

## ПОЛУЧЕНИЕ ТОНКИХ ВОЛОКОН ИЗ РАСПЛАВА.

## III. ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ НАМОРАЖИВАЕМОГО ВОЛОКНА

На процесс формирования металлического волокна при быстрой закалке расплава оказывают решающее влияние тепловые условия его охлаждения и затвердевания, причем теплоотдача диску-кристаллизатору зависит от распределения температуры в расплаве.

Учитывая специфику быстрой закалки расплава, можно считать, что температура закалочного диска постоянна вследствие его больших размеров, массы и высокой теплопроводности. Кроме того, отдача тепла в воздух по сравнению с теплопередачей в закалочный диск пренебрежимо мала, а тепло, отводящееся из намораживаемого волокна, передается в закалочный диск радиально-симметрично. Уравнение Фурье в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (1)$$

при краевых условиях

$$T = T_0' \text{ при } t = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \text{ при } r = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha(T - T_n) \text{ при } r = h,$$

где  $\alpha = K^n/\lambda$ ;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $K^n$  — коэффициент теплообмена (по закону Ньютона);  $T_n$  — температура диска-кристаллизатора;  $T_0'$  — температура расплава.

Для решения параболического уравнения (1) необходимо сделать следующие допущения [1]: расчет ведется только для однофазной части (жидкой или твердой), когда отсутствуют внутренние источники тепла; несмотря на большие температурные градиенты, соблюдается неравенство  $\tau_p(\partial q/\partial t) \ll \lambda \Delta T$ , где  $\tau_p$  — время релаксации;  $q$  — тепловой поток; конвективным теплообменом можно пренебречь, так как  $(Gr, Pr) \ll 10^3$ , где  $Gr, Pr$  — критерии Грасгофа и Прандтля соответственно.

С учетом допущений для интегрирования уравнения (1) с краевыми условиями (2) используем интегральное преобразование Лапласа [2—4]

$$L[T(t)] = \bar{T}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} T(t) dt = u, \quad (3)$$

где  $t$  — действительная переменная (время);  $s = \sigma + i\omega$  — комплексная переменная;  $L[T(t)]$  — операция прямого интегрирования преобразования Лапласа.

С учетом (3) вместо (1) и (2) будем иметь

$$a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = su - T_0', \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=h} = -\alpha \left( u - \frac{T_n}{s} \right). \quad (5)$$

Уравнение (4) приводим к однородному уравнению путем замены

$$u = v + \frac{T_0'}{s}. \quad (6)$$

Учитывая соотношение (6) и замену переменных  $r = hx$ , получаем

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{sh^2}{a^2} v = 0, \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=1} = -\alpha h \left( v + \frac{T_0' - T_{\pi}}{s} \right). \quad (8)$$

Вводя в уравнение (7) обозначение  $\mu^2 = -sh^2/a^2$ , получаем уравнение для функции Бесселя. Общее решение дифференциального уравнения (7) имеет вид

$$v(r, s) \equiv v(hx, s) \equiv v(x, s) = c_1 J_0(\mu x) + c_2 N_0(\mu x), \quad (9)$$

где  $J_0, N_0$  — цилиндрические функции нулевого порядка первого и второго рода (функции Бесселя и Неймана) соответственно.

Из граничных условий (8) находим

$$\begin{aligned} \mu c_1 J_0'(\mu) + \mu c_2 N_0'(\mu) &= 0, \\ \mu c_1 J_1(\mu) &= \alpha h \left[ c_1 J_0(\mu) + \frac{T_0' - T_{\pi}}{s} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$c_2 = 0, \quad c_1 = \frac{\alpha h (T_0' - T_{\pi})}{s [\mu J_1(\mu) - \alpha h J_0(\mu)]}. \quad (10)$$

С учетом соотношений (10) общее решение (9) запишется в виде

$$u(r, s) = \frac{\alpha h (T_0' - T_{\pi})}{s [\mu J_1(\mu) - \alpha h J_0(\mu)]} J_0 \left( \frac{\mu r}{h} \right) + \frac{T_0'}{s} \equiv \frac{q_1(s)}{s q_2(s)}, \quad (11)$$

где

$$q_1(s) = \alpha h (T_0' - T_{\pi}) J_0 \left( \frac{\mu r}{h} \right) + T_0' q_2(s),$$

$$q_2(s) = \mu J_1(\mu) - \alpha h J_0(\mu).$$

Применим к функции (11) обратное преобразование Лапласа [3, 4]

$$T(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\omega}^{\sigma_0 + i\omega} u(r, s) e^{st} ds.$$

Замыкая контур интегрирования в левой полуплоскости и учитывая лемму Жордана [2], получаем

$$T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{выч} [u(r, s) e^{st}; s = s_n] + \text{выч} [u(r, s) e^{st}; s = 0], \quad (12)$$

где  $s_n$  — корни уравнения  $q_2(s) = \mu J_1(\mu) - \alpha h J_0(\mu) = 0$ ;  $\mu = h \sqrt{-s/a}$ .

Таким образом, если  $s_n$  —  $n$ -й корень уравнения  $q_2(s) = 0$ , то  $s_n = -\mu_n^2 a^2 / h^2$ . Корни  $s_n$  — действительные, простые и лежат на отрицательной части оси абсцисс. Поэтому

$$\begin{aligned} \text{выч} [u(r, s) e^{st}; s = s_n] &= \frac{q_1(s_n) e^{s_n t}}{s_n q_2'(s_n)} = \\ &= \frac{2(T_0' - T_{\pi}) J_1(\mu_n) J_0(\mu_n r/h)}{\mu_n [J_1^2(\mu_n) + J_0^2(\mu_n)]} \exp \left[ -\frac{\mu_n^2 a^2}{h^2} t \right], \\ \text{выч} [u(r, s) e^{st}; s = 0] &= \frac{q_1(0)}{q_2(0)} = T_{\pi}. \end{aligned}$$

С учетом последних соотношений решение (12) примет вид

$$T(r, t) = T_{\text{д}} + (T_0' - T_{\text{д}}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\mu_n) J_0(\mu_n r/h)}{\mu_n [J_1^2(\mu_n) + J_0^2(\mu_n)]} \exp \left[ -\mu_n^2 \frac{a^2}{h^2} t \right]. \quad (13)$$

Дифференцируя выражение (13) по времени  $t$ , получаем скорость охлаждения наморозенной нити

$$\begin{aligned} \dot{T}(r, t) &= \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = \\ &= -\frac{a^2 (T_0' - T_{\text{д}})}{h^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\mu_n) \mu_n J_0(\mu_n r/h)}{J_1^2(\mu_n) + J_0^2(\mu_n)} \exp \left[ -\mu_n^2 \frac{a^2}{h^2} t \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Из условия  $T(r, 0) = T_0'$  следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\mu_n) J_0(\mu_n r/h)}{\mu_n [J_1^2(\mu_n) + J_0^2(\mu_n)]} = 1$$

и представляет собой разложение функции  $f(r) = 1$  в ряд Фурье по функциям  $J_0(\mu_n r/h)$ , система которых ортогональна, так как

$$\int_0^h r J_0 \left( \mu_n \frac{r}{h} \right) J_0 \left( \mu_m \frac{r}{h} \right) dr = 0$$

в силу свойств корней  $\mu_n$  уравнения  $q_2(s) = 0$ . Поэтому функция  $f(r)$  в интервале  $[0, h]$  разложима в ряд Фурье вида

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) J_0 \left( \mu_n \frac{r}{h} \right),$$

где

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{\|J_0(\mu_n r/h)\|^2} \int_0^h f(r) J_0 \left( \frac{\mu_n r}{h} \right) r dr, \\ \|J_0(\mu_n r/h)\|^2 &= \int_0^h r J_0^2(\mu_n r/h) = \frac{h^2}{2} [J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]. \end{aligned}$$

На рис. 1, а, б представлены результаты расчета температурного

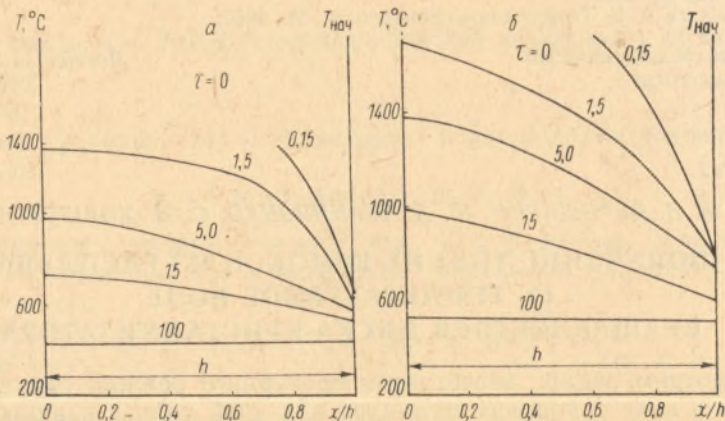


Рис. 1. Температурный профиль затвердевающей пленки расплава алюминия (а) и железа (б) ( $Bi > 30$ ) толщиной 20 мкм;  $t$  — время охлаждения (мкс)

профиля затвердевающей пленки расплава ( $Bi > 30$ ) толщиной 20 мкм для различных металлов в соответствии с формулой (13). Для случая идеального охлаждения, когда  $Bi > 30$ , кривые профиля температуры остаются непрерывными. Влияние времени охлаждения на изменение температуры быстроохлаждаемой пленки расплава показано на рис. 2. Точка перегиба на кривых соответствует моменту времени при продвижении фазовой границы твердая фаза — расплав, которая является плоским источником тепла и замедляет охлаждение. Через 8—10 мкс

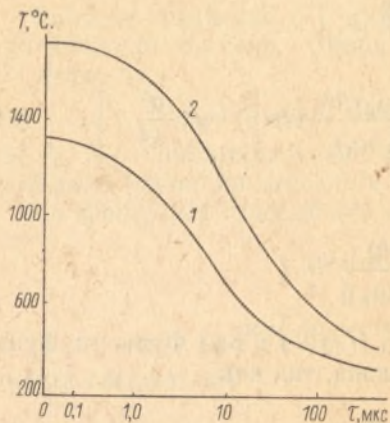


Рис. 2. Влияние времени охлаждения ( $Bi > 30$ ) на среднюю температуру быстроохлажденной пленки расплава алюминия (1) и железа (2) толщиной 20 мкм на медном кристаллизаторе

после начала охлаждения кривые температуры пленки (волокна) претерпевают излом — фронт кристаллизации достигает верхней поверхности волокна, теплота затвердевания перестает выделяться и скорость охлаждения резко повышается.

### Summary

The analytical dependences for the calculation of distribution temperature in freezing of the melt film and its velocity of cooling at the reception of metallic fibres by rapid melt hardening method on combined of the hardening crystallizer-disk. It is shown that in the case of ideal cooling the curve of temperature are retained continued, but their bend point on the curve appears because of the phase boundary movement solid state and melt. The velocity of fibre cooling in the moment of achievement the front crystallization its upper boundary rises quickly when the heat crystallization is stopped.

### Литература

1. Мирошниченко И. С. Закалка из жидкого состояния. М., 1982.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1984.
3. Козлов В. П. Двумерные осесимметричные нестационарные задачи теплопроводности. Минск, 1968.
4. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., 1967.

Гомельский политехнический институт

Поступила в редакцию 29.01.92

УДК 621.762

М. Н. ВЕРЕЩАГИН, Ю. Д. ЧЕРНИЧЕНКО, С. М. МОВШОВИЧ

## ПОЛУЧЕНИЕ ТОНКИХ ВОЛОКОН ИЗ РАСПЛАВА. IV. ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА-КРИСТАЛЛИЗАТОРА

Рассмотрим задачу расчета температурного режима диска-кристаллизатора в виде сплошного цилиндра конечной длины, вращающегося с постоянной угловой скоростью вокруг продольной оси, на который в момент времени  $t=0$  оказывает воздействие «точечный» источник тепла