Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 8

ФИЗИКА

К. В. НИКОЛЬСКИЙ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ В ТЕОРИИ ХАРАКТЕРИСТИК

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 17 I 1939)

При исследовании характеристик уравнений квантовой частицы встречается следующая задача. Пусть дано уравнение, которое мы назовем лорентцевским уравнением:

$$\frac{\partial^2 A_\rho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_\rho}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_\rho}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_\rho}{\partial t^2}=\lambda^2 A_\rho \quad (\rho=1,2,3,4). \tag{1}$$

Поставим себе задачу заменить это уравнение системой линейных уравнений в частных производных первого порядка с постоянными коэффициентами типа [1]:

$$\sum_{\sigma=1}^{4}\left(\alpha^{4}_{\rho\sigma}\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x_4}+\alpha^{x}_{\rho\sigma}\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x}+\alpha^{y}_{\rho\sigma}\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial y}+\alpha^{z}_{\rho\sigma}\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial z}-\alpha^{m}_{\rho\sigma}\lambda\Phi_\sigma\right)=0, \tag{2}$$

где $\alpha^{x}_{\rho\sigma}$, $\alpha^{y}_{\rho\sigma}$, $\alpha^{z}_{\rho\sigma}$, $\alpha^{m}_{\rho\sigma}$ — постоянные коэффициенты и Φ_σ — четыре, вообще комплексные функции, связанные с A_ρ соотношениями

$$\Phi_\sigma=\sum_{\rho=1}^{4}\left(\beta^{4}_{\sigma\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial x_4}+\beta^{x}_{\sigma\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial x}+\beta^{y}_{\sigma\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial y}+\beta^{z}_{\sigma\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\beta^{m}_{\sigma\rho}\lambda A_\rho\right), \tag{3}$$

причем коэффициенты $\alpha_{\rho\sigma}$ и $\beta_{\sigma\rho}$ должны быть таковы, чтобы удовлетворялись для A_ρ уравнения (1). Введем матрицы:

$$(\alpha^{4}_{\rho\sigma})=\delta_{\rho\sigma} \quad \beta^{4}_{\rho\sigma}=-\delta_{\rho\sigma}, \quad \text{где } \delta_{\rho\sigma}=\begin{matrix}1 \text{ при } \rho=\sigma\\ 0 \text{ при } \rho\neq\sigma\end{matrix}$$

$$\alpha^4=\begin{matrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{matrix} \quad \beta^4=-\alpha^4$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha^x=\begin{matrix}0&0&0&-1\\0&0&-i&0\\0&+i&0&0\\-1&0&0&0\end{matrix}, \quad \alpha^y=\begin{matrix}0&0&i&0\\0&0&0&-1\\-i&0&0&0\\0&-1&0&0\end{matrix}\\ \alpha^z=\begin{matrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{matrix}\end{matrix}\right\}. \tag{4}$$

Матрицы эрмитовы, так как $\alpha^k_{\rho\sigma} = \overline{\alpha}^k_{\sigma\rho}$, и удовлетворяют следующим условиям:

$$(\alpha^x)^2 = (\alpha^y)^2 = (\alpha^z)^2 = 1, \quad \alpha^x \cdot \alpha^y \cdot \alpha^z = i, \tag{5}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha^x\alpha^y = i\alpha^z & \alpha^x\alpha^z + \alpha^z\alpha^x = 0 \\ \alpha^y\alpha^z = i\alpha^x & \alpha^y\alpha^z + \alpha^z\alpha^y = 0 \\ \alpha^z\alpha^x = i\alpha^y & \alpha^y\alpha^x + \alpha^x\alpha^y = 0 \end{array}\right\} . \tag{6}$$

В качестве матриц β^x, β^y, β^z мы возьмем $\overline{\alpha}_x$, $\overline{\alpha}_y$, $\overline{\alpha}_z$.

Тогда наша задача при $\lambda = 0$ является задачей получения уравнений Максвелла для вакуума по данным уравнениям потенциалов.

В самом деле, явный вид уравнений (2) при $\lambda = 0$ таков:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} - \frac{\partial\Phi_4}{\partial x} + i\frac{\partial\Phi_3}{\partial y} - i\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} = 0 \\ \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi_2}{\partial t} - i\frac{\partial\Phi_3}{\partial x} - i\frac{\partial\Phi_4}{\partial y} + i\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = 0 \\ \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi_3}{\partial t} + i\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} - i\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_4}{\partial z} = 0 \\ \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi_4}{\partial t} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_3}{\partial z} = 0 \end{array}\right\} \tag{7}$$

и уравнений (3) при $\lambda = 0$ таков:

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_1 = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{\partial A_4}{\partial x} - i\frac{\partial A_3}{\partial y} + i\frac{\partial A_2}{\partial z} \\ \Phi_2 = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_2}{\partial t} + i\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_4}{\partial y} - i\frac{\partial A_1}{\partial z} \\ \Phi_3 = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_3}{\partial t} - i\frac{\partial A_2}{\partial x} + i\frac{\partial A_1}{\partial y} - \frac{\partial A_4}{\partial z} \\ \Phi_4 = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_4}{\partial t} - \frac{\partial A_1}{\partial x} - \frac{\partial A_2}{\partial y} - \frac{\partial A_3}{\partial z} \end{array}\right\} . \tag{8}$$

Предполагая A_ρ вещественными [в (1) i не входит], мы можем разделить в (7) и (8) вещественные и мнимые части, положив:

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_x = \sum_x + iH_x = \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{\partial A_4}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right) \\ \Phi_y = \sum_y + iH_y = \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial A_2}{\partial t} - \frac{\partial A_4}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial z}\right) \\ \Phi_z = \sum_z + iH_z = \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial A_3}{\partial t} - \frac{\partial A_4}{\partial z}\right) + i\left(\frac{\partial A_1}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial x}\right) \end{array}\right\}, \tag{9}$$

Φ_4 вещественно по (8).

Подставив (8) в (7), получим:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\varepsilon}}{\partial t} - \operatorname{grad}\Phi_4 + \operatorname{rot}\vec{H} = 0, & -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}\vec{E} = 0 \\ -\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi_4}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{H} = 0, & -\Phi_4 = \frac{1}{c}\frac{\partial A_4}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{A} \end{array}\right\}, \tag{10}$$

Матрицы (4), (5), (6) позволяют таким образом при линеаризации уравнения Лорентца получить уравнения Максвелла.

Физический институт им. П. Н. Лебедева.
Академия Наук СССР.
Москва.

Получено
17 I 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (A), **117**, 610, и **118**, 351 (1928).