Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 1

МАТЕМАТИКА

Е. ЛЯПИН

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РАЗЛОЖЕНИЙ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ В ПРЯМЫЕ СУММЫ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 4 V 1939)

В настоящей работе будут рассмотрены некоторые свойства абелевых групп без кручения, т. е. коммутативных групп, не содержащих кроме 0 элементов конечного порядка. Так как никаких других групп мы касаться не будем, то в дальнейшем эти свойства рассматриваемых групп мы не будем оговаривать каждый раз особо. Все время мы будем употреблять аддитивную запись для действий над элементами групп. Приводимые здесь результаты, относящиеся к вопросам о разложимости групп в прямые суммы, могут представить самостоятельный интерес; они будут также использованы для получения дальнейших результатов в той же области, приводимых в статье «Разложение исчислимых абелевых групп без кручения в прямые суммы групп первого ранга» (см. ниже). Доказательств делаемых здесь утверждений я не привожу, ограничиваясь краткими указаниями на направления, по которым они могут быть проведены.

§ 1. Сперва в качестве вспомогательного материала рассмотрим такие множества натуральных чисел, каждое из которых: 1) вместе со всяким числом содержит все его делители, 2) вместе со всякими двумя числами содержит их общее наименьшее кратное. Будем говорить, что одно такое множество α есть делитель другого β $\left(\text{в символах } \frac{\alpha}{\beta}\right)$, если $\alpha \subset \beta$. Пересечение некоторой совокупности таких множеств назовем их общим наибольшим делителем (который очевидно будет множеством такого же типа). Под произведением такого множества α на натуральное число n $(n\alpha)$ будем понимать множество чисел вида ma, где $\frac{m}{n}$ и $a \in \alpha$. Будем говорить, что множества α и β эквивалентны между собой $(\alpha \sim \beta)$, если найдутся два таких числа n и m, что $n\alpha = m\beta$. Это свойство эквивалентности очевидно симметрично, рефлексивно и транзитивно, а следовательно совокупность всех таких множеств разбивается на взаимно непересекающиеся классы эквивалентных между собой множеств. Будем говорить, что один такой класс $\bar{\alpha}$ есть делитель другого $\bar{\beta}$ $\left(\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}\right)$, если найдутся такие множества $\alpha \in \bar{\alpha}$ и $\beta \in \bar{\beta}$, что $\frac{\alpha}{\beta}$. Если при этом $\bar{\alpha} \neq \bar{\beta}$, то $\bar{\alpha}$ назовем собственным делителем $\bar{\beta}$. Легко показать, что для делимости классов имеют место свойства: 1) если $\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$ и $\frac{\bar{\beta}}{\bar{\gamma}}$, то $\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\gamma}}$, 2) если $\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$ и $\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}$, то $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$. При помощи множеств, взятых по одному из каждого класса, устанавливается понятие и существование общего наибольшего делителя для конечной совокупности классов.

§ 2. Пусть $\mathfrak{H}$ есть некоторая подгруппа $\mathfrak{G}$. Если из условия $nX \in \mathfrak{H}$, где n — некоторое натуральное число, а X — элемент из $\mathfrak{G}$, всегда следует $X \in \mathfrak{H}$, то назовем $\mathfrak{H}$ нерасширяемой подгруппой $\mathfrak{G}$. Пересечение нерасширяемых подгрупп есть всегда нерасширяемая подгруппа. Пересечение всех нерасширяемых подгрупп, содержащих некоторый комплекс $\mathfrak{A}$, назовем расширением $\mathfrak{A}$ и обозначим через $\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$. Расширение есть нерасширяемая подгруппа. Прямое слагаемое группы есть нарасширяемая подгруппа. Расширение комплекса, состоящего из одного элемента, есть группа первого ранга.

Если имеет место равенство $nX = G$, где G и X суть некоторые элементы группы $\mathfrak{G}$, а n — некоторое натуральное число, то будем говорить, что элемент G делится на число n. Пусть $\mathfrak{A}$ есть некоторый комплекс элементов из $\mathfrak{G}$. Будем говорить, что $\mathfrak{A}$ делится на n, если хотя бы один элемент, принадлежащий $\mathfrak{A}$, делится на n. Пусть $\mathfrak{A}$ есть некоторый класс смежности, т. е. комплекс элементов вида $G + \mathfrak{H}$, где G есть элемент из $\mathfrak{G}$, а $\mathfrak{H}$ — некоторая подгруппа $\mathfrak{G}$, тогда совокупность всех чисел делителей $\mathfrak{A}$ есть множество типа, рассмотренного в § 1. Назовем это множество характеристикой $\mathfrak{A}$ и обозначим через $\chi(\mathfrak{A})$. Класс множеств, эквивалентных множеству $\chi(\mathfrak{A})$, назовем надтипом $\mathfrak{A}$ и обозначим через $\sigma(\mathfrak{A})$ (отметим, что $\mathfrak{A}$ может состоять и из одного элемента, когда $\mathfrak{H} = 0$).

Будем говорить, что класс эквивалентных между собою множеств типа § 1 есть надтип, принадлежащий к группе $\mathfrak{H}$, если в $\mathfrak{H}$ существует элемент X, надтип которого есть как раз этот класс $\sigma\, [\sigma(X) = \sigma]$. Элемент Y, принадлежащий некоторому комплексу элементов $\mathfrak{A}$, назовем старшим в $\mathfrak{A}$, если $\sigma(Y)$ не является собственным делителем никакого надтипа $\sigma(A)$, где $A \in \mathfrak{A}$.

Пусть σ есть некоторый надтип, принадлежащий группе $\mathfrak{H}$. Введем в рассмотрение следующие нерасширяемые подгруппы $\mathfrak{H}$: 1) $\underline{\mathfrak{H}}(\sigma)$ — расширение комплекса, состоящего из тех элементов из $\mathfrak{H}$, надтипы которых не являются собственными делителями σ; 2) $\bar{\mathfrak{H}}(\sigma)$ — расширение комплекса, состоящего из тех элементов из $\mathfrak{H}$, надтипы которых не являются делителями σ; 3) $\tilde{\bar{\mathfrak{H}}}(\sigma)$ — совокупность тех элементов из $\mathfrak{H}$, надтипы которых делятся на σ. Элемент $X \in \mathfrak{H}$, удовлетворяющий условию $\chi(X) = \chi(X + \bar{\mathfrak{H}}(\sigma(X)))$, назовем правильным в $\mathfrak{H}$.

Отметим, что условие $\sigma(A + \mathfrak{A}) = \sigma(B + \mathfrak{B})$, где A и B суть некоторые элементы, а $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — некоторые нерасширяемые подгруппы, $\mathfrak{G}$ эквивалентно условию наличности изоморфизма между двумя фактор-группами первого ранга: $\frac{\mathfrak{R}(A + \mathfrak{A})}{\mathfrak{A}} \cong \frac{\mathfrak{R}(B + \mathfrak{B})}{\mathfrak{B}}$. Условие $\chi(A + \mathfrak{A}) = \chi(B + \mathfrak{B})$ эквивалентно условию наличности такого изоморфизма $\frac{\mathfrak{R}(A + \mathfrak{A})}{\mathfrak{A}} \cong \frac{\mathfrak{R}(B + \mathfrak{B})}{\mathfrak{B}}$, при котором классу $A + \mathfrak{A}$ соответствует класс $B + \mathfrak{B}$.

§ 3. Лемма 1. *Пусть имеет место разложение группы* $\mathfrak{G}$ *в прямую сумму:* $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B} \oplus \ldots$ *и пусть для элемента* $X \in \mathfrak{G}$ *имеет место* $X = A + B + \ldots$, *где* $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}, \ldots$, *тогда характеристика* $\chi(X)$ *равна общему наибольшему делителю характеристик* $\chi(A)$, $\chi(B), \ldots$

Лемма 2. *Пусть* $\mathfrak{H}$ *есть нерасширяемая подгруппа* $\mathfrak{G}$, *причем* $\operatorname{rang}\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{H}}\right) = 1$, *и пусть существует такой элемент* $X \bar{\in} \mathfrak{H}$, *что*

$\chi(X)=\chi(X+\mathfrak{H})$, *тогда имеет место следующее разложение* $\mathfrak{G}$ *в прямую сумму:* $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{R}(X)$.

Пусть $\mathfrak{H}$ есть некоторая нерасширяемая подгруппа $\mathfrak{G}$, причем rang $\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{H}}\right)=1$. Обозначим через $\mathfrak{F}$ комплекс, состоящий из элементов $\mathfrak{G}$, не содержащихся в $\mathfrak{H}$. Условимся для краткости говорить, что элемент X удовлетворяет условию $[X, \mathfrak{H}]$, если выполняются равенства:

$$\sigma(X)=\sigma(X+\mathfrak{H}),\ \chi(X+\mathfrak{H})=\chi(X+\tilde{\mathfrak{H}}(\sigma(X))).$$

Теперь дадим необходимое и достаточное условие того, чтобы $\mathfrak{H}$ являлась прямым слагаемым $\mathfrak{G}$.

Теорема 1. *a) Если* $\mathfrak{H}$ *является прямым слагаемым* $\mathfrak{G}$, *то множество старших элементов комплекса* $\mathfrak{F}$ *не пусто и каждый элемент* X *этого множества удовлетворяет условию* $[X, \mathfrak{H}]$.

b) Если $\mathfrak{H}$ *не является прямым слагаемым* $\mathfrak{G}$, *то в* $\mathfrak{F}$ *не существует элементов* X, *удовлетворяющих условию* $[X, \mathfrak{H}]$.

Пусть имеет место разложение $\mathfrak{G}=\mathfrak{S}\oplus\mathfrak{G}$. В этом случае старшими элементами комплекса $\mathfrak{F}$ будут элементы, представимые в виде $X=S+H$, где $S\in\mathfrak{S}$, причем $S\neq 0$ и $H\in\tilde{\mathfrak{H}}(\sigma(S))$. Пользуясь леммой 1, сразу получаем $\chi(X)\sim\chi(S)$, $\chi(X+\mathfrak{H})=\chi(S)$ и $\chi(X+\tilde{\mathfrak{H}}(\sigma(X)))=\chi(S)$, что и означает, что X удовлетворяет условию $[X, \mathfrak{H}]$.

Теперь допустим, что в $\mathfrak{F}$ существует элемент X, удовлетворяющий условию $[X, \mathfrak{H}]$, тогда, пользуясь некоторыми общими свойствами характеристик элементов, можно построить такой элемент $Y\in\mathfrak{F}$, что $\chi(Y)=\chi(Y+\mathfrak{H})$. Согласно лемме 2 в этом случае $\mathfrak{H}$ будет прямым слагаемым $\mathfrak{G}$.

Теорема 2. *Пусть группа* $\mathfrak{G}$ *разложима в прямую сумму групп первого ранга и пусть* X *есть некоторый не нулевой элемент из* $\mathfrak{G}$, *тогда для того, чтобы существовало разложение* $\mathfrak{G}$ *в прямую сумму групп первого ранга, содержащую в качестве одного из слагаемых* $\mathfrak{R}(X)$, *необходимо и достаточно, чтобы элемент* X *был правильным.*

Необходимость условия теоремы следует из того, что из разложения $\mathfrak{G}$ в прямую сумму групп первого ранга, содержащую в качестве одного из слагаемых $\mathfrak{R}(X)$, нетрудно получить разложение $\mathfrak{G}$ в прямую сумму, содержащую среди своих слагаемых группы $\mathfrak{R}(X)$ и $\overline{\mathfrak{G}}(\sigma(X))$. Из существования такого разложения правильность X следует непосредственно.

Пусть дано некоторое разложение $\mathfrak{G}$ в прямую сумму групп первого ранга $\mathfrak{G}=\mathfrak{S}_1\oplus\mathfrak{S}_2\oplus\ldots\oplus\mathfrak{S}_n\oplus\mathfrak{S}_\alpha\oplus\mathfrak{S}_\beta\oplus\ldots$ Это разложение вызывает соответствующее разложение элемента X: $X=S_1+S_2+\ldots+S_n$, где $S_i\in\mathfrak{S}_i$ $(i=1, 2,\ldots n)$. Для доказательства достаточности следует рассмотреть последовательность нарасширяемых подгрупп $\mathfrak{H}_1\subset\mathfrak{H}_2\subset\ldots$ $\ldots\mathfrak{H}_n\subset\mathfrak{H}_{n+1}$, где $\mathfrak{H}_1=\overline{\mathfrak{G}}\,\sigma(X))$, $\mathfrak{H}_2=\mathfrak{R}(\overline{\mathfrak{G}}(\sigma(X)), X)$ и $\mathfrak{H}_k=\mathfrak{R}(\overline{\mathfrak{G}}(\sigma(X)), X, S_2, S_3,\ldots S_{k-1})$ $(k=3, 4,\ldots n+1)$. Ранги фактор-групп $\frac{\mathfrak{H}_{k+1}}{\mathfrak{H}_k}$ все равны 1 или 0 (если группы совпадают). Пользуясь теоремой 1, можно показать, что $\mathfrak{H}_k$ является прямым слагаемым $\mathfrak{H}_{k+1}$ $(k=2, 3,\ldots n)$. Согласно же лемме 2, поскольку X правилен, существует разложение $\mathfrak{H}_2=\mathfrak{H}_1\oplus\mathfrak{R}(X)$. Пользуясь указанными разложениями и разложением $\mathfrak{H}_1$ в прямую сумму групп первого ранга, нетрудно построить желаемое разложение $\mathfrak{G}$.

Институт математики и механики.
Ленинградский государственный университет.

Поступило
5 V 1939.