

ГАРМОНИЧЕСКАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ СЛОЖНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ОГРАНИЧЕНИЕ

И.И. ЗАБЕНЬКОВ, В.В. КИКИНЁВ

Учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», г. Минск

Введение

Метод гармонической линеаризации является одним из наиболее применяемых в настоящее время приближенных методов анализа нелинейных систем автоматического управления [1, с. 444–452].

Класс нелинейностей, для линеаризации которых данный метод может быть применен, не ограничивается только нелинейностями стандартного вида [2, с. 244].

Рассмотрим в качестве примера практически значимый случай анализа замкнутой нелинейной (содержащей ограничение) системы с преобразованием (модуляция-демодуляция) сигнала управления в контуре регулирования.

Модуляция с последующими усилением на переменном токе и демодуляцией могут производиться в контуре, в частности, для снижения статических погрешностей на выходе системы. Ограничение имеет место в замкнутых системах, где для компенсации недостатка быстродействия объекта управления на него подаются управляющие сигналы значительной величины [3, с. 390].

Пусть в результате ряда преобразований структурная схема системы приобрела вид, как показано на рис. 1.

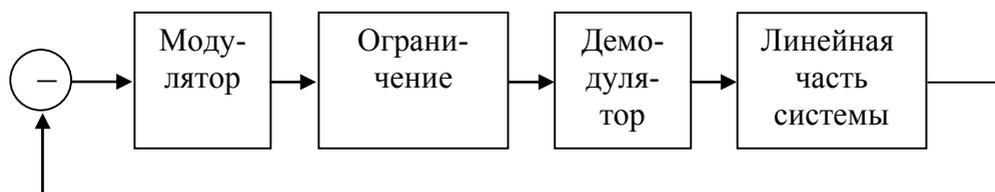


Рис. 1. Структурная схема замкнутой нелинейной системы

Необходимо отметить, что анализ замкнутой системы (рис. 1) методом гармонической линеаризации может производиться только при одновременном выполнении следующих условий:

- линейная часть системы в частотной области эквивалентна ФНЧ;
- операция преобразования линейна по отношению к сигналу управления.

Блоки модулятора, ограничения и демодулятора (рис. 1) очевидно целесообразно объединить в блок эквивалентной нелинейности и далее рассматривать как единое целое – как некую сложную нелинейность.

Вычисление коэффициентов гармонической линеаризации

Пусть для определенности демодуляция в замкнутой нелинейной системе (рис. 1) производится синхронным выпрямлением.

Тогда для линейного (без ограничения) режима структурная схема блока эквивалентной нелинейности приобретает вид, как показано на рис. 2.

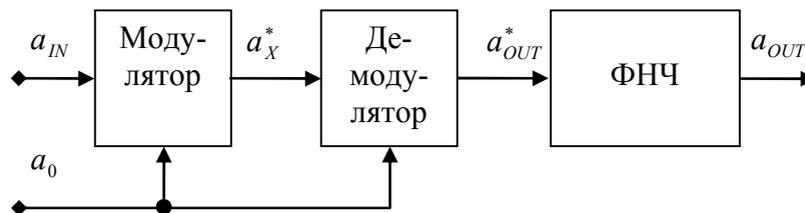


Рис. 2. Структурная схема блока эквивалентной нелинейности (в линейном режиме) с демодуляцией синхронным выпрямлением

В состав блока эквивалентной нелинейности здесь (рис. 2) включен ФНЧ, который в структурной схеме (рис. 1) принадлежит линейной части системы.

Пусть на основном и опорном входах действуют соответственно сигналы:

$$a_{IN}(t) = A \sin(\Omega t); \quad (1)$$

$$a_0(t) = \sin(\omega t). \quad (2)$$

При этом выполняется условие:

$$\omega \gg \Omega. \quad (3)$$

Сигнал на выходе синхронного выпрямителя имеет, очевидно, вид:

$$a_{OUT}^*(t) = A \sin(\Omega t) |\sin(\omega t)|. \quad (4)$$

Обозначим период колебания с частотой Ω как T .

Определим амплитуду колебания с частотой Ω в спектре сигнала $a_{OUT}^*(t)$ [1]:

$$A^* = \frac{2}{T} \int_0^T a_{OUT}^*(t) \sin(\Omega t) dt = A \frac{2}{T} \int_0^T |\sin(\omega t)| \sin^2(\Omega t) dt. \quad (5)$$

Введем обозначения:

$$\omega = n\Omega; \quad (6)$$

$$\Omega t = \theta. \quad (7)$$

Здесь n есть константа, и при этом $n \gg 1$ в силу условия (3). Тогда (5) преобразуется к виду:

$$A^* = A \frac{2}{\Omega T} \int_0^T |\sin(n\Omega t)| \sin^2(\Omega t) d(\Omega t) = A \frac{2}{\Omega T} \int_0^{2\pi} |\sin(n\theta)| \sin^2 \theta d\theta = A \frac{2}{\pi}. \quad (8)$$

Необходимо отметить, что последнее равенство в (8) выполняется тем более строго, чем более строго выполняется условие (3).

Для обеспечения линейности операции преобразования по отношению к сигналу управления ФНЧ должен пропускать колебания в диапазоне частот $[0; \Omega]$ и подавлять колебания, частоты которых превышают Ω . При выполнении данного условия передаточная функция блока эквивалентной нелинейности рассматриваемого вида для сигнала управления (при пренебрежимо малом фазовом сдвиге в полосе пропускания ФНЧ) представляет собой просто коэффициент усиления:

$$k_{\Omega} = \frac{a_{OUT}(t)}{a_{IN}(t)} = \frac{2}{\pi} \approx 0,637. \quad (9)$$

Введем в схему (рис. 2) нелинейность вида ограничение, как показано на рис. 3:

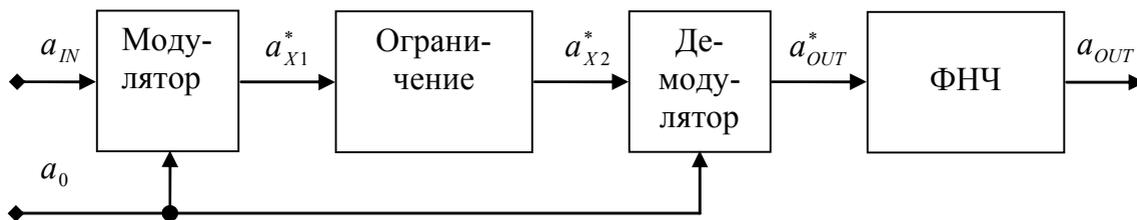


Рис. 3. Структурная схема блока эквивалентной нелинейности с ограничением, в котором демодуляция производится синхронным выпрямлением

Для упрощения дальнейшего анализа примем коэффициент усиления нелинейности в ее линейном диапазоне, равным 1.

Рассмотрим один период колебания с частотой Ω . Пусть ограничение наступает в момент времени T_{SAT} при значении входного сигнала нелинейности, равном A_{SAT} . Очевидно:

$$\theta_{SAT} = \Omega T_{SAT} = \arcsin\left(\frac{A_{SAT}}{A}\right), \quad (10)$$

где θ_{SAT} – значение фазового угла в момент наступления ограничения.

Определим амплитуду колебания с частотой Ω в спектре сигнала $a_{OUT}^*(t)$ [1]:

$$A^* = \frac{2}{T} \int_0^T a_{OUT}^*(t) \sin(\Omega t) dt. \quad (11)$$

В силу того, что каждая полуволна функции $a_{OUT}^*(t)$ обладает симметрией относительно четверти периода T , можно переписать (11) в виде:

$$A^* = \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} a_{OUT}^*(t) \sin(\Omega t) dt. \quad (12)$$

В свою очередь, интервал времени $[0; \frac{1}{4}T]$ можно разбить на два подинтервала, первый из которых соответствует линейному режиму, второй – нелинейному:

$$A^* = \frac{8}{T} \left[\int_0^{T_{SAT}} a_{OUT}^*(t) \sin(\Omega t) dt + \int_{T_{SAT}}^{\frac{T}{4}} a_{OUT}^*(t) \sin(\Omega t) dt \right]. \quad (13)$$

Дальнейшие рассуждения будем вести, имея в виду как можно более строгое выполнение условия (3).

Обозначим период «быстрого» колебания с частотой ω как Δ . В режиме без ограничения:

$$\int_0^{T_{SAT}} a_{OUT}^*(t) \sin(\Omega t) dt = \int_0^{T_{SAT}} A |\sin(\omega t)| \sin^2(\Omega t) dt. \quad (14)$$

Можно считать, что в течение периода Δ текущее значение «медленного» колебания с частотой Ω неизменно. Очевидно:

$$\int_0^{T_{SAT}} A |\sin(\omega t)| \sin^2(\Omega t) dt = \sum_{i=1}^{\frac{T_{SAT}}{\Delta}} A a_i^2 \cdot 2 \int_0^{\frac{\Delta}{2}} \sin(\omega t) dt. \quad (15)$$

Здесь принято обозначение:

$$a_i = \sin(\Omega t_i), \quad (16)$$

где t_i соответствует середине текущего периода Δ_i .

Введем обозначение:

$$\omega t = \varphi. \quad (17)$$

Произведем замену и выполним преобразования:

$$\sum_{i=1}^{\frac{T_{SAT}}{\Delta}} A a_i^2 \cdot 2 \int_0^{\frac{\Delta}{2}} \sin(\omega t) dt = \sum_{i=1}^{\frac{T_{SAT}}{\Delta}} A a_i^2 \cdot \frac{2}{\omega} \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = \sum_{i=1}^{\frac{T_{SAT}}{\Delta}} A a_i^2 \cdot \frac{2}{\pi} \Delta. \quad (18)$$

Перейдем к пределу при $\Delta \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=1}^{\frac{T_{SAT}}{\Delta}} A a_i^2 \cdot \frac{2}{\pi} \Delta \right\} &= A \frac{2}{\pi} \int_0^{T_{SAT}} \sin^2(\Omega t) dt = A \frac{2}{\pi \Omega} \int_0^{\arcsin\left(\frac{A_{SAT}}{A}\right)} \sin^2 \theta d\theta = \\ &= A \frac{T}{2\pi^2} \left[\arcsin\left(\frac{A_{SAT}}{A}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(2 \arcsin\left(\frac{A_{SAT}}{A}\right)\right) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

В нелинейном режиме сигнал представляет собой последовательность ограниченных однополярных (выпрямленных) колебаний с длительностью каждого $\frac{1}{2} \cdot \Delta$.

Пусть ограничение наступает в момент времени Δ_{SAT} при значении сигнала на входе нелинейности, как и ранее, равном A_{SAT} . Очевидно:

$$\int_{T_{SAT}}^{\frac{T}{4}} a_{OUT}^*(t) \sin(\Omega t) dt = \sum_{i=\frac{T_{SAT}}{\Delta}}^{\frac{T}{4\Delta}} 4 \left[\int_0^{\Delta_{SAT}} A a_i^2 \sin(\omega t) dt + \int_{\Delta_{SAT}}^{\frac{\Delta}{4}} A_{SAT} a_i dt \right]. \quad (20)$$

Выполним преобразования:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=\frac{T_{SAT}}{\Delta}}^{\frac{T}{4\Delta}} 4 \left[\int_0^{\Delta_{SAT}} A a_i^2 \sin(\omega t) dt + \int_{\Delta_{SAT}}^{\frac{\Delta}{4}} A_{SAT} a_i dt \right] = \\
 & = 4A \sum_{i=\frac{T_{SAT}}{\Delta}}^{\frac{T}{4\Delta}} \left[\frac{1}{\omega} \int_0^{\arcsin\left(\frac{A_{SAT}}{A} \frac{1}{a_i}\right)} a_i^2 \sin \varphi d\varphi + \int_{\Delta_{SAT}}^{\frac{\Delta}{4}} a_i \frac{A_{SAT}}{A} dt \right] = \\
 & = A \frac{2}{\pi} \sum_{i=\frac{T_{SAT}}{\Delta}}^{\frac{T}{4\Delta}} \left\{ a_i^2 \left[1 - \cos \left(\arcsin \left(\frac{A_{SAT}}{A a_i} \right) \right) \right] + \left[a_i \frac{A_{SAT}}{A} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\frac{A_{SAT}}{A a_i} \right) \right) \right] \right\} \Delta. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Перейдем к пределу при $\Delta \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ A \frac{2}{\pi} \sum_{i=\frac{T_{SAT}}{\Delta}}^{\frac{T}{4\Delta}} \left\{ a_i^2 \left[1 - \cos \left(\arcsin \left(\frac{A_{SAT}}{A a_i} \right) \right) \right] + \left[a_i \frac{A_{SAT}}{A} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\frac{A_{SAT}}{A a_i} \right) \right) \right] \right\} \Delta \right\} = \\
 & = A \frac{T}{\pi^2} \times \\
 & \times \int_{\arcsin\left(\frac{A_{SAT}}{A}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sin^2 \theta \left[1 - \cos \left(\arcsin \left(\frac{A_{SAT}}{A \sin \theta} \right) \right) \right] + \frac{A_{SAT}}{A} \sin \theta \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\frac{A_{SAT}}{A \sin \theta} \right) \right) \right\} d\theta. \quad (22)
 \end{aligned}$$

Объединив выражения (19) и (22), окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
 A^* & = A \frac{4}{\pi^2} \left[\arcsin \left(\frac{A_{SAT}}{A} \right) - \frac{1}{2} \sin \left(2 \arcsin \left(\frac{A_{SAT}}{A} \right) \right) \right] + A \frac{8}{\pi^2} \times \\
 & \times \int_{\arcsin\left(\frac{A_{SAT}}{A}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sin^2 \theta \left[1 - \cos \left(\arcsin \left(\frac{A_{SAT}}{A \sin \theta} \right) \right) \right] + \frac{A_{SAT}}{A} \sin \theta \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\frac{A_{SAT}}{A \sin \theta} \right) \right) \right\} d\theta. \quad (23)
 \end{aligned}$$

Для нелинейности рассматриваемого вида (ограничение) коэффициент гармонической линейаризации для каждого фиксированного отношения $\frac{A_{SAT}}{A}$ представляет собой действительное число, равное отношению амплитуды основной гармоники периодического сигнала на выходе нелинейности к амплитуде гармонического колебания на ее входе.

Следовательно, искомое выражение для коэффициента гармонической линейаризации $q(A, A_{SAT})$ имеет вид:

$$q(A, A_{SAT}) = \frac{A^*}{A} = \frac{4}{\pi^2} \left[\arcsin\left(\frac{A_{SAT}}{A}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(2 \arcsin\left(\frac{A_{SAT}}{A}\right)\right) \right] + \frac{8}{\pi^2} \times$$

$$\times \int_{\arcsin\left(\frac{A_{SAT}}{A}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sin^2 \theta \left[1 - \cos\left(\arcsin\left(\frac{A_{SAT}}{A \sin \theta}\right)\right) \right] + \frac{A_{SAT} \sin \theta}{A} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{A_{SAT}}{A \sin \theta}\right) \right) \right\} d\theta. \quad (24)$$

Результаты вычисления, в соответствии с (24), интересующих нас коэффициентов для различных отношений $\frac{A_{SAT}}{A}$ приведены в следующей таблице.

Результаты вычисления коэффициентов гармонической линейаризации для блока эквивалентной нелинейности с ограничением, в котором демодуляция производится синхронным выпрямлением

Отношение $\frac{A_{SAT}}{A}$	Коэффициент гармонической линейаризации $q(A, A_{SAT})$
1,0	0,637
0,9	0,630
0,8	0,611
0,7	0,579
0,6	0,535
0,5	0,477
0,4	0,407
0,3	0,325
0,2	0,229
0,1	0,121

Результаты, приведенные в таблице, могут быть получены и иными способами.

Покажем, например, как это можно сделать с помощью имитационного моделирования.

Имитационное моделирование измерения коэффициента гармонической линейаризации

В настоящее время стандартным средством имитационного моделирования при решении большинства задач в области автоматического управления является пакет *Simulink* программной среды *MatLab*.

Воспользуемся указанным пакетом и определим структуру модели измерения коэффициента гармонической линейаризации для блока эквивалентной нелинейности рассматриваемого вида, как показано на рис. 4.

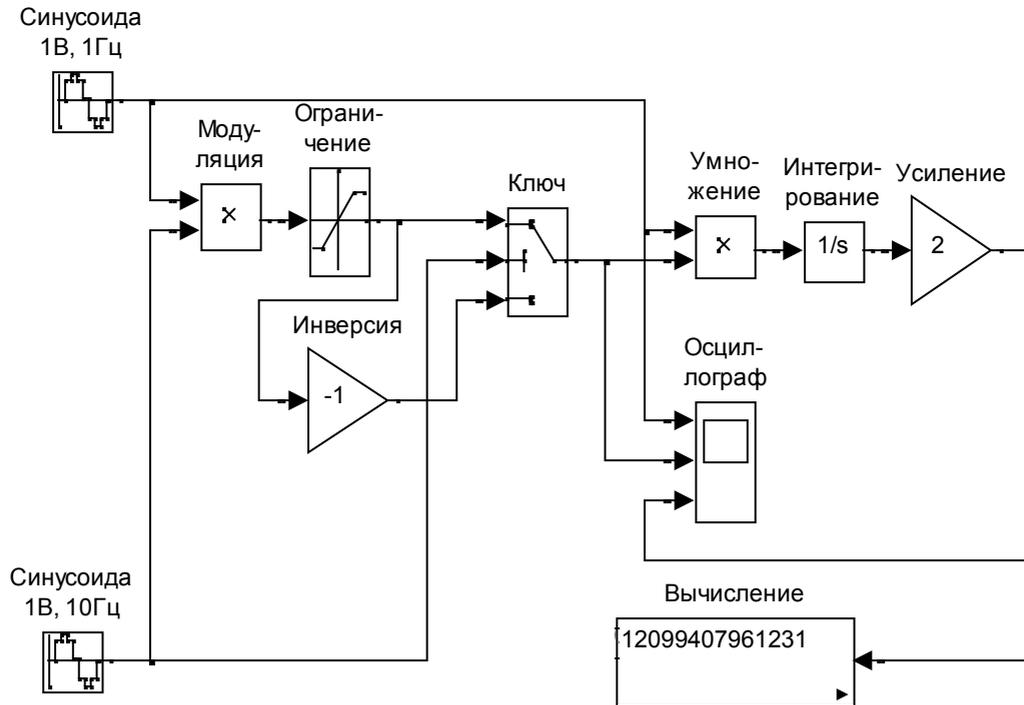


Рис. 4. Модель измерения коэффициента гармонической линейзации для блока эквивалентной нелинейности с ограничением, в котором демодуляция производится синхронным выпрямлением

В блоке *Модуляция* модели (рис. 4) производится модуляция опорного гармонического колебания с выхода блока *Синусоида* 1 В, 10 Гц внешним гармоническим сигналом с выхода блока *Синусоида* 1 В, 1 Гц.

Демодулятор реализован на двухвходовом ключе (блок *Ключ*) и синхронизируется опорным гармоническим колебанием: в течение положительной полуволны синхронизирующей синусоиды открыт верхний по схеме (рис. 4) ключ, в течение отрицательной полуволны – нижний. В первом случае на выход демодулятора поступает сигнал непосредственно с выхода блока *Ограничение*, в последнем – через инвертор (блок *Инверсия*).

Измерительное устройство в модели (рис. 4) представлено блоками *Умножение*, *Интегрирование*, *Усиление*, *Вычисление* и производит определение амплитуды A основной гармоники периодического сигнала на выходе демодулятора в соответствии с выражением (11).

Процедура имитационного моделирования заключается в следующем:

- путем редактирования параметров блока *Синусоида* 1 В, 1 Гц амплитуда внешнего гармонического сигнала A устанавливается равной 1 В, частота – равной 2π рад/с;

- путем редактирования параметров блока *Синусоида* 1 В, 10 Гц амплитуда опорного гармонического колебания устанавливается равной 1 В, частота – равной 20π рад/с;

- интервал времени ΔT , в течение которого производится интегрирование, устанавливается равным длительности периода внешнего гармонического сигнала, т. е. равным 1 с;

- путем редактирования параметров блока *Ограничение* уровень ограничения A_{SAT} последовательно изменяется в пределах от ± 1 В до $\pm 0,1$ В таким образом, чтобы в

каждом случае отношение $\frac{A_{SAT}}{A}$ принимало требуемое значение из приведенных в таблице;

– для каждого из установленных уровней ограничения производится измерение амплитуды A^* , в данном случае численно равной коэффициенту гармонической линеаризации для заданного отношения $\frac{A_{SAT}}{A}$.

Заключение

Результаты данного небольшого теоретического исследования могут быть использованы при анализе замкнутых систем с преобразованием сигнала управления в контуре регулирования, в которых сигнал переменного тока локализуется на участке «модулятор–нелинейность–демодулятор», как показано на рис. 1.

Описанная здесь методика применялась, в частности, при исследовании устойчивости системы задания нагрузки велоэргометра с электромагнитным нагружением [4].

Литература

1. Математические основы теории автоматического регулирования : учеб. пособие для вузов / В. А. Иванов [и др.] ; под ред. Б. К. Чемоданова. – М. : Высш. шк., 1971. – 808 с.
2. Попов Е. П. Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах / Е. П. Попов. – М. : Наука, 1973. – 584 с.
3. Филлипс Ч. Системы управления с обратной связью / Ч. Филлипс, Р. Харбор. – М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 616 с.
4. Забеньков И. И. Исследование передаточной функции нагрузочного устройства велоэргометра с электромагнитной системой торможения / И. И. Забеньков, В. В. Кикинев, Д. А. Еньков // Докл. БГУИР. – 2003. – Т. 1, № 3. – С. 5–11.

Получено 13.10.2005 г.