

## ЕСТЕСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ПРОЕКТИРУЕМОЙ АВТОНОМНОЙ ВЕТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ УСТАНОВКИ

**Ю. А. КАШИН, И. В. САФОНОВ**

*Учреждение образования «Гомельский государственный  
университет имени Франциска Скорины»,  
Республика Беларусь*

**Р. Е. КАШИНА**

*Учреждение образования «Гомельский государственный  
технический университет имени П. О. Сухого»,  
Республика Беларусь*

### Постановка задачи

Для корректности формулировки задачи будем использовать известные понятия и положения теории ветряных мельниц [1]–[4], уточняя, в меру необходимости, их смысл.

Ветроэнергетическую установку называем автономной, если она функционирует без использования иных, кроме ветра, источников энергии. Её основными элементами считаем мачту высотой  $H$  и  $\theta$  одинаковых, опирающихся на эту мачту пропеллерных турбин радиусом  $R_T$ . Традиционной автономной ветроэнергетической установкой (АВЭУ), или мельницей условимся считать однороторную ветроустановку.

Пусть  $[0, U_*]$  – прогнозируемый интервал возможных значений скорости ветра  $U$  в месте будущего расположения проектируемой АВЭУ,

$$\Phi = \Phi(U) \quad (1)$$

– плотность вероятности этой скорости;  $T$  – гарантийный срок безаварийной эксплуатации ветроустановки;  $E$  – планируемое количество энергии ветра, которое она должна конвертировать за этот срок,

$$H_H = E/T \quad (2)$$

– её номинальная проектная мощность.

Полезный эффект работы ветроустановок обеспечивают их турбины, которые, возмущая и тормозя набегающий на них свободный воздушный поток своими вращающимися лопастями, преобразуют часть теряемой этим потоком кинетической энергии в работу вращения своего вала.

Силу  $P$  лобового давления ветра на турбину и развиваемую ею мощность  $N$  определим значениями

$$P = S_T \rho_0 U^2 X/2, \quad N = S_T \rho_0 U^3 Y/2, \quad (3)$$

где

$$S_T = \pi R_T^2 \quad (4)$$

– площадь ветровой тени турбины;  $\rho_0 = 1,2 \text{ кг/м}^3$  – плотность воздуха;  $X$  и  $Y$  – безразмерные характеристики процесса аэродинамического взаимодействия турбины с ветром, именуемые её коэффициентами давления и мощности [1], [2].

Полагаем, что для лопастей выбран достаточно совершенный крыловой профиль и что параметры исполнения решетки лопастей, параметры регулирования их состоянием и момент торможения вала турбины нагрузкой всегда назначается из условия достижения при любой скорости ветра  $U \in [0, U_*]$  таких режимов функционирования, при которых каждому возможному значению  $X > 0$  ставится в соответствие максимально возможное значение

$$Y = Y(X, U) \quad (5)$$

и при которых

$$\partial Y / \partial X \geq 0. \quad (6)$$

Эту функциональную взаимосвязь аэродинамических характеристик турбины считаем известной и её назовем функцией рациональных режимов работы рассматриваемой турбины.

Экстремальный рациональный режим работы турбины, при котором достигается наибольшее возможное значение

$$Y^* = Y(X^*, U) = \max_{X > 0} Y(X, U), \quad (7)$$

назовем режимом наивысшего уровня конверсии энергии ветра. Отметим, что для достижения этого экстремального режима необходимо, чтобы лопасти турбины во всей её рабочей зоне работали при угле атаки наивысшего аэродинамического качества своего профиля [1], [4].

Регламентом эксплуатации ветроустановок и их турбин будем называть закон управления состоянием лопастей и внешней нагрузкой

$$X = X(U) \in [0, X^*(U)], \quad (8)$$

при назначении которого при  $U \in [0, U_*]$  определены функции

$$Y = Y(X(U), U), \quad (9)$$

$$P(U) = \pi R_T^2 X(U) / 2, \quad N(U) = \pi R_T^2 U^3 Y(X(U), U) / 2 \quad (10)$$

и математическое ожидание мощности АВЭУ

$$\tilde{N}_0 = \frac{1}{2} \theta \pi R_T^2 \int_0^{U_*} U^3 Y(X(U), U) \Phi(U) dU. \quad (11)$$

Если же

$$\tilde{N}_0 = N_H, \quad (12)$$

то соответствующий радиус турбин  $R_T$  и остальные параметры их исполнения и регулирования будем считать возможными для осуществления данного проекта обсуждаемой АВЭУ.

Однако такой выбор параметров всегда обременен необходимостью выполнения ряда дополнительных ограничений и требований, которые назовем естественными.

Прежде всего учтем, что для устойчивой работы турбин необходимо их расположение в области относительно однородного ветрового потока на достаточном возвышении над

окружающими местными предметами. Это условие будем считать выполненным, если высота опорной мачты

$$H \geq R_T + k_0 H_0, \quad (13)$$

где  $H_0 = 10$  м – стандартная высота регистрации скорости ветра на открытых площадках при стандартных метеорологических измерениях;  $k_0$  – позиционный коэффициент высоты мачты данной АВЭУ, учитывающий влияние особенностей рельефа и ландшафта на распределение скорости ветра по высоте в данном месте расположения ветроустановки.

Высокая мачта, выступая препятствием для ветрового потока, должна иметь ресурс прочности, достаточный для противостояния напору ветра на всю ветроустановку. Силу непосредственного лобового давления ветра на мачту определим значением

$$Q = S \rho_0 U^2 X_0 / 2, \quad (14)$$

где  $S$  – площадь ветровой тени мачты;  $X_0$  – её коэффициент ветрового сопротивления, численное значение которого зависит от формы тела мачты. Для традиционной, имеющей форму тела вращения мачты принимаем  $X_0 = 0,8$ .

Минимально допустимый ресурс прочности опорной мачты, достаточный для исполнения её функционального назначения, определим из условия способности противостояния мачты лобовому давлению ветра на неё при его максимально возможной скорости  $U_*$ , т. е. из условия, что

$$S \rho_0 U_*^2 X_0 / 2 \leq [Q], \quad (15)$$

где  $[Q]$  – соответствующая эквивалентная предельно допустимая сила лобового давления ветра на мачту.

Достаточный ресурс прочности мачты при данном регламенте эксплуатации АВЭУ определяется механическими свойствами материала мачты, её формой, размерами и, в общем случае, зависит от её массы  $m$ .

Естественным требованием, предъявляемым к элементам проектируемых машин и сооружений, является требование предельного снижения их материалоемкости – требование полноты использования ресурса их прочности. Соизмеряя полезный эффект работы АВЭУ с массой её мачты отношением

$$Z_0 = \theta N / m,$$

полноту использования ресурса прочности мачты АВЭУ при данном регламенте её эксплуатации будем оценивать значением

$$\tilde{Z}_n = \tilde{N}_n / m = N_H / m, \quad (16)$$

характеризующим значение номинальной мощности ветроустановки в расчете на единицу массы её мачты.

Если среди множества возможных вариантов подобного конструктивного исполнения данной АВЭУ с данной номинальной мощностью  $N_H$  существует некий исполнимый вариант проекта, для которого отношение (16) имеет наибольшее значение, то это означает, что параметры исполнения турбин, параметры системы регулирования их состоянием, параметры исполнения опорной мачты и регламент эксплуатации этой ветроустановки выбраны так, что ими обеспечивается наиболее полное использование энергетического потенциала местного ветра, допускаемое данным ограниченным аэродинамическим качеством элементов данной АВЭУ и данным ограниченным ресурсом прочности её мачты.

Признавая этот вариант проекта оптимальным, отношение ожидаемой средней мощности проектируемой АВЭУ к массе её опорной мачты будем считать объективным показателем её аэродинамического качества, признак максимума этого отношения – критерием оптимальности проекта, а поиск соответствующего ему сочетания всего множества параметров исполнения данной аэродинамической системы и параметров управления их состоянием, удовлетворяющих названным естественным ограничениям и требованиям, – обсуждаемой задачей оптимизации параметров проектируемой АВЭУ.

По своей структуре эта задача относится к известному классу изопериметрических вариационных задач исследования экстремумов функционалов и построения их экстремалей в многомерных пространствах [5], [6]. В данной работе ограничимся решением её модельного, предельно упрощенного варианта, допускающего возможность грубой оценки влияния факторов условий задачи на эффективность работы автономных ветроустановок.

*Модельный вариант решения задачи.* Мачту будем считать консольно закрепленным упругим круглым цилиндрическим стержнем, запас прочности которого при изгибе определяется известными соотношениями теории сопротивления материалов [7]. Пусть  $\rho$  – плотность материала мачты;  $[\sigma]$  – его предельно допустимое напряжение упругого растяжения;  $R$  – радиус сечения мачты,

$$m = \rho \pi R^2 H \quad (17)$$

– её масса,

$$[M] = [\sigma] \pi R^3 / 4 \quad (18)$$

– предельный момент её упругого сопротивления изгибу,

$$S = 2HR \quad (19)$$

– площадь её ветровой тени,

$$M_Q = HQ/2 \quad (20)$$

– изгибающий момент мачты у её основания, порождаемый силой  $Q$  ветрового давления на неё,

$$M_P = HP \quad (21)$$

– изгибающий момент мачты у её основания, порождаемый силой  $P$  ветрового давления на турбину,

$$M_\theta = M_Q + \theta M_P \quad (22)$$

– изгибающий момент мачты у её основания, порождаемый ветровым напором на АВЭУ,

$$M_\theta \leq [M] \quad (23)$$

– условие её безаварийной эксплуатации.

Экстремальное состояние данной ветроустановки при

$$M_\theta = [M] \quad (24)$$

назовем состоянием предельного нагружения её опорной мачты, а соответствующий экстремальный режим работы её турбин – режимом предельного нагружения мачты.

Пороговой скоростью ветра для данной АВЭУ назовем его скорость  $U_{\Pi}$ , при которой при работе её турбин в режиме наивысшего уровня конверсии энергии ветра достигается состояние предельного нагружения мачты. Если  $U_{\Pi} > U_*$ , то это будет означать, что мачта такой АВЭУ имеет заведомо избыточный ресурс прочности. Исключая подобные ситуации, далее полагаем, что  $U_{\Pi} \in [0, U_*]$ .

Максимально возможное количество энергии ветра, которое способна конвертировать рассматриваемая АВЭУ, достижимо только при таком регламенте её эксплуатации, при котором на фазе умеренного ветра при  $U \in [0, U_{\Pi}]$  её турбины работают в экстремальном режиме наивысшего уровня конверсии энергии ветра при  $X(U) = X^*(U)$ , а на фазе сильного ветра при  $U \in [U_{\Pi}, U_*]$  – в экстремальном режиме предельного нагружения мачты при значениях  $X = X(U)$ , удовлетворяющих уравнению (24). Далее полагаем, что применяется только этот экстремальный регламент эксплуатации, который назовем рациональным.

Моделью пропеллерной турбины примем удовлетворяющую законам сохранения массы, энергии и импульса модель идеальной ветротурбины Жуковского [1], [2]. Полагаем, что

$$X = 4\tau(1 - \tau), \quad Y = 4\tau(1 - \tau)^2, \quad (25)$$

где  $\tau$  – коэффициент торможения ветрового потока на гипотетической рабочей поверхности этой турбины. Её режиму работы с наивысшим уровнем конверсии энергии ветра соответствуют параметры  $\tau = \tau^* = 1/3$ ,  $X^* = X(\tau^*) = 8/9$ ,  $Y^* = Y(\tau^*) = 16/27$ , а при  $\tau \in [0, \tau^*]$   $dY/dX \geq 0$ ,  $X \in [0, X^*]$ ,  $Y \in [0, Y^*]$ . Учитывая эти свойства и исключая из соотношений (25) параметр  $\tau$ , рациональные режимы работы рассматриваемой системы определим функцией

$$Y = X(1 + \sqrt{1 - X})/2 \quad (26)$$

при  $X \in [0, 8/9]$ .

Покажем, что названными признаками и соотношениями алгоритм общего решения модельной задачи вполне определен. Для его построения введем безразмерные параметры и переменные.

Мерой скорости примем величину  $U_*$  и будем полагать, что

$$u = U/U_*, \quad u_{\Pi} = U_{\Pi}/U_*, \quad (27)$$

$$\Phi(U) = \Phi(uU_*) = U_*\varphi(u). \quad (28)$$

Масштабом измерения длины примем величину  $H_0$  и будем полагать, что

$$h = H/H_0, \quad r = R/H_0, \quad r_T = R_T/H_0, \quad (29)$$

причем, удовлетворяя условию (13), считаем, что

$$r_T \leq h - k_0.$$

Мерой массы примем величину

$$m_0 = \rho\pi H_0^3, \quad (30)$$

а относительную массу мачты определим значением

$$\mu = m/m_0 = hr^2. \quad (31)$$

Произведем нормировку коэффициентов давления и мощности, полагая, что

$$x = X/X^* = 9X/8, \quad x_0 = X_0/X^* = 9X_0/8, \quad y = Y/Y^* = 27Y/16 \quad (32)$$

и что при  $x \in [0,1]$

$$y = \frac{3}{4}x \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{8}{9}x} \right). \quad (33)$$

Мерой мощности примем величину

$$N_0 = H_0^2 \rho_0 U_*^3 Y^* / 2, \quad (34)$$

а относительную мощность АВЭУ определим значением

$$v_\theta = \theta N / N_0 = \theta \pi r_T^2 u \mu^3. \quad (35)$$

Мерой аэродинамического качества ветроустановок данного типа примем величину

$$Z_0 = N_0 / m_0 = 8 \rho_0 U_*^3 / 27 \rho \pi H_0, \quad (36)$$

значением

$$z_\theta = Z_\theta / Z_0 = v_\theta / \mu \quad (37)$$

будем характеризовать величину показателя аэродинамического качества ветроустановки при данном режиме её эксплуатации, а математическое ожидание

$$\tilde{z}_\theta = \int_0^1 z_\theta(u) \varphi(u) du = \frac{1}{\mu} \int_0^1 v_\theta(u) \varphi(u) du = \tilde{v}_\theta / \mu \quad (38)$$

будем называть коэффициентом аэродинамического качества проектируемой АВЭУ.

В этих обозначениях условие достижения пороговой скорости ветра для рассматриваемой ветроустановки, выражаемое при  $x = 1$  равенством (24), запишем в виде

$$u_{\Pi}^2 = \frac{Ar^3}{h(x_0 r h + \theta \pi r_T^2)}, \quad (39)$$

где

$$A = \pi[\sigma] / 2 X^* \rho_0 U_*^2 = 9 \pi[\sigma] / 16 \rho_0 U_*^2. \quad (40)$$

Анализируя взаимосвязь параметров АВЭУ, определяемую формулой (39), замечаем, что при одинаковых значениях  $r, h, r_T, x_0$  и  $A$  пороговая скорость ветра уменьшается при увеличении количества  $\theta$  турбин ветроустановки. Аналогично,  $u_{\Pi}$  уменьшается при увеличении  $r_T$ .

При данном значении  $u_{\Pi}$  регламент соответствующего рационального режима эксплуатации данной АВЭУ, удовлетворяющий условию (23), можно определить зависимостью

$$x = \begin{cases} 1, & \text{при } u \in [0, u_{\Pi}], \\ \left( \frac{u_{\Pi}}{u} \right)^2 \frac{Ar^2 - x_0 h^2 u^2}{Ar^2 - x_0 h^2 u_{\Pi}^2}, & \text{при } u \in [u_{\Pi}, 1], \end{cases} \quad (41)$$

а относительную мощность, согласно (33), (35), при этом регламенте эксплуатации можно определить кусочно-гладкой алгебраической функцией

$$v_{\theta} = \begin{cases} \frac{ru^3}{hu_{\Pi}^2} (Ar^2 - x_0 h^2 u_{\Pi}^2), & \text{при } u \in [0, u_{\Pi}], \\ \frac{3r}{4h} (Ar^2 - x_0 h^2 u^2) \left( u + \sqrt{u^2 - \frac{8}{9} u_{\Pi}^2 \frac{Ar^2 - x_0 h^2 u^2}{Ar^2 - x_0 h^2 u_{\Pi}^2}} \right), & \text{при } u \in [u_{\Pi}, 1]. \end{cases} \quad (42)$$

Анализ структуры этой функции показывает, что полезный эффект работы АВЭУ, характеризуемый численным значением  $v_{\theta}$ , при любом  $u \in [0, 1]$  и при прочих равных условиях возрастает при уменьшении параметра  $u_{\Pi}$ . Учитывая отмеченное влияние на  $u_{\Pi}$  параметров  $\theta$  и  $r_T$ , приходим к выводу о том, что:

– аэродинамическое качество ветроустановок возрастает с увеличением количества  $\theta$  их турбин;

– для повышения эффективности ветроустановок следует принимать максимально допустимое условием (29) значение:

$$r_T = h - k_0. \quad (43)$$

Применяя это правило, преобразуем формулу (31) к виду

$$r = \sqrt{\mu/h} \quad (44)$$

и, заменяя  $r_T$  и  $r$  значениями (43) и (44), далее независимыми искомыми параметрами считаем параметры мачты  $h$  и  $\mu$ .

Для выделения области значений этих параметров, в которой может осуществляться данный рациональный регламент эксплуатации данной АВЭУ, обратимся к соотношению (15) определения минимально допустимого ресурса прочности опорной мачты. Теперь условие достижения состояния предельного нагружения мачты напором ветра на нее при его максимально возможной скорости  $U_*$  можно выразить уравнением (39) при  $r_T = 0$  и  $u_{\Pi} = 1$  и из него можно определить критическое отношение размеров мачты:

$$\frac{r'}{h'} = \frac{R'}{H'} = \sqrt{\frac{x_0}{A}}, \quad (45)$$

при котором достижимо такое особое предельное состояние мачты. Её относительная масса

$$\mu' = h' r'^2 = x_0 h'^3 / A \quad (46)$$

при её данной высоте  $h'$  является минимальной по условию достаточности ресурса прочности и не может быть уменьшена. Поэтому, учитывая условия (43) и (44), приходим к выводу, что на плоскости  $Oh\mu$  областью допустимых значений  $h$  и  $\mu$  является сектор

$$k_0^3 \leq h^3 \leq A\mu/x_0. \quad (47)$$

В этой области относительная пороговая скорость ветра, после подстановки значений (43), (44) в формулу (39), выражается алгебраической функцией параметров  $h$  и  $\mu$ :

$$u_{\Pi}(h, \mu) = \left\{ \frac{A\mu\sqrt{\mu}}{h^2 [x_0 h \sqrt{\mu} + \theta \pi \sqrt{h} (h - k_0)^2]} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (48)$$

Аналогичной заменой кусочно-гладкая функция (42) преобразуется к виду

$$v_{\theta} = \begin{cases} \psi_1(u, h, \mu), & \text{при } u \in [0, u_{\Pi}(h, \mu)], \\ \psi_2(u, h, \mu), & \text{при } u \in [u_{\Pi}(h, \mu), 1], \end{cases} \quad (49)$$

где  $\psi_1 = \psi_1(u, h, \mu)$  и  $\psi_2 = \psi_2(u, h, \mu)$  остаются соответствующими действительными положительными алгебраическими функциями своих аргументов и такими, что  $\psi_1(u_{\Pi}, h, \mu) = \psi_2(u_{\Pi}, h, \mu)$ . Поэтому ожидаемое значение средней относительной мощности АВЭУ

$$\tilde{v}_{\theta} = \int_0^{u_{\Pi}(h, \mu)} \psi_1(u, h, \mu) \varphi(u) du + \int_{u_{\Pi}(h, \mu)}^1 \psi_2(u, h, \mu) \varphi(u) du \quad (50)$$

оказывается действительной функцией обсуждаемых параметров мачты вида

$$\tilde{v}_{\theta} = f(h, \mu). \quad (51)$$

При выполнении условия (47) любому значению  $\mu \geq x_0 k_0^3 / A$  соответствует интервал  $h \in [k_0, \sqrt[3]{A\mu/x_0}]$ , на котором при некотором зависящем от  $\mu$  значении

$$h^* = h(\mu) \quad (52)$$

кусочно-гладкая функция (51) необходимо достигает свое максимальное, зависящее от  $\mu$  значение

$$\tilde{v}^* = f(h^*, \mu) = \max_{h \in [k_0, \sqrt[3]{A\mu/x_0}]} f(h, \mu). \quad (53)$$

Но тогда все параметры состояния и управления АВЭУ оказываются функциями параметра  $\mu$ . При этом ожидаемая номинальная мощность ветроустановки

$$N_H = \tilde{N}_{\theta}^* = N_0 \tilde{v}^* \quad (54)$$

будет иметь максимально возможное значение, допускаемое данным ограниченным аэродинамическим качеством её элементов и данным ограниченным ресурсом прочности её мачты массой

$$m = m_0 \mu, \quad (55)$$

а признаком оптимальности этой ветроустановки является максимум её коэффициента аэродинамического качества

$$\tilde{z}^* = \tilde{N}_{\theta}^* / m = \tilde{v}_{\theta}^* / \mu. \quad (56)$$

### Заключение

Таким образом, доказано, что в данных условиях существует семейство зависящих от  $\mu$  оптимальных ветроустановок данного конструктивного исполнения. Следовательно, обсуждаемые метод и алгоритм исследования экстремальных состояний и характеристик проектируемых АВЭУ вполне можно использовать для оценки влияния каждого учитываемого условиями задачи фактора на прогнозируемый полезный эффект работы оптимальных ветроустановок и для обоснования соответствующих технических решений по их совершенствованию.

### Литература



1. Жуковский, Н. Е. Ветряная мельница типа НЕЖ / Н. Е. Жуковский // Собр. соч. – Москва ; Ленинград : ГИТТЛ, 1950. – Т. 7. – С. 349.
2. Твайделл, Дж. Возобновляемые источники энергии / Дж. Твайделл, А Уэйр. – Москва : Энергatomиздат, 1990. – 392 с.
3. Кашин, Ю. А. Автономная ветроэнергетическая установка (АВЭУ) с максимальным уровнем конверсии энергии ветра. Математическая модель ветротурбины / Ю. А. Кашин, Р. Е. Кашина // Вестн. ГГТУ им. П. О. Сухого. – 2004. – № 3. – С. 59–64.
4. Кашин, Ю. А. Автономная ветроэнергетическая установка (АВЭУ) с максимальным уровнем конверсии энергии ветра. Оптимизация параметров ветротурбины и режимов ее работы. Режим максимального уровня конверсии ветровой энергии / Ю. А. Кашин, Р. Е. Кашина // Вестн. ГГТУ им. П. О. Сухого. – 2005. – № 2. – С. 37–45.
5. Шехтер, Р. С. Вариационный метод в инженерных расчетах / Р. С. Шехтер. – Москва : Мир, 1971. – 231 с.
6. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А. А. Красовского. – Москва : Наука, 1987. – 711 с.
7. Беляев, Н. М. Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – Москва : Наука, 1976. – 607 с.

Получено 05.06.2006 г.