УДК 536.2.01

К ВОПРОСУ О КОЛЕБАНИЯХ В ТЕПЛОФИЗИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ «СРЕДА – ОБЪЕМНЫЙ ИСТОЧНИК ЭНЕРГИИ»

О.Н. ШАБЛОВСКИЙ

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого», Республика Беларусь

Введение

Локально-неравновесный теплоперенос в неподвижной среде определяется уравнением для теплового потока и уравнением баланса энергии:

$$q + \gamma \frac{\partial q}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \; c\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\nu q}{x} = q_\nu, \qquad (1)$$

где q – удельный тепловой поток, T – температура, c – объемная теплоемкость, λ – коэффициент теплопроводности, γ – время релаксации теплового потока, q_ν – мощность внутренних источников энергии, t – время, x – декартова либо радиальная координата; $\nu = 0,1,2$ – параметр, характеризующий тип симметрии (плоский, цилиндрический, сферический).

Современные методы нелинейного анализа теплофизических процессов, описываемых уравнениями (1), изложены в [1]. *Цель данной работы*: 1) построить новый класс точных решений уравнений релаксационного теплопереноса; 2) рассмотреть возможности появления устойчивых параметрических колебаний в средах с объемными источниками энергии.

Алгоритм построения решения

Рассмотрим уравнения теплопереноса (1). Теплофизические свойства среды будем описывать следующими зависимостями:

$$\lambda = \lambda_0 T^{n_1} l(x) m(t); \;\; c = c_0 T^{n_2} k(x) h(t); \;\; \gamma = \gamma(t);$$

$$q_\nu = Q_0(t) k(x) T^{1+n_2}; \;\; \lambda_0, c_0, n_1, n_2 - const.$$

Это означает, что свойства среды явно зависят от времени и неоднородны по координате x. Проведем аналитические преобразования, имеющие целью разделение переменных x и t. Тепловой поток запишем в виде:

$$q(x,t) = V(x) B(t)$$

и получим:

$$-\frac{\lambda_0}{m_1}\frac{\partial}{\partial x}(T^{m_1}) = \frac{V(x)}{l(x)} \cdot \frac{(B + \gamma \dot{B})}{m(t)}; \;\; \dot{B}(t) = dB/dt, \;\; m_1 = 1 + n_1.$$

После интегрирования этого равенства по x имеем:

$$-\frac{\lambda_0 T^{m_1}}{m_1}=\frac{(B+\gamma\dot{B})}{m}p(x);$$

$$p(x)=p_0+\int\limits_{x_0}^{x}\frac{V(x)}{l(x)}dx\,;\; x_0\,, p_0-const.$$

Отсюда выводим такие формулы:

$$T(x,t)=\left[-\frac{m_1}{\lambda_0 m}(B+\gamma\dot{B})p(x)\right]^{\frac{1}{m_1}};$$

$$E\equiv T^{m_2}=\left[-\frac{m_1}{\lambda_0 m}(B+\gamma\dot{B})p(x)\right]^{\frac{1}{\beta+1}},$$

где $m_2=1+n_2$; $\beta=(n_1-n_2)/m_2$ – параметр нелинейности среды.

Уравнение энергии принимает вид:

$$\frac{c_0 kh}{m_2}\frac{\partial E}{\partial t}+(V'+\frac{v}{x}V)B=Q_0 kE\,,\; V'(x)=dV(x)/dx.$$

Далее применяем обозначение:

$$D(t)=\left[\frac{-m_1}{\lambda_0 m}(B+\gamma\dot{B})\right]^{\frac{1}{\beta+1}},\; E=D(t)p^{\frac{1}{\beta+1}}(x)\,,$$

где $D(t)$ – неизвестная функция. Теперь уравнение энергии запишем в виде, удобном для разделения переменных:

$$kp^{\frac{1}{\beta+1}}\left[\frac{c_0 h}{m_2}\dot{D}-Q_0 D\right]=-B\left(V'+\frac{v}{x}V\right).$$

После этого вводим в алгоритм преобразований константу разделения μ:

$$\frac{V'+\frac{v}{x}V}{kp^{\frac{1}{\beta+1}}}=\mu=\frac{Q_0 D-\frac{c_0}{m_2}h\dot{D}}{B}.$$

Таким образом, динамика тепловых процессов по отношению к координате x определяется системой уравнений:

$$\frac{dp(x)}{dx}=\frac{V(x)}{l(x)},$$

$$\frac{dV(x)}{dx}=\mu k(x)p^{\frac{1}{\beta+1}}(x)-\frac{v}{x}V(x),$$

или, что то же, одним уравнением второго порядка для $p(x)$:

$$l(x)\frac{d^2p}{dx^2}+\left[l'(x)+\frac{\nu}{x}l(x)\right]\frac{dp}{dx}-\mu k(x)p^{\frac{1}{\beta+1}}=0. \qquad (2)$$

Эволюция во времени теплового состояния системы «источник энергии – среда» определяется системой уравнений:

$$\gamma(t)\frac{dB(t)}{dt}=-B-\frac{\lambda_0 m}{m_1}D^{\beta+1},$$

$$\frac{c_0h(t)}{m_2}\cdot\frac{dD(t)}{dt}=Q_0(t)D-\mu B.$$

Уравнение для функции $D(t)$ выглядит так:

$$\ddot{D}+\left[\frac{\dot{h}}{h}+\frac{1}{\gamma}-\frac{Q_0m_2}{c_0h}\right]\dot{D}-\frac{m_2}{c_0h}\left(\dot{Q}_0+\frac{Q_0}{\gamma}\right)D-\frac{\lambda_0m_2\mu m}{m_1c_0\gamma h}D^{\beta+1}=0. \qquad (3)$$

Отметим несколько важных частных случаев, содержащихся в представленном классе решений.

Реономная среда

Изучаем линейный процесс: $\beta=0$. В уравнении (3) обозначим

$$Q_1(t)=\frac{\dot{h}}{h}+\frac{1}{\gamma}-\frac{Q_0m_2}{c_0h},$$

$$\mu_1^2(t)=-\frac{m_2}{c_0h}\left(\dot{Q}_0+\frac{Q_0}{\gamma}\right)-\frac{\lambda_0m_2\mu m}{m_1c_0\gamma h}>0,$$

где $h(t), m(t), \gamma(t), Q_0(t)$ – ограниченные непрерывно дифференцируемые функции при $t\geq 0$. Условие $\mu_1^2(t)>0$ обеспечивается подходящим выбором $\mu\equiv const$. Считаем также, что $\mu_1(t)>0$ – монотонная функция. Согласно [2], для этого типа уравнений достаточное условие ограниченности параметрических колебаний состоит в следующем: нужно, чтобы коэффициенты $Q_1(t), \mu_1(t)$ – удовлетворяли неравенству

$$\frac{1}{\mu_1}\cdot\frac{d\mu_1}{dt}+Q_1\geq 0,\ t\geq 0.$$

Пусть процесс по-прежнему линейный, $\beta=0$ и действует реономный источник энергии $q_\nu=TQ_0(t)$. Тогда вместо (3) удобнее работать с уравнением для функции $B(t)$:

$$\ddot{B}+\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{m_2Q_0}{c_0}\right)\dot{B}+B\frac{m_2}{c_0m_1\gamma}(-\lambda_0\mu-Q_0m_1)=0,$$

$$Q_2(t)=\frac{1}{\gamma}-\frac{m_2Q_0}{c_0},$$

$$\mu_2^2(t)=\frac{m_2}{c_0m_1\gamma}(-\lambda_0\mu-Q_0m_1)>0,$$

$$m\equiv 1, h\equiv 1; \gamma=\gamma(t), Q_0=Q_0(t).$$

Для этого типа колебаний достаточное условие устойчивости решения, т. е. условие отсутствия параметрического резонанса, имеет вид:

$$\frac{1}{\mu_2}\cdot\frac{d\mu_2}{dt}+Q_2\geq 0,\;\; \mu_2(t)>0,\;\; t\geq 0.$$

Квазилинейный (слабо нелинейный) вариант уравнения (3) выглядит так:

$$h\equiv 1, \gamma\equiv const, Q_0\equiv const, m=m(t), \beta\neq 0;$$

$$\ddot{D}+\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{Q_0 m_2}{c_0}\right)\dot{D}+D\left(-\frac{m_2}{c_0\gamma}Q_0\right)=\mu\frac{\lambda_0 m_2 m}{m_1 c_0\gamma}D^{\beta+1},$$

где $m_2 Q_0<0$, μ – малый параметр, характеризующий степень близости системы к нелинейной. Методы исследования таких процессов хорошо разработаны.

Сильно нелинейная система с одной степенью свободы:

$$h\equiv 1,\;\; \gamma\equiv const,\;\; m\equiv 1,$$

$$\dot{Q}_0+\frac{Q_0}{\gamma}=Q_1\equiv const,\;\; Q_0=\gamma Q_1+Q_2\exp(-t/\gamma),\;\; Q_2\equiv const;$$

$$\ddot{D}+D\cdot\left(-\frac{m_2 Q_1}{c_0}\right)-\frac{\lambda_0 m_2\mu}{c_0 m_1\gamma}D^{\beta+1}=\left(\frac{Q_0 m_2}{c_0}-\frac{1}{\gamma}\right)\dot{D};$$

$$Q_2=\varepsilon Q_{21},\;\; \frac{m_2\gamma Q_1}{c_0}-\frac{1}{\gamma}=\varepsilon Q_{11};\; Q_{11},Q_{21}-const,$$

где ε – малый параметр, μ – большой параметр. Такая система является сильно нелинейной квазиконсервативной: она содержит существенно нелинейный член $D^{\beta+1}$ с большим параметром $\mu=O(\varepsilon^{-\alpha})$, где $\alpha>0$; эта запись означает, что величина μ имеет порядок, равный $\varepsilon^{-\alpha}$.

Неоднородная среда

Для уравнения (2) сначала возьмем случай плоской симметрии $\nu=0$:

$$\frac{d^2p}{dx^2}+\left(\frac{l'}{l}\right)\frac{dp}{dx}-\frac{\mu k}{l}p^{\frac{1}{\beta+1}}=0.$$

Изучаем линейный процесс: $\beta=0$. Обозначим

$$l_1(x)=l'/l,\;\; -\frac{\mu k}{l}=\mu_1^2(x)>0,\;\; \mu<0,$$

где $l(x), k(x)$ – ограниченные непрерывно дифференцируемые функции при $x\geq 0$; $\mu_1(x)$ – монотонная функция. Достаточное условие устойчивости решения имеет вид:

$$\frac{1}{\mu_1(x)}\cdot\frac{d\mu_1(x)}{dx}+l_1(x)\geq 0,\;\; x\geq 0.$$

Еще один пример неоднородности по координате: $\beta = 0,\ l'(x) \equiv 0,\ l \equiv 1,\ k = k(x)$, т. е. $q_v = Tk(x)$. Безразмерную функцию $\mu k(x)$ возьмем в такой форме: $-\mu k(x) = 1 + k_1(x)$. Согласно теореме, доказанной в [2], для ограниченности решения уравнения

$$\frac{d^2 p}{dx^2} + [1 + k_1(x)]p = 0$$

достаточно, чтобы сходился интеграл

$$\int_0^x \left| \frac{dk_1(x)}{dx} \right| dx.$$

Нелинейная среда

Изучаем вариант, когда теплофизические параметры однородные по x: $l \equiv 1, k \equiv 1, \beta \neq 0.$ Плоская симметрия: $v = 0,$

$$\frac{d^2 p}{dx^2} - \mu p^{\frac{1}{\beta+1}} = 0.$$

Отсюда находим первый интеграл

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 = \frac{2\mu(\beta+1)}{(\beta+2)} p^{\frac{\beta+2}{\beta+1}} + C,$$

где C – произвольная константа.

Центральная симметрия: $v = 1, 2;$

$$\frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{v}{x} \cdot \frac{dp}{dx} - \mu p^{\frac{1}{\beta+1}} = 0.$$

Применяем логарифмическую координату $z = \ln x$:

$$p = x^{\beta_0} A(z),\ \beta_0 = 2(\beta+1)/\beta,\ \beta_1 = \beta_0 + v - 1,$$

$$\frac{d^2 A}{dz^2} + (\beta_0 + \beta_1)\frac{dA}{dz} + \beta_0 \beta_1 A = \mu A^{\frac{1}{\beta+1}}.$$

Этому уравнению соответствует динамическая система

$$\left.\begin{aligned} \frac{dA}{dz} &= M - \beta_0 A, \\ \frac{dM}{dz} &= \mu A^{\frac{1}{\beta+1}} - \beta_1 M, \end{aligned}\right\}$$

где $A(z), M(z)$ – искомые функции. Состояния равновесия (A_0, M_0) определяются уравнениями:

$$\beta_0 A_0 = M_0,\ A_0\left(\mu A_0^{-\frac{\beta}{\beta+1}} - \beta_0 \beta_1\right) = 0.$$

Для сферической симметрии $v = 2$ получаем при $\beta = -4/5$, что $\beta_0 = -\beta_1 = -1/2;$ тогда имеем уравнение

$$\frac{d^2 A}{dz^2} - \frac{A}{4} = \mu A^5,$$

для которого строим первый интеграл

$$\left(\frac{dA}{dz}\right)^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{\mu A^6}{3} + const.$$

Дальнейший качественный анализ поведения представленных динамических систем выполняется обычными методами теории нелинейных колебаний.

Вывод

Полученный в работе класс решений дает возможность изучить влияние нелинейных, реономных и неоднородных свойств среды, обладающей «тепловой памятью», на формирование пространственно-временной структуры температурного поля в системе «среда – объемный источник энергии».

Литература

1. Шабловский О.Н. Релаксационный теплоперенос в нелинейных средах. – Гомель: ГГТУ им. П.О. Сухого, 2003. – 382 с.
2. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1969. – 380 с.

Получено 21.07.2004 г.