Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 7

МАТЕМАТИКА

Б. В. ГНЕДЕНКО

ОБ ОБЛАСТЯХ ПРИТЯЖЕНИЯ УСТОЙЧИВЫХ ЗАКОНОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 VII 1939)

О законе распределения $F(x)$ говорят, что он принадлежит области притяжения закона $\Phi(x)$, если существуют такие постоянные $B_n > 0$ и A_n, что законы распределения сумм

$$S_n = \frac{x_1 + x_2 \ldots + x_n}{B_n} - A_n, \tag{1}$$

где $x_1, x_2 \ldots x_n$, независимо случайные величины, распределенные по закону $F_{(x)}$, сходятся к $\Phi(x)$.

Известно (1), что класс предельных в этом смысле законов совпадает с классом устойчивых законов. Для того чтобы закон $\Phi(x)$ был устойчивым, необходимо и достаточно (1), чтобы логарифм его характеристической функции

$$\log \varphi(t) = i\gamma t - c_0 |t|^\alpha \left\{1 + i\beta \frac{t}{|t|} \omega(t, \alpha)\right\}, \tag{2}$$

где α, β, γ, c_0 — постоянные $(0 \leqslant \alpha \leqslant 2,\ -1 \leqslant \beta \leqslant 1,\ -\infty < \gamma < +\infty,\ c_0 \geqslant 0)$, а

$$\omega(t, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha & \text{для } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \log |t| & \text{для } \alpha = 1 \end{cases}.$$

В настоящее время известны области притяжения законов Гаусса $(\alpha = 2)$ и единичного закона $(\alpha = 0)$ (1). Естественно, что основной задачей теории устойчивых законов является определение области притяжения для каждого из них.

Цель настоящей заметки — указать на то, что решение этой проблемы получается без труда применением найденных мною общих условий сходимости закона распределения суммы независимых слагаемых к какому-либо предельному закону (2). Из общей теоремы, заключающейся в цитированной сейчас моей предыдущей заметке, вытекает следствие.

Теорема 1. *Для того чтобы для некоторой последовательности натуральных чисел K_n $(K_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty)$ законы распределения сумм*

$$S'_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n \cdot K_n}}{B'_n} - A'_n \tag{3}$$

[*где* A'_n и B'_n — *постоянные, а* $x_1, x_2 \ldots$ — *независимые случайные величины с одним и тем же законом распределения* $F(x)$], *сходились к предельному закону* $\Phi(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали функции* $M(x)$ (*для* $-\infty < x < -0$) *и* $N(x)$ (*для* $+0 < x < +\infty$) *и постоянные* a *и* $\gamma(\tau)$ *такие, что*:

$$K_n F(B'_n x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} M(x) \text{ для } x < 0, \tag{1}$$

$$K_n (F(B'_n x) - 1) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} N(x) \text{ для } x > 0.$$

В каждой точке непрерывности функций $M(x)$ и $N(x)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} K_n \left\{ \int\limits_{|x| < \varepsilon} x^2 dF(B'_n x) - \Big(\int\limits_{|x| < \varepsilon} x dF(B'_n x) \Big)^2 \right\} = a^2; \tag{2}$$

$$K_n \int\limits_{|x| < \tau} x dF(B'_n x) - A'_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \gamma(\tau). \tag{3}$$

Логарифм характеристической функции предельного закона дается формулой П. Леви:

$$\log p(t) = it\gamma(\tau) - \frac{a^2}{2} t^2 + \int\limits_{-\infty}^{-\tau} (e^{itu} - 1)\, dM(u) + \int\limits_{+\tau}^{\infty} (e^{iut} - 1)\, dN(u) +$$

$$+ \int\limits_{-\tau}^{-0} (e^{itu} - 1 - iut) dM(u) + \int\limits_{+0}^{\tau} (e^{itu} - 1 - iut)\, dN(u).$$

Из теоремы 1 легко выводится следующая теорема, доказанная недавно независимо от моих общих результатов, В. Деблином ([3]).

Теорема 2. *Для того чтобы закон* $F(x)$ *принадлежал области притяжения устойчивого закона* $\Phi(x)$, *логарифм характеристической функции которого дается формулой* (2) ($0 < \alpha < 2$), *необходимо и достаточно выполнение следующих условий*:

1) $$\frac{F(-x)}{1\, F(-x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} c\,,$$

где c — *постоянное* ($0 \leqslant c \leqslant +\infty$);

2) *при любом* $K > 0$ *выполняются соотношения*

2a) $$\frac{F(-x)}{F(-Kx)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} K^{\alpha} \quad \text{и} \quad \text{2b)}\ \frac{1 - F(x)}{1 - F(Kx)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} K^{\alpha},$$

если $0 < c < +\infty$; *если же* $c = 0$ *или* $c = +\infty$, *то из условий теоремы соответственно выкидывается соотношение* 2a) *или* 2b).

Если при $0 < \alpha \leqslant 2$ закон распределения $F(x)$ совпадает с предельным законом $\Phi(x)$, то константы B_n можно выбрать равными $n^{\frac{1}{\alpha}}$. На этом основании и в случае произвольного закона $F(x)$ говорят, что закон $F(x)$ принадлежит области нормального притяжения закона $\Phi(x)$, если постоянные коэфициенты B_n могут быть выбраны равными $an^{\frac{1}{\alpha}}$, где a — постоянное. Вопрос об областях нормального притяжения устойчивых законов решается полностью следующей теоремой, также являющейся следствием теоремы 1.

Теорема 3. *Для того чтобы законы распределения сумм* (1) *сходились к предельному, логарифм характеристической функции которо-*

го дается формулой (2) $(0 < \alpha < 2)$, *при условии, что коэффициенты* B_n *выбираются равными*

$$B_n = an^{\frac{1}{\alpha}},$$

где a — *постоянное, необходимо и достаточно, чтобы закон* $F(x)$ *был представим в виде*:

$$F(x) = (a_1 + \alpha_1(x)) \frac{1}{|x|^\alpha} \quad \text{при } x < 0,$$
$$F(x) = 1 - (a_2 + \alpha_2(x)) \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{при } x > 0,$$

где a_1 *и* a_2 — *неотрицательные постоянные, а функции* $\alpha_1(x)$ *и* $\alpha_2(x)$ *удовлетворяют условию*

$$\lim_{x \to -\infty} \alpha_1(x) = \lim_{x \to +\infty} \alpha_2(x) = 0.$$

Отметим еще одно свойство закона Гаусса, которое отличает его от других устойчивых законов.

Теорема 4. *Если законы распределения сумм* (3) *для некоторой последовательности* K_n *при* $B'_n = a\sqrt{K_n}$, *где* a — *постоянное, сходятся к закону Гаусса, то к нему же сходятся законы распределения сумм* (1), *причем следует положить* $B_n = a\sqrt{n}$.

Аналогичная теорема (с заменой $\sqrt{K_n}$ на $K_n^{\frac{1}{\alpha}}$) для других устойчивых законов неверна.

Поступило
1 VII 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Я. Хинчин, Предельные законы для сумм независимых случайных величин, 86—104 (1938). [2] Б. В. Гнеденко, О предельных теоремах для сумм независимых слагаемых, ДАН, XVIII, № 4—5 (1938). [3] W. Doeblin, Compt. Rend. de l'Acad. des Sciences de Paris, **206** (1938).