Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 5

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М. И. ГОРБУНОВ-ПОСАДОВ

БАЛКИ И ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ПЛИТЫ, ЛЕЖАЩИЕ НА ОСНОВАНИИ, ПРИНИМАЕМОМ ЗА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 5 V 1939)

1. Задача о расчете балок, лежащих на основании, принимаемом за упругую среду, разрабатывалась рядом главным образом советских авторов [1–8]. Однако в своих решениях эти авторы исходили в порядке приближения либо из условий плоской задачи теории упругости, либо из условий пространственной задачи, но с введением произвольных упрощающих предпосылок. Предлагаемое нами решение проведено в точных условиях пространственной задачи. Решение исходит из полученной нами формулы для определения деформации поверхности упругого полупространства под любой нагрузкой, закон распределения которой по прямоугольной площадке выражается непрерывной (вместе с ее производными) функцией. Эта формула позволяет также решить задачу об абсолютно жестких прямоугольных плитах и дает необходимую основу для разработки метода расчета плит конечной жесткости.

2. Вертикальные перемещения поверхности упругого полупространства $w(x,y)$ от нормальных давлений $p(x,y)$, распределенных по прямоугольнику со сторонами $2a$ и $2b$, согласно уравнению Буссинека [9], выражаются формулой:

$$w(x,y)=\frac{(1-\nu_0^2)\,ab}{\pi E_0}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{p(\bar{x},\bar{y})\,d\bar{x}d\bar{y}}{\sqrt{a^2(\bar{x}-x)^2+b^2(\bar{y}-y)^2}}\,. \tag{1}$$

В формуле (1) ν_0 и E_0—коэффициент Пуассона и модуль упругости основания; x и y—координаты перемещающей точки, приведенные к полусторонам прямоугольника ($x=\frac{x'}{a}$, $y=\frac{y'}{b}$, где x' и y'—действительные координаты); $\bar{x}$ и $\bar{y}$—приведенные координаты элемента нагрузки. Начало координат помещено в центр прямоугольника, ось x направлена параллельно большей стороне $2a$. Двойной интеграл распространяется на всю площадь F прямоугольника.

После замены в формуле (1)

$$\bar{x}=x+\xi,\quad \bar{y}=y+\eta,$$

разложения числителя и знаменателя подынтегрального выражения в двойные ряды по степеням ξ и η и интегрирования нами получено выражение, позволяющее определить перемещения поверхности основания при заданном давлении с помощью квадратур. В частном случае, когда закон распределения давлений задан в виде двойного бесконечного степенного ряда

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} x^i y^j, \tag{2}$$

выражение для $w(x, y)$ напишется также в виде двойного ряда

$$w(x, y) = \frac{(1-\nu_0^2)a}{\pi E_0} \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{u,v,i,j} a_{ij} \right) x^u y^v, \tag{3}$$

где

$$c_{u,v,i,j} = i!\, j! \sum_{m=M}^{i} \sum_{n=N}^{j} \frac{\beta^{v-j} [(-1)^m + (-1)^{u+m-i}] [(-1)^n + (-1)^{v+n-j}]}{(i-m)!\,(j-n)!\,m!\,n!\,(u+m-i)!\,(v+n-j)!} \cdot$$

$$\cdot \frac{d^{v+n-j}}{d\beta^{v+n-j}} \int_0^{\beta} t^{n-u+i} \int_0^{\frac{1}{t}} \frac{d^{u+m-i}}{dz^{u+m-i}} \frac{z^m}{\sqrt{1+z^2}}\, dz\, dt, \qquad 4)$$

причем при $i \leqslant u$ $M = 0$; при $i \geqslant u$ $M = i - u$; при $j \leqslant v$ $N = 0$; при $j \geqslant v$ $N = j - v$; $\beta = \frac{b}{a} \leqslant 1$.

3. Однако при расчете балок и плит на упругом основании закон давлений неизвестен, и задача состоит в его определении. Для случая абсолютно жестких плит решение несложно. Например, в случае нагрузки, симметричной относительно обеих координатных осей, будем искать закон давлений в виде ряда (2), оставив в нем в силу симметрии только члены с четными степенями x и y и перейдя поэтому к удвоенным индексам $2i$, $2j$. Из рассмотрения равенств (4) легко заметить, что в случае четности функций $p(x, y)$ в ряду (3) должны остаться тоже только члены с четными степенями x и y.

Выпишем условие равновесия плиты, проинтегрировав уравнение (2):

$$4ab \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_{2i,2j}}{(2i+1)(2j+1)} = P \tag{5}$$

(P — суммарная нагрузка на плиту).

Уравнение (5) будет первым в бесконечной системе уравнений, остальные уравнения которой получим как следствие требования постоянства перемещений под плитою, путем приравнивания нулю коэффициентов при всех произведениях $x^{2u}y^{2v}$ (кроме x^0y^0) в уравнении (3). Бесконечную систему решаем приближенно, выделив из нее «укороченную» систему из $\frac{n(n+3)}{2} + 1$ первых уравнений относительно стольких неизвестных $a_{2i,2j}$, что дает возможность определить коэффициенты полинома степени $2n$, который будет приближением к ряду (2). Благодаря вычисленным нами с помощью уравнений (4) простым алгебраическим формулам для определения $c_{u,v,i,j}$ (при $u, v, i, j \leqslant 6$) решение проводится для плиты с любым отношением сторон $\frac{b}{a}=\beta$ достаточно быстро.

Для квадрата таким образом получена формула:

$$p(x, y)=[0.56+0.26(x^2+y^2)+0.30(x^4+y^4)-0.02\,x^2y^2+0.50(x^6+y^6)+ +0.03(x^4y^2+x^2y^4)]\frac{P}{F}.$$

Осадка квадратного штампа

$$w=\frac{0.92(1-\nu_0^2)}{E_0}\frac{P}{\sqrt{F}}.$$

Это решение весьма близко к точному решению Буссинека для круглого штампа ([9]).

В случае, если нагрузка имеет эксцентриситет, задача решается аналогично. Приведем значение тангенса угла наклона квадратного штампа при действии на него момента в направлении одной из координатных осей:

$$\operatorname{tg}\alpha=0.60\frac{(1-\nu_0^2)}{a^3E_0}\mathfrak{M}.$$

Заметим, что при расчете плит, так же как ниже и при расчете балок, мы пренебрегаем трением между плитою (балкою) и основанием.

4. Для расчета балок формулы (4) сильно упрощаются ввиду возможности пренебречь квадратами и более высокими степенями величины β. Считая, что нагрузка симметрична относительно продольной оси x, получим следующие формулы для определения коэффициентов при четных степенях x и y в уравнении (3):

при $v\neq 0,\quad i\neq u$

$$c_{2u,\,2v,\,2i,\,2j}=0,$$

при $v\neq 0,\quad i=u$

$$c_{2u,\,2v,\,2i,\,2j}=\frac{4}{2v(2j-2v+1)},$$

при $v=0;\quad i\neq u$

$$c_{2u,\,2v,\,2i,\,2j}=\frac{4}{(2i-2u)(2j+1)}, \tag{6}$$

при $v=0,\quad i=u$

$$c_{2u,\,2v,\,2i,\,2j}=\frac{4}{2j+1}\left(\ln 2\alpha-d_{2u}+\frac{1}{2j+1}\right),$$

где

$$d_{2u}=-(2u)!\sum_{m=1}^{m=2u}\frac{(-1)^m}{(2u-m)!\,m\cdot m!}.$$

Значения $c_{2u+1,2v,\,2i+1,2j}$ (коэффициентов при нечетных степенях x) определяются также по формулам (6) с заменою в них $2u$ на $2u+1$ и $2i$ на $2i+1$.

Дальнейшее упрощение расчета получим, если используем условие абсолютной жесткости балок на упругом основании в поперечном направлении. Это условие является следствием малого значения ширины балки; при таких размерах показатель гибкости [7, 8] оказывается настолько близким к нулю, что предположение об абсолютной жесткости является практически точным наподобие того, как это имеет место при пользовании гипотезой Винклера.

Итак, считая, что перемещения под балкой в поперечном направлении не зависят от y, приравниваем нулю все коэффициенты в уравнении (3) при степенях y, отличных от нуля. Согласно равенствам (6) это требование приведет к распадающейся бесконечной системе уравнений:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_{u,2j}}{2j-2v+1}=0 \quad \left\{ \begin{array}{l} u=0,1,2,3\ldots \\ v=1,2,3\ldots \end{array} \right., \tag{7}$$

точное решение которых относительно коэффициентов $a_{u,o}$ [4, 7]:

$$a_{u,2j}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2j-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2j}\,a_{u,o}. \tag{8}$$

Можно показать, что вследствие равенств (8) закон давлений на основание будет выражаться формулой

$$p(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{a_{i,0}x^{i}}{\sqrt{1-y^2}}, \tag{9}$$

которая указывает, что давления в поперечном направлении будут иметь форму эпюры Садовского для бесконечной жесткой полосы [9].

Для средних давлений, приходящихся на данное поперечное сечение, окажется верной формула

$$p(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i,$$

где

$$a_i=\frac{\pi}{2}\,a_{i,0}. \tag{9'}$$

Уравнение перемещений основания в случае симметричной относительно середины балки нагрузки принимает форму:

$$w(x)=\frac{4(1-\nu_0^2)\,b}{\pi E_0}\sum_{u=0}^{\infty}\Big[\sum_{\substack{i=0\\ i\neq u}}^{\infty}\frac{a_{2i}}{2i-2u}+(\ln 4\alpha-d_{2u})a_{2u}\Big]x^{2u}. \tag{10}$$

В случае нагрузки несимметричной прибавляются аналогичные члены с заменой $2u$ на $2u+1$ и $2i$ на $2i+1$.

Уравнение изгиба балки при всякой нагрузке можно написать (точно или приближенно) в форме бесконечного ряда, действительного для всей балки в целом [7]. В силу тождества прогибов балки и перемещений основания под балкою $y(x)\equiv w(x)$ приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в уравнениях прогибов балки

$$y=y(x)$$

и перемещений основания

$$w=w(x). \tag{10'}$$

Вместе с условием равновесия эти равенства дадут бесконечную систему уравнений относительно неизвестных a_i. Достаточная точность будет обеспечена, если будет решена укороченная система относительно a_i от a_0 до a_{i_0} исключительно. Теория подобных систем уравнений разработана Л. В. Канторовичем и В. И. Крыловым ([10]).

Так, в случае нагрузки сосредоточенной силой P, приложенной в середине балки, получим следующие уравнения укороченной системы:

$$\begin{gathered}
\sum_{i=0}^{5} \frac{a_{2i}}{2i+1} = \frac{P}{2a}; \\
\sum_{\substack{i=0 \\ i\neq 1}}^{5} \left(\frac{1}{2i-2} - \frac{\varkappa_{2i}}{2\beta}\right) a_{2i} + \left(\ln 4\alpha - d_2 - \frac{\varkappa_2}{2\beta}\right) a_2 = -\frac{1}{2\beta}\left(\frac{Pt}{2a} + r_2\right); \qquad (11) \\
\sum_{\substack{i=0 \\ i\neq u}}^{5} \frac{a_{2i}}{2i-2u} + (\ln 4\alpha - d_{2u})\, a_{2u} + \frac{\lambda_{2u-4}}{2u\beta}\, a_{2u-4} = -\frac{r_{2u}}{2u\beta} \quad (u = 2, 3, 4, 5).
\end{gathered}$$

В этих уравнениях: t—показатель гибкости балки

$$t = \frac{(1-\nu_1^2)\,\pi E_0 b a^3}{2\,(1-\nu_0^2)\,E_1 I}$$

($E_1 I$—жесткость балки, ν_1—коэффициент Пуассона для материала балки);

$$\varkappa_{2i} = \frac{t}{(2i+1)(2i+2)}; \quad \lambda_{2u-4} = \frac{t}{(2u-3)(2u-2)(2u-1)}; \quad r_{2u} = t\rho_{2u}\frac{P}{a};$$

$$\rho_2 = -0.0185, \quad \rho_4 = -0.7963, \quad \rho_6 = 2.1943, \quad \rho_8 = -3.3384, \quad \rho_{10} = 1.7657.$$

Все другие случаи нагрузок решаются также с помощью системы (11) с заменою в ней свободных членов другими, как это объяснено нами в статье о расчете балок в условиях плоской задачи ([7]), где приведены готовые значения этих членов для всевозможных нагрузок. При несимметричной нагрузке к системе (11) добавляется вторая система относительно a_{2i+1}, состоящая из 5 уравнений и почти аналогичная первой.

5. Большое практическое значение предлагаемого расчета балок на упругом основании заключается в том, что он дает значительное снижение (по изгибающим моментам) излишнего запаса прочности под колоннами ленточных фундаментов по сравнению с расчетом в условиях плоской задачи, и в пролетах тех же фундаментов по сравнению с расчетом по гипотезе Винклера.

Научно-исследовательский институт водоснабжения, канализации, гидротехнических сооружений и инженерной гидрогеологии
Москва

Поступило
8 V 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Wieghardt, ZS für ang. Math. u. Mech., 2, H. 3 (1922). [2] Г. Э. Проктор, Диссертация в Ленингр. технол. ин-те (1922). [3] Н. М. Герсеванов и Я. А. Мачерет, Сборн. № 8 НИС «Фундаментстроя» (1937). [4] В. А. Флорин, Сборн. № 1 и № 2 Гидроэнергопроекта (1936—1937). [5] Б. Н. Жемочкин, Расчет балок на упругом полупространстве и полуплоскости (1937). [6] В. И. Кузнецов, Балки на сплошном упругом основании (1938). [7] М. И. Горбунов-Посадов. Сборн. № 8 НИС «Фундаментстроя» (1937). [8] М. И. Горбунов-Посадов, Таблицы для расчета балок на упругом основании (1939). [9] С. П. Тимошенко, теория упругости (1937). [10] Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Методы приближенного решения уравнений в частных производных (1936).