Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 8

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. В. СОКОЛОВСКИЙ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

(*Представлено академиком А. Н. Крыловым 5 II 1937*)

Как известно, расчет симметрично загруженных оболочек вращения сведен Мейснером [1] к интеграции двух линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка вида *:

$$LL(\Theta)-\sigma hL\left(\frac{1}{R_1}\Theta\right)+\frac{\sigma h}{R_1}L(\Theta)+\left[-\frac{\sigma^2h^2}{R_1^2}+\lambda^2\right]\Theta=0, \tag{1}$$

$$LL(U)+\sigma hL\left(\frac{1}{R_1}U\right)-\frac{\sigma h}{R_1}L(U)+\left[-\frac{\sigma^2h^2}{R_1^2}+\lambda^2\right]U=0, \tag{2}$$

где через $L\,(\ldots)$ обозначен линейный дифференциальный оператор:

$$L\,(\ldots)=\frac{R_2h}{R_1^2}\left[\frac{d^2(\ldots)}{d\varphi^2}+\left\{\frac{R_1}{R_2}\,\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)+\operatorname{ctg}\varphi\right\}\frac{d(\ldots)}{d\varphi}-\frac{R_1^2}{R_2^2}\operatorname{ctg}^2\varphi\,(\ldots)\right]. \tag{3}$$

У нас приняты следующие обозначения: φ — угол между нормалью к поверхности и осью симметрии, R_1 — радиус кривизны меридиана, R_2 — второй главный радиус кривизны, $2h$ — толщина оболочки, σ — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, $\lambda^2=3(1-\sigma^2)$.

Мейснер показал, что (1) и (2) распадаются на уравнения второго порядка либо для оболочек с постоянной кривизной меридиана, либо всегда, если пренебречь σ, влияние которого, как это отмечается многими авторами [2, 3] и показано нами, весьма незначительно.

Тогда вместо уравнения (1) получатся два уравнения вида:

$$L(\Theta)+i\lambda\Theta=0, \tag{4}$$

$$L(\Theta)-i\lambda\Theta=0. \tag{5}$$

Такие же два уравнения для U будут вместо (2).

Итак, поставленная задача свелась к интеграции уравнения (4), которое, если вспомнить (3), будет:

$$\frac{d^2\Theta}{d\varphi^2}+\left\{\frac{R_1}{R_2}\,\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)+\operatorname{ctg}\varphi\right\}\frac{d\Theta}{d\varphi}+\left\{\frac{i\lambda R_1^2}{hR_2}-\frac{R_1^2}{R_2^2}\operatorname{ctg}^2\varphi\right\}\cdot\Theta=0. \tag{6}$$

Далее нами изучен вопрос о том, для каких поверхностей решения уравнения (6) могут быть получены в гипергеометрических рядах.

---

* Через Θ и U выражаются все усилия и перемещения оболочек.

Исследования * показали, что уравнение (6), кроме разобранных Рейснером ([5]) и Мейснером ([4]) случаев сферы, тора и конуса, может быть приведено к типу P. Riemann'a для катеноидальной оболочки.

Для катеноида

$$r = a \cdot \operatorname{ch}\frac{Z}{a}, \tag{7}$$

уравнение (6) будет:

$$\frac{d^2\Theta}{d\varphi^2} + \operatorname{ctg}\varphi \cdot \frac{d\Theta}{d\varphi} - \left\{ \frac{i\mu}{\sin^2\varphi} + \operatorname{ctg}^2\varphi \right\} \Theta = 0, \tag{8}$$

где

$$\mu = \frac{\lambda \cdot a}{h}.$$

Если ввести замену независимого переменного **

$$\cos\varphi = x, \tag{9}$$

уравнение (8) будет:

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} + \frac{2x}{x^2-1} \cdot \frac{d\Theta}{dx} - \frac{i\mu + x^2}{(x^2-1)^2} \cdot \Theta = 0. \tag{10}$$

Решения (10) получим в виде (для $|x| < 1$) ***:

$$\left.\begin{aligned} \Theta_1 &= \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\sqrt{1+i\mu}}{2}} \cdot F\left(\beta, \beta'; 1+\sqrt{1+i\mu}; \frac{x+1}{2}\right), \\ \Theta_2 &= \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{\sqrt{1+i\mu}}{2}} \cdot F\left(\beta, \beta'; 1-\sqrt{1+i\mu}; \frac{x+1}{2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Аналогично получим решение уравнения (5) в виде:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\Theta}_1 &= \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\sqrt{1-i\mu}}{2}} \cdot F\left(\beta, \beta'; 1+\sqrt{1-i\mu}; \frac{x+1}{2}\right), \\ \bar{\Theta}_2 &= \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{\sqrt{1-i\mu}}{2}} \cdot F\left(\beta, \beta'; 1-\sqrt{1-i\mu}; \frac{x+1}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Если комплексные решения (11) и (12) разложить на вещественные и мнимые части, нетрудно получить четыре решения (1) I_1, I_2, I_3 и I_4 в виде:

$$I_1 = AP_1 + BQ_1;\ I_2 = BP_1 - AQ_1;\ I_3 = CP_2 + DQ_2;\ I_4 = DP_2 - CQ_2, \tag{13}$$

* Выравив R_1 через R_2, взяв R_2 в форме $R_2 = a \cdot \cos^m\varphi \cdot \sin^n\varphi$ и подставив R_1 и R_2 в (6), мы исследовали, для каких m и n это уравнение есть уравнение типа Фукса с тремя особыми точками.

** Заменами $\Theta = \sin^{\sqrt{1+i\mu}}\varphi \cdot S$ и $\sin^2\varphi = \xi$ уравнение (8) приводится к гипергеометрическому, однако сходимость рядов при этом, как и в решениях Мейснера для сферы, получается медленная.

*** $x = 1$ и $x = -1$ ($\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$) соответствуют бесконечно удаленным точкам катеноида, практически неинтересным.

где, если ввести обозначение:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu^2}+1}{2}} = a \sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu^2}-1}{2}} = b, \tag{14}$$

входящие в (13) $A, B, C, D, P_1, Q_1, P_2, Q_2$ будут:

$$\left.\begin{aligned}
A &= \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^a \cdot \cos\left(b \cdot \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right),\\
B &= \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^a \cdot \sin\left(b \cdot \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-r}}\right),\\
C &= \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^a \cdot \cos\left(b \cdot \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right),\\
D &= \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^a \cdot \sin\left(b \cdot \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right);
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned}
P_1 = 1 &+ \frac{\beta\beta'}{1\cdot 2}\cdot\frac{\overline{a+1}}{\overline{a+1}^2+b^2}(x+1) + \frac{\beta(\beta+1)\beta'(\beta'+1)}{1\cdot 2\cdot 2^2}\cdot\\
&\cdot \frac{\overline{a+1}\cdot\overline{a+2}-b^2}{(\overline{a+1}^2+b^3)(\overline{a+2}^2+b^2)}\cdot(x+1)^2 + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)(\beta'(\beta'+1)(\beta'+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^3}\cdot\\
&\cdot \frac{\overline{a+1}\cdot\overline{a+2}\cdot\overline{a+3}-b^2(\overline{a+1}+\overline{a+2}+\overline{a+3})}{(\overline{a+1}^2+b^2)(\overline{a+2}^2+b^2)(\overline{a+3}^2+b^2)}\cdot(x+1)^3+\ldots,\\
Q_1 = b &\Bigl\{\frac{\beta\beta'}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{\overline{a+1}^2+b^2}(x+1) + \frac{\beta(\beta+1)\beta'(\beta'+1)}{1\cdot 2\cdot 2^3}\cdot\\
&\cdot \frac{\overline{a+1}+\overline{a+2}}{(\overline{a+1}^2+b^2)(\overline{a+2}^2+b^2)}\cdot(x+1)^2 + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\beta'(\beta'+1)(\beta'+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^3}\cdot\\
&\cdot \frac{\overline{a+2}\cdot\overline{a+3}+\overline{a+3}\cdot\overline{a+1}+\overline{a+1}\cdot\overline{a+2}-b^2}{(\overline{a+1}^2+b^2)\cdot(\overline{a+2}^2+b^2)\cdot(\overline{a+3}^2+b^2)}(x+1)^3+\ldots\Bigr\},\\
P_2 = 1 &- \frac{\beta\beta'}{1\cdot 2}\cdot\frac{\overline{a-1}}{\overline{a-1}^2+b^2}(x+1) + \frac{\beta(\beta+1)\beta'(\beta'+1)}{1\cdot 2\cdot 2^2}\cdot\\
&\cdot \frac{\overline{a-1}\cdot\overline{a-2}-b^2}{(\overline{a-1}^2+b^2)(\overline{a-2}^2+b^2)}(x+1)^2 - \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\beta'(\beta'+1)(\beta'+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^3}\cdot\\
&\cdot \frac{\overline{a-1}\cdot\overline{a-2}\cdot\overline{a-3}-b^2(\overline{a-1}+\overline{a-2}+\overline{a-3})}{(\overline{a-1}^2+b^2)\cdot(\overline{a-2}^2+b^2)(\overline{a-3}^2+b^2)}(x+1)^3+\ldots,\\
Q_2 = b &\Bigl\{-\frac{\beta\beta'}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{\overline{a-1}^2+b^2}(x+1) + \frac{\beta(\beta+1)\beta'(\beta'+1)}{1\cdot 2\cdot 2^2}\cdot\\
&\cdot \frac{\overline{a-1}+\overline{a-2}}{(\overline{a-1}^2+b^2)\cdot(\overline{a-2}^2+b^3)}(x+1)^2 - \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\beta'(\beta'+1)(\beta'+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^3}\cdot\\
&\cdot \frac{\overline{a-2}\cdot\overline{a-3}+\overline{a-3}\cdot\overline{a-1}+\overline{a-1}\cdot\overline{a-2}-b^2}{(\overline{a-1}^2+b^2)\cdot(\overline{a-2}^2+b^2)(\overline{a-3}^2+b^2)}\cdot(x+1)^3+\ldots\Bigr\}
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Сходимость написанных рядов хорошая (так как μ велико), и с большой степенью точности можно ограничиться при вычислениях для P тремя, а для Q—двумя членами.

Решения уравнений (1) и (2) получатся в виде:

$$\Theta = C_1 I_1 + C_2 I_2 + C_3 I_3 + C_4 I_4), \tag{17}$$

$$U = -\frac{2E}{\lambda}(C_1 I_2 - C_2 I_1 + C_3 I_4 - C_4 I_3), \tag{18}$$

где I_1, I_2, I_3, I_4 даны формулами (13), а четыре произвольные постоянные C_1, C_2, C_3 и C_4 позволяют удовлетворить условиям на краях.

Математический институт
им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
5 II 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Meissner, Vierteljahrschrift der Naturf. Ges. in Zürich (1915). [2] Geckeler, Über die Festigkeit achsensymmetrischer Schalen (1926). [3] Ekström, Studien über dünne Schalen (1933). [4] Meissner, Phys. ZS., № 8 (1913). [5] Reissner, Spannungen in Kugelschalen, Festschrift Müller-Breslau (1912).