

УДК 621.762

М. Н. ВЕРЕЩАГИН, В. Г. ТЕПЛЯКОВ, С. М. МОВШОВИЧ

ТЕМПЕРАТУРНЫЙ ПРОФИЛЬ КАПЛИ РАСПЛАВА В НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ НАГРЕВА

Одним из перспективных направлений современного материаловедения является использование ультразвукового охлаждения расплава при его затвердевании, что позволяет повысить растворимость легирующих элементов в твердом растворе, устранить макро- и микроликвацию, получать метастабильные фазы.

Использование метода висящей капли ("pendant drop melt extraction") позволяет исключить использование капиллярных тиглей, что дает возможность получения тугоплавких материалов и реакционно-активных металлов. Вместе с тем для широкого использования данного метода при получении порошков, волокон и лент необходимо решить ряд теоретических, технологических и конструкторских задач. В частности, произвести расчет температурного поля в капле в нестационарном режиме, что позволит контролировать процесс охлаждения и формирования продукции на кромке диска, обеспечивать необходимую скорость охлаждения, подбирать оптимальную пару материалов в контакте диск—расплав, разрабатывать плавильную систему.

Рассмотрим задачу расчета температурного режима капли расплава, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг продольной оси, на которую в момент времени $t_0=0$ оказывает действие распределенный в некоторой области $S_0(r=R_0, 0 \leq \varphi \leq \varphi_0, z_1 \leq z \leq z_2)$ тепловой источник Q , вращающийся вокруг той же оси с постоянной угловой скоростью. Теплофизические свойства капли расплава принимаются не зависящими от температуры, а теплообмен с окружающей средой осуществляется по закону Ньютона.

Сформулированная краевая задача в соответствии с этим может быть записана следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T + f(r, \varphi, z, t), \quad (1)$$

где $T(r, \varphi, z, t)$ — текущая температура капли расплава; Δ — оператор Лапласа в цилиндрической системе координат; $a^2 = \lambda / c_p \rho$ — коэффициент температуропроводности; c_p , ρ , λ — удельная теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности расплава; f — функция, описывающая действие в области S_0 источника тепла.

Граничные условия поставленной задачи с учетом выбранной физической модели записываются в виде:

$$\begin{aligned} T|_{z=0} = T_k; \quad \frac{\partial T}{\partial z}|_{z=L} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial r}|_{r=r_0} = 0; \\ T(r, \varphi + 2\pi, z, t) = T(r, \varphi, z, t); \quad T|_{t=0} = T_k. \end{aligned} \quad (2)$$

Заметим, что при отсутствии внешнего разогрева капли расплава и полной ее теплоизоляции со стороны боковой поверхности и нижнего основания температура внутри капли будет постоянной и равной T_k . В связи с этим сформулируем краевую задачу для отклонения от равновесного распределения температуры, вводя функцию v соотношением $T = T_k + v$. Тогда уравнение (1) переписывается в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \Delta v + f(r, \varphi, z, t). \quad (3)$$

Найдем решение однородного уравнения

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = a^2 \Delta \tilde{v}, \quad (4)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\tilde{v}|_{t=0} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z}|_{z=L} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r}|_{r=r_0} = 0. \quad (5)$$

Решение ищем методом разделения переменных, полагая

$$\tilde{v} = V(r, \varphi, z) \tilde{T}(t) \neq 0. \quad (6)$$

Подставляя соотношение (6) в (3), получаем

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \beta^2 V = 0. \quad (7)$$

Кроме того, имеем

$$V|_{z=0} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial z}|_{z=L} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial r}|_{r=r_0} = 0. \quad (8)$$

Решение уравнения (7) ищем в виде

$$V = R(r) \Phi(\varphi) Z(z) \neq 0. \quad (9)$$

После подстановки (9) в уравнение (7) с учетом краевых условий (8) получаем следующие задачи для нахождения функций R , Φ и Z .

$$\begin{cases} \frac{d^2 Z}{dz^2} + \nu^2 Z = 0, \\ Z(0) = 0, \\ \frac{dZ(L)}{dz} = 0, \end{cases} \quad (10) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \gamma^2 \Phi = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi), \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + [(\beta^2 - \nu^2)r^2 - \gamma^2]R = 0, \\ \frac{dR(r_0)}{dr} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Общее решение уравнения (10) имеет вид

$$Z(z) = A \cos \nu z + B \sin \nu z.$$

Граничное условие даст $A=0$, а также соотношение

$$\cos vL=0, \text{ т. е. } v = v_m = \frac{\pi(2m+1)}{2L}. \quad (13)$$

Тогда

$$Z_m(z) = \sin v_m z. \quad (14)$$

Общее решение уравнения (11) записывается

$$\Phi(\varphi) = C \cos \varphi + D \sin \varphi.$$

С учетом условия периодичности имеем $\gamma=n$, $n=0, 1, 2, \dots$, а также

$$\Phi_n^{(C)}(\varphi) = \cos n\varphi; \quad \Phi_n^{(S)}(\varphi) = \sin n\varphi. \quad (15)$$

Уравнение (12) представляет собой уравнение для функции Бесселя. Его общее решение имеет вид

$$R_n(r) = E_n J_n(\mu^{(n)} r) + F_n N_n(\mu^{(n)} r),$$

где J_n, N_n — функции Бесселя и Неймана n -го порядка соответственно,

$$(\mu^{(n)})^2 = \beta^2 - v_m^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Так как $R_n(0) \neq \infty$, то $F_n=0$.

Из граничного условия находим

$$\left. \frac{dR_n}{dr} \right|_{r=r_0} = E_n \mu^{(n)} J'_n(\mu^{(n)} r_0) = 0.$$

Следовательно, $\mu^{(n)} r_0 = \mu_k^{(n)}$ — нули функции J'_n ; $k=1, 2, \dots$

Таким образом, имеем

$$R_n(r) = E_n J_n \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r \right). \quad (16)$$

Из полученных соотношений (9), (14)—(16) находим собственные функции уравнения (7)

$$V_{k,m,n}^{(C)} = R_n(\mu_k^{(n)} r) \sin(v_m z) \cos n\varphi, \quad (17)$$

$$V_{k,m,n}^{(S)} = R_n(\mu_k^{(n)} r) \sin(v_m z) \sin n\varphi, \quad (18)$$

где $\beta_{k,m,n}^2 = (\mu_k^{(n)})^2 + v_m^2$.

Исследуем сейчас зависимость функции v от времени. Для этого будем искать v в виде разложения по функциям (17) и (18).

$$v(r, \varphi, z, t) = \sum_{\substack{m,n=0 \\ k=1}}^{\infty} [T_{k,m,n}^{(C)}(t) V_{k,m,n}^{(C)}(r, \varphi, z) + T_{k,m,n}^{(S)}(t) V_{k,m,n}^{(S)}(r, \varphi, z)]. \quad (19)$$

Кроме того, разлагаем также по этим функциям правую часть уравнения (1), т.е.

$$f(r, \varphi, z, t) = \sum_{\substack{m,n=0 \\ k=1}}^{\infty} [F_{k,m,n}^{(C)}(t) V_{k,m,n}^{(C)}(r, \varphi, z) + F_{k,m,n}^{(S)}(t) V_{k,m,n}^{(S)}(r, \varphi, z)], \quad (20)$$

где

$$F_{k,m,n}^{(C,S)}(t) = \frac{1}{\|V_{k,m,n}^{(C,S)}\|^2} \int_0^{2\pi r_0} \int_0^L dr d\varphi dz r f(r, \varphi, z, t) V_{k,m,n}^{(C,S)}(r, \varphi, z), \quad (21)$$

$$\|V_{k,m,n}^{(C,S)}\|^2 = \int_0^{2\pi r_0} \int_0^L dr d\varphi dz r (V_{k,m,n}^{(C,S)}(r, \varphi, z))^2. \quad (22)$$

Подставляя (19) и (20) в уравнение (1) с учетом (7), имеем

$$\frac{d}{dt} T_{k,m,n}^{(C,S)}(t) + a^2 \beta_{k,m,n}^2 T_{k,m,n}^{(C,S)}(t) = F_{k,m,n}^{(C,S)}(t) \quad (23)$$

с начальным условием $T_{k,m,n}^{(C,S)}(0) = 0$.

Решение уравнения (23) с учетом начального условия записывается в виде

$$T_{k,m,n}^{(C,S)}(t) = \int_0^t d\tau \exp[-a^2 \beta_{k,m,n}^2 (t - \tau)] F_{k,m,n}^{(C,S)}(\tau). \quad (24)$$

Подставляя (24) в соотношение (19), получаем

$$v(r, \varphi, z, t) = \sum_{\substack{m,n=0 \\ k=1}}^{\infty} \left[\int_0^t d\tau \exp[-a^2 \beta_{k,m,n}^2 (t - \tau)] F_{k,m,n}^{(C)}(\tau) V_{k,m,n}^{(C)}(r, \varphi, z) + \int_0^t d\tau \exp[-a^2 \beta_{k,m,n}^2 (t - \tau)] F_{k,m,n}^{(S)}(\tau) V_{k,m,n}^{(S)}(r, \varphi, z) \right]. \quad (25)$$

Функция f , описывающая действие равномерно распределенного в области S_0 источника тепла, вращающегося вокруг оси OZ с постоянной угловой скоростью, имеет вид:

$$f(r, \varphi, z, t) = \frac{Qr_0}{c\rho S_0} \delta(r - r_0) [\Theta(z - z_1) - \Theta(z - z_2)] [\Theta(\varphi - \varphi') - \Theta(\varphi - \varphi' - 2\varphi_0)], \quad (26)$$

$$\varphi' = \omega \sum_{k=0}^{\infty} (t - t_k) [\Theta(t - t_k) - \Theta(t - t_{k+1})]; \quad t_k = \frac{2\pi k}{\omega}; \quad S_0 = 2\varphi_0 r_0 (z_2 - z_1). \quad (27)$$

Подставляя выражение (26) в формулу (20), получаем выражение для коэффициентных функций

$$\begin{aligned} F_{k,m,n}^{(C,S)}(t) &= \frac{1}{\|V_{k,m,n}^{(C,S)}\|^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \begin{array}{l} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{array} \right\} \int_0^{r_0} dr r R_n(\mu_k^{(n)} r) \int_0^L dz f(r, \varphi, z, t) \sin v_m z = \\ &= - \frac{4Qr_0}{\|V_{k,m,n}^{(C,S)}\|^2 c\rho S_0 n v_m} J_n(\mu_k^{(n)}) \sin(v_m \frac{z_1 - z_2}{2}) \sin(v_m \frac{z_1 + z_2}{2}) \times \\ &\quad \times \sin(n\varphi_0) \begin{cases} \cos[n(\omega t + \varphi_0)] \\ \sin[n(\omega t + \varphi_0)] \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

Для нахождения квадрата нормы собственных функций подставляем выражения (17) и (18) в формулу (22)

$$\|V_{k,m,n}^{(C,S)}\|^2 = \frac{\pi L^2 r_0^2}{4} \left[1 - \left(\frac{n}{\mu_k^{(n)}} \right)^2 \right] J_n^2(\mu_k^{(n)}) \left\{ \begin{array}{l} 1 + \delta_{0n} \\ 1 - \delta_{0n} \end{array} \right\} \quad (29)$$

Объединяя формулы (9), (17), (18), (25), (28), получаем

$$T = T_k + \frac{4Qr_0}{\rho S_0} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{J_n(\mu_k) \sin n\varphi_0}{n\nu_m} \sin\left(\nu_m \frac{z_2 - z_1}{2}\right) \sin\left(\nu_m \frac{z_2 + z_1}{2}\right) \times \quad (30)$$

$$\times J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r\right) \sin(\nu_m z) \exp(-a^2 \beta_{k,m,n}^2 t) \{ \cos(n\varphi) I_{k,m,n}^{(C)} + \sin(n\varphi) I_{k,m,n}^{(S)} \},$$

где

$$I_{k,m,n}^{(C,S)} = \frac{1}{\|V_{k,m,n}^{(C,S)}\|^2} \int_0^t d\tau \exp(a^2 \beta^2 \tau) \left\{ \begin{array}{l} \cos(n\omega\tau - n\varphi_0) \\ \sin(n\omega\tau - n\varphi_0) \end{array} \right\} \quad (31)$$

Выполняя интегрирование в правой части (31), получаем

$$I_{k,m,n}^{(C,S)}(t) = \frac{1}{\|V_{k,m,n}^{(C,S)}\|^2 \sqrt{n^2 \omega^2 + a^4 \beta_{k,m,n}^4}} \times \quad (32)$$

$$\times \left\{ \exp(a^2 \beta_{k,m,n}^2 t) \left[\begin{array}{l} \cos(n\omega t + n\varphi_0 - \delta_{k,m,n}) \\ \sin(n\omega t + n\varphi_0 - \delta_{k,m,n}) \end{array} \right] - \left[\begin{array}{l} \cos(n\omega t - \delta_{k,m,n}) \\ \sin(n\omega t - \delta_{k,m,n}) \end{array} \right] \right\},$$

где

$$\delta_{k,m,n} = \arctg\left(\frac{n\omega}{a^2 \beta_{k,m,n}^2}\right).$$

Окончательно имеем решение поставленной задачи, которое определяет распределение температуры в капле в нестационарном режиме нагрева и координатах, вращающихся вместе с каплей.

$$T = T_k - \frac{4Qr_0}{\rho S_0} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{J_n(\mu_k) \sin n\varphi_0}{n\nu_m} \sin\left(\nu_m \frac{z_2 - z_1}{2}\right) \sin\left(\nu_m \frac{z_2 + z_1}{2}\right) \times$$

$$\times \frac{J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r\right) \sin(\nu_m z)}{\sqrt{n^2 \omega^2 + a^4 \beta_{k,m,n}^4}} \left\{ \frac{\cos(n\varphi)}{\|V_{k,m,n}^{(C)}\|^2} [\cos(n\omega t + n\varphi_0 - \delta_{k,m,n}) - \exp(-a^2 \beta_{k,m,n}^2 t) \times \quad (33)$$

$$\times \cos(n\varphi_0 - \delta_{k,m,n})] + \frac{\sin(n\varphi)}{\|V_{k,m,n}^{(S)}\|^2} [\sin(n\omega t + n\varphi_0 - \delta_{k,m,n}) - \exp(-a^2 \beta_{k,m,n}^2 t) \times$$

$$\times \sin(n\varphi_0 - \delta_{k,m,n})] \right\}.$$

В покоящейся системе координат формула (33) при условии $\varphi = \omega t + \varphi_0$ и $t \rightarrow \infty$ принимает вид

$$T = T_k + \frac{4Qr_0}{cpS_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_n(\mu_k) \sin n\varphi_0}{nv_m} \sin\left(v_m \frac{z_2 - z_1}{2}\right) \sin\left(v_m \frac{z_2 + z_1}{2}\right) \times$$

$$J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r\right) \sin(v_n z) \left\{ \frac{\cos(n\varphi) \cos(n\omega t + n\varphi_0 - \delta_{k,m,n})}{\|V_{k,m,n}^{(C)}\|^2} + \right. \quad (34)$$

$$\left. \frac{\sin(n\varphi) \sin(n\omega t + n\varphi_0 - \delta_{k,m,n})}{\|V_{k,m,n}^{(S)}\|^2} \right\}.$$

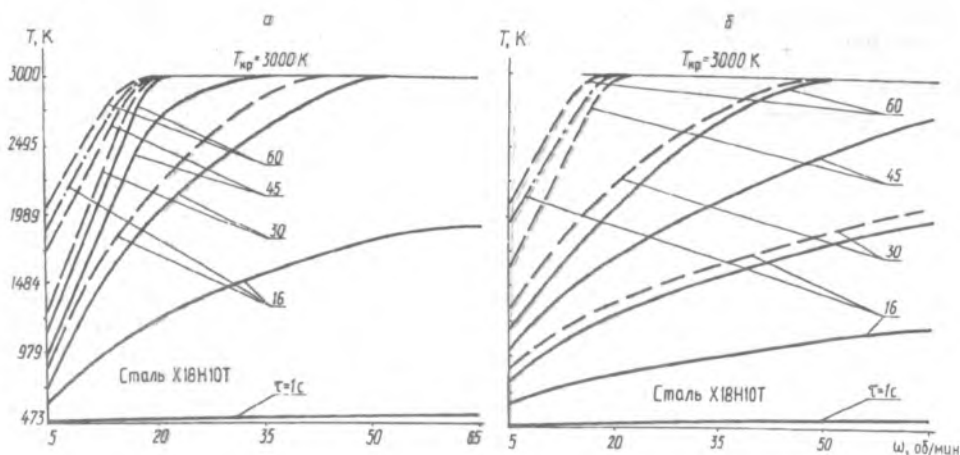


Рис. 1. Изменение температуры вращающегося стержня T, K от угловой скорости ω в различные моменты времени. Ширина пятна 2,0 мм; $1 < t < 60$ с, сплошная, штриховая, штрих-пунктирная линии — $Q = 10; 20; 50$ кВт соответственно; а, б — $D_{ст} = 5; 10$ мм соответственно

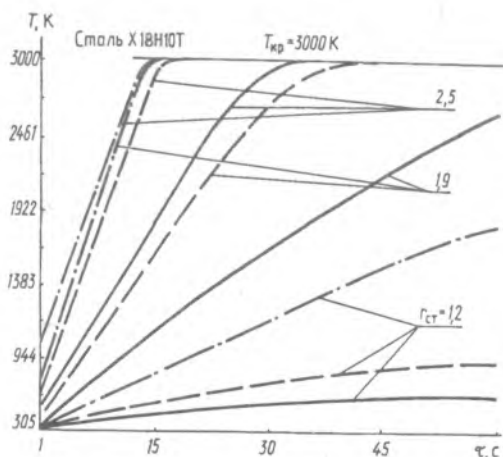


Рис. 2. Изменение температуры вращающегося стержня T, K при различных расстояниях от центра по радиусу $r_{ст}$, $D_{ст} = 5$ мм; $\omega = 50$ об/мин; ширина пятна 2,0 мм; сплошная, штриховая, штрих-пунктирная линии — $Q = 10; 20; 50$ кВт соответственно

На рис. 1 представлена зависимость температуры вращающегося стержня от угловой скорости в различные моменты времени, из которой следует, что температура имеет вид плавно возрастающей кривой, выходящей в прямую, причем это происходит тем быстрее, чем больше величина мощности теплового источника. Кроме того, на температуру стержня существенное влияние оказывает его диаметр, который определяет величину аккумулируемой теплоты, вводимой в стержень тепловым источником. Из рис. 2 следует, что динамика нагрева стержня значительно зависит от скорости вращения последнего и природы сплава, подвергаемого нагреванию. При этом температура стержня определяется условиями теплообмена на границе с окружающей средой — стержень.

Summary

There is provided a theoretical analysis of the temperature profile of a melting drop rotating with a constant angular velocity around its axis and being influenced by an extended heat source in an unstable regime of heating. The scaling factor of the heated body, as well as the power of heat source and the velocity of rotation are proved to be of crucial importance for the temperature profile of melt drop. This allows to control the process of cooling, as well as production-forming on the disk brim.

*Гомельский политехнический
институт*

*Поступила в редакцию
28.11.96*