равными нулю при отрицательных значениях аргументов, монотонными и непрерывными справа).

Нетрудно получить рекурентную формулу, решающую нашу задачу. Обозначая через $\tau_n^*(t)$ время ожидания $n+1$-го клиента, предъявляющего требование на обслуживание в момент t, получим

$$\tau_{n+s}^*(t) = \overline{\tau_n^*(t - x_{n,s}^*) + \mu_n^* - x_{n,s}^*} \tag{4}$$

где $x_{n,s}^*$—длительность промежутка времени, отделяющего моменты предъявления требований клиентами с номерами $n+1$ и $n+s+1$, из которых последний предъявляет требование в момент t. Черта, поставленная над функцией, здесь и ниже обозначает, что функция заменяется нулем, если аргумент ее отрицателен. Обозначим далее

$$P[\tau_n^*(t) \leqslant \tau] = \pi_n(\tau, t) \tag{5}$$

и

$$P[x_{n,s}^* \leqslant x] = F_{n,s}(x, t). \tag{6}$$

Несложное вычисление показывает, что

$$\frac{d}{dx} F_{n,s}(x, t) = \frac{\overline{(t-x)^n}}{n!} \cdot \frac{\overline{x}^{s-1}}{(s-1)!} \cdot \frac{(n+s)!}{t^{n+s}} \quad (t > 0). \tag{7}$$

Из (4), принимая во внимание (7), получаем искомую рекурентную формулу:

$$\pi_{n+s}(\tau, t) \frac{t^{n+s}}{(n+s)!} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi(\mu) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{[\tau - (\tau' + \mu - x)]^0}\, d_{\tau'}\pi_n(\tau', t - x) \cdot \\ \cdot \frac{\overline{(t-x)^n}}{n!} \cdot \frac{\overline{x}^{s-1}}{(s+1)!}\, dx. \tag{8}$$

Эта формула ([1] позволяет найти все функции $\pi_n(\tau, t)$, если известны первые s из них, которые определяются начальными условиями задачи:

$$\pi_n(\tau, t) = \overline{\tau}^0 \pi_n(\tau + t) \quad (n = 0, 1, 2 \ldots s-1). \tag{9}$$

Чтобы найти закон распределения $\pi(\tau, t)$ времени ожидания клиента, предъявляющего требование на обслуживание в момент t (о порядковом номере которого ничего не известно), остается заметить, что

$$\pi(\tau, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(\tau, t)\, v_k(t) = e^{-\frac{t}{\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(\tau, t) \left(\frac{t}{\lambda}\right)^k \frac{1}{k!} = e^{-\frac{t}{\lambda}} A(\tau, t), \tag{10}$$

где $\lambda = \frac{1}{a}$ — средний интервал времени между двумя последовательными требованиями на обслуживание. Из (8) находим, что функция $A(\tau, t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

([1] Область интегрирования определяется множителем $\overline{[\tau - (\tau' + \mu - x)]^0}$, который считается равным единице, если $\tau \geqslant \overline{\tau' + \mu - x}$, и нулю, если это неравенство не соблюдено.

$$A(\tau, t) = H(\tau, t) + \frac{1}{\lambda^s} \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi(\mu) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{[\tau - (\overline{\tau' + \mu - x})]^0} d_{\tau'} A(\tau', t - x) \cdot$$

$$\cdot \frac{\overline{x}^{s-1}}{(s+1)!} dx, \tag{11}$$

где

$$H(\tau, t) = \sum_{k=0}^{s-1} \pi_k(\tau, t) \cdot \left(\frac{\overline{t}}{\lambda}\right)^k \cdot \frac{1}{k!} = \overline{\tau}^0 \sum_{k=0}^{s-1} \pi_k(\tau + t) \cdot \left(\frac{\overline{t}}{\lambda}\right)^k \frac{1}{k!}. \tag{12}$$

Чтобы найти асимптотическое представление функции $\pi(\tau, t)$ при $t \to \infty$, мы будем исходить из этого уравнения.

Введем обозначения:

$$\int_0^\infty e^{-px} d\varphi(x) = \tilde{\varphi}(p), \tag{13}$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qy} d_x f(x, y) = \tilde{f}^*(p, q) \tag{14}$$

и будем называть функцию $\tilde{}\,(p)$ характеристикой Лапласа—Стильтьеса функции $\varphi(x)$, а $\tilde{f}^*_{(p,q)}$ двойной лапласовой характеристикой функции $f(x, y)$.

С помощью (11) нетрудно получить

$$A^*(p, q) = \frac{\tilde{H}^*(p, q)(q-p)^s \lambda^s - pQ(p, q)}{(q-p)^s \lambda^s - \tilde{\psi}(p)}, \tag{15}$$

где $Q(p, q)$—многочлен $s-1$-й степени по переменной p, коэффициенты которого зависят от q и остаются пока неопределенными. Они могут быть определены из соображений регулярности, а именно, можно показать, что знаменатель правой части формулы (15) имеет s нулей $p_0^*(q)$, $p_1^*(q) \ldots p_{s-1}^*(q)$, которые при $R(q) > \frac{1}{\lambda}$ имеют положительные вещественные части. А так как функция $\tilde{A}^*(p, q)$ должна быть регулярна при $R(q) > \frac{1}{\lambda}$ и $R(p) > 0$, то все указанные нули знаменателя должны быть и нулями числителя. Таким образом, получаем s значений многочлена $Q(p, q)$, которыми этот многочлен полностью определяется.

Далее, обозначим через η коэффициент использования приборов, т. е. отношение среднего времени обслуживания μ_1 к $s\lambda$: $\eta = \frac{\mu_1}{s\lambda}$. Можно показать, что любая целая симметрическая функция нулей $p_k^*(q)$ $(k = 0, 1 \ldots s-1)$ знаменателя функции $\tilde{A}^*(p, q)$ регулярна при $R(q) > \frac{1}{\lambda}$, а если коэффициент использования приборов η не равен единице, то и в более широкой области $R(q) > a$, где a — некоторое число, меньшее, чем $\frac{1}{\lambda}$. Принимая далее во внимание, что при $\eta < 1$ нули знаменателя функции $\tilde{A}^*(p, q)$, т. е. функции $p_k^*(q)$, имеют нули в точках $q = q_k = \frac{1}{\lambda}\zeta_k$, где $\zeta_k = e^{\frac{2k\pi i}{s}}$, получим, что при $\eta < 1$ крайней правой особой точкой (простым полюсом) функции $A^*(p, q)$ в плоскости q является точка $q = q_0 = \frac{1}{\lambda}$. Нетрудно далее найти вычет функции $\tilde{A}^*$ относительно этого полюса и получить такое представление этой функции

$$\tilde{A}^*(p, q) = \frac{pQ(p)}{\tilde{\psi}(p) - (1 - \lambda p)^s} \cdot \frac{1}{q - \frac{1}{\lambda}} + \tilde{\varphi}^*(p, q), \quad (\eta < 1), \tag{16}$$

где функция $\tilde{\ }^*$ регулярна при $R(p) > 0$ и $R(q) > a$ (a несколько меньше, чем $\frac{1}{\lambda}$), а $Q(p)$ — многочлен, нули которого совпадают с нулями знаменателя, лежащими в правой плоскости, и который при $p = 0$ обращается в $s\lambda(1-\eta)$, т. е.

$$Q(p) = \frac{s\lambda(1-\eta)(p_1 - p)(p_2 - p)\ldots(p_{s-1} - p)}{p_1, p_2 \ldots p_{s-1}} \tag{17}$$

(p_k—нули функции $\tilde{\psi}(p) - (1 - \lambda p)^s$, лежащие в правой полуплоскости).

Чтобы получить из (16) асимптотическое представление функции $\tilde{\pi}(p, t)$ при $t \to \infty$, воспользуемся следующей леммой.

Лемма. Если функция $\varphi(q)$ при $R(q) > a$ регулярна и стремится к нулю равномерно относительно $\arg q$, когда $q \to \infty$, а на прямой $R(q) = a' > a$ допускает представление

$$\varphi(q) = \frac{c}{q^\alpha} + 0\left(\frac{1}{q^{1+\beta}}\right) \quad [q \to \infty, \quad c = \mathrm{Const}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0],$$

то она представляет собой лапласову характеристику функции $\Psi(t)$, возрастающей при $t \to \infty$ медленной показательной функции $e^{a't}$, т. е.

$$\varphi(q) = \int_0^\infty e^{-qt}\,\Phi(t)\,dt$$

и

$$\lim_{t\to\infty}[\Phi(t)\,e^{-a't}] = 0.$$

С помощью этой леммы, которая почти непосредственно вытекает из исследований Haar'а об асимптотическом представлении функций ([2]), получаем

$$\tilde{\pi}(p, t) = \frac{pQ(p)}{\tilde{\psi}(p) - (1 - \lambda p)^s}\,[1 + 0(e^{-\rho t})], \tag{18}$$

где $\rho > \rho' > 0$ (ρ' не зависит от p).

Таким образом, если коэффициент использования приборов меньше единицы, то функция распределения времени ожидания клиента, предъявляющего требование на обслуживание в момент t, стремится при $t \to \infty$ к стационарному закону $\pi(\tau)$, не зависящему от времени, характеристическая функция которого равна

$$\tilde{\pi}(p) = \frac{p\,Q(p)}{\tilde{\psi}(p) - (1 - \lambda p)^s}. \tag{19}$$

Для случая $s=1$ характеристическая функция стационарного закона найдена А. Я. Хинчиным ([3]).

Если $\eta > 1$, то нули знаменателя функции $\tilde{A}^*(p, q)$, как легко показать, не имеют нулей. В этом случае при значениях p, достаточно близких к нулю и расположенных в полуплоскости $R(p) > 0$, крайней правой особой точкой (простым полюсом) функции $\tilde{A}^*(p, q)$ является точка

$$q = q_0(p) = p + \frac{1}{\lambda}[\tilde{\psi}(p)]^{\frac{1}{s}},$$

и функция $\tilde{A}^*(p, q)$, при значениях p, достаточно близких к нулю и расположенных в полуплоскости $R(p) > 0$, получает представление

$$\tilde{A}^*(p, q) = \left[\tilde{H}^*(p, q) - \frac{pQ(p, q_0)}{\tilde{\psi}(p)}\right] \cdot \frac{q_0 - p}{s} \cdot \frac{1}{q - q_0} + \tilde{\varphi}_1^*(p, q),$$

где $q_0 = p + \frac{1}{\lambda}[\tilde{\psi}(p)]^{\frac{1}{s}}$, а $\tilde{\varphi}_1^*$ — функция, регулярная в полуплоскости $R(q) > a$, где a несколько меньше, чем $\frac{1}{\lambda}$.

Отсюда с помощью вышеприведенной леммы находим, что при p, достаточно близком к нулю и лежащем в правой полуплоскости,

$$\tilde{\pi}(p, t) = \left[\tilde{H}^*(p, q_0) - \frac{pQ(p, q_0)}{\tilde{\psi}(p)} \cdot \frac{q_0 - p}{s} \cdot e^{-\left(\frac{1}{\lambda} - q_0\right)t} \cdot [1 + 0(e^{-\rho t})]\right], \tag{20}$$

где $\rho > \rho' > 0$ (ρ' не зависит от p).

Теперь легко найти

$$\lim_{t\to\infty} P\left[\frac{\tau^*(t) - (\eta - 1)t}{\sqrt{\frac{t}{\lambda}}} \leqslant \tau\right] = \lim_{t\to\infty} \pi\left[\sqrt{\frac{t}{\lambda}} \cdot \tau + (\eta - 1)t, t\right].$$

Замена аргумента τ на $\sqrt{\frac{t}{\lambda}} \cdot \tau + (\eta - 1)t$ в функции распределения влечет за собой замену p на $p\sqrt{\frac{\lambda}{t}}$ в ее характеристике Лапласа—Стильтьеса и умножению последней на $e^{\sqrt{\lambda t}(\eta-1)p}$. Произведя такую замену в (20), получим

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{\pi}\left[\sqrt{\frac{\lambda}{t}}\, p\right] e^{\sqrt{\lambda t}(\eta-1)p} = e^{\left[\frac{\mu_2 - \mu_1^2}{s} + \frac{\mu_1^2}{s^2}\right]\frac{p^2}{2}}, \tag{21}$$

где μ_2—второй момент функции распределения времен обслуживания. Отсюда следует, что

$$\lim \pi\left[\sqrt{\frac{t}{\lambda}}\tau + (\eta - 1)t\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\sqrt{\frac{\mu_2 - \mu_1^2}{s} + \frac{\mu_1^2}{s^2}}}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx,$$

т. е. при $\eta > 1$ нормированные указанным образом времена ожидания подчиняются в пределе при $t \to \infty$ нормальному закону распределения Гаусса.

В другой работе ([4]) я рассмотрел вопрос о распределении времени ожидания клиента, порядковый номер которого безгранично растет, и получил аналогичные результаты. Только дисперсия предельного закона распределения в этом случае получается несколько меньшей.

Педагогический институт
им. А. И. Герцена
Ленинград

Поступило
17 VI 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Pollaczek, Math. ZS, **32** (1930). [2] A. Haar, Math. Ann., **96** (1926). [3] А. Я. Хинчин, Мат. сборн., **39**, вып. 4 (1932). [4] О. Вольберг, Изв. Воен. электр. Акад., XVII (1939).