Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

М. В. Задорожнюк, Н. Н. Бородин, Е. А. Дегтярева

РЯДЫ.
КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

ПОСОБИЕ
по выполнению тестовых заданий
по дисциплине «Математика»
для студентов всех специальностей
заочной формы обучения

Гомель 2014

УДК 517(075.8)
ББК 22.16я73
З-15

*Рекомендовано научно-методическим советом
заочного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 2 от 05.12.2013 г.)*

Рецензент: зав. каф. «Физика» БелГУТ канд. физ.-мат. наук *В. А. Зыкунов*

Задорожнюк, М. В.

З-15 Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля : пособие по выполнению тестовых заданий по дисциплине «Математика» для студентов всех специальностей заоч. формы обучения / М. В. Задорожнюк, Н. Н. Бородин, Е. А. Дегтярева. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2014. – 66 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://library.gstu.by. – Загл. с титул. экрана.

Содержит краткие теоретические сведения по разделам «Ряды», «Кратные интегралы», «Криволинейные интегралы» и «Элементы теории поля» с примерами решения задач, а также варианты практических и теоретических тестовых заданий.

Для студентов всех специальностей заочной формы обучения.

УДК 517(075.8)
ББК 22.16я73

СОДЕРЖАНИЕ

1. РЯДЫ

1.1. Числовые ряды с положительными членами

Если задана бесконечная числовая последовательность $\{a_n\}$, то выражение

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1.1)$$

называется *числовым рядом* и сокращенно обозначается $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (a_n при этом называется общим членом ряда).

Сумма первых n членов числового ряда называется n-*ой частичной суммой* и обозначается S_n

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Суммой ряда S называется предел последовательности частичных сумм, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S. \qquad (1.2)$$

Числовой ряд (1.1) называется *сходящимся*, если предел (1.2) существует и конечен. В противном случае ряд называется *расходящимся*.

Свойства сходящихся числовых рядов:

1. Если числовой ряд сходится, то сходится и ряд, полученный отбрасыванием из него конечного числа членов.
2. Если ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ сходится, то сходится и ряд, полученный умножением каждого члена на постоянную $ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n + \ldots$.

3. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то сходится и ряд, полученный почленным сложением или вычитанием их членов $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$.

Признаки сходимости числовых рядов с положительными членами:

- *Необходимый признак сходимости:*

Если числовой ряд сходится, то предел его n-го члена равен нулю, т.е. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Обратное утверждение неверно.

Следствие: если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

- *Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами*

1. ***Первый признак сравнения***

Пусть имеется два ряда с положительными членами

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots$, причем $0 < a_n \le b_n$ для любого n (или начиная с некоторого номера n_0). Тогда из сходимости «большего» ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость «меньшего» ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

2. ***Второй (предельный) признак сравнения***

Пусть имеются два ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Если предел отношения их n-ых членов $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ конечен и отличен от нуля, то ряды ведут себя одинаково: либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

Для применения указанных признаков необходимо заранее знать поведение одного из рядов. Часто в качестве «эталонных» используют следующие ряды:

Гармонический ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots \qquad (1.3)$$

Данный ряд является *расходящимся*.

Ряд Дирихле (*обобщенный гармонический ряд*):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots \qquad (1.4)$$

Ряд Дирихле сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$.

Сумма *бесконечной геометрической прогрессии*:

$$\sum_{n=1}^{\infty}q^n=q+q^2+q^3+\ldots \qquad (1.5)$$

Данный ряд сходится при $|q|<1$ и расходится при $|q|\ge 1$.

3. ***<u>Признак сходимости д'Аламбера</u>***

Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=k$, то при $k<1$ ряд сходится, а при $k>1$ расходится. При $k=1$ данный признак не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.

4. ***<u>Радикальный признак Коши</u>***

Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=k$, то при $k<1$ ряд сходится, а при $k>1$ расходится. В случае, когда $k=1$, данный признак не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.

5. ***<u>Интегральный признак Коши</u>***

Если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ таковы, что $a_n=f(n)$ для всех натуральных n, где $f(x)$ – непрерывная положительная монотонно убывающая на полуинтервале $[1;+\infty)$ функция, то этот ряд сходится (расходится) тогда и только тогда, когда сходится (расходится) несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$.

Пример 1.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{3n^2+5}$.

Решение

Все члены данного ряда положительны, а значит, для исследования его на сходимость мы можем воспользоваться необходимым или одним из пяти достаточных признаков. Так как n-ый член ряда $a_n=\frac{n^2+1}{3n^2+5}$ имеет довольно простой вид, то попробуем воспользоваться необходимым признаком сходимости. Найдем предел n -го члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{3n^2+5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{3}\neq 0.$$

Т.к. предел n-го члена ряда не равен нулю, то по следствию из необходимого признака ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

Замечание. Напомним правило раскрытия неопределенностей вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. К таким неопределенностям приводит, как правило, вычисление пределов вида $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – функции целой или дробной степени переменной x. Для вычисления пределов такого вида необходимо числитель и знаменатель дроби разделить на x в наивысшей степени, содержащейся во всем выражении.

Если деление на старшую степень представляется затруднительным, то при вычислении предела вида $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно воспользоваться следующим правилом:

– предел равен нулю, если степень числителя меньше степени знаменателя;

– предел равен бесконечности, если степень числителя больше степени знаменателя;

– предел равен отношению коэффициентов при старших степенях, если степени числителя и знаменателя равны.

Можно также воспользоваться правилом Лопиталя (перейти к пределу отношения производных числителя и знаменателя).

Пример 1.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+5^n}$.

Решение

Очевидно, что предел n-го члена ряда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+5^n} = \frac{1}{\infty} = 0$, а значит, необходимый признак выполняется, но этого не достаточно. Применим первый признак сравнения. В качестве ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ возьмем исходный ряд, а в качестве ряда для сравнения $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$. Тогда для всех n выполняется неравенство

$$a_n = \frac{1}{n+5^n} < \left(\frac{1}{5}\right)^n = b_n.$$

Т.к. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$ представляет собой сумму бесконечной геометрической прогрессии вида (1.5) со знаменателем $q = \frac{1}{5} < 1$, то, он сходится. Согласно первому признаку сравнения, из сходимости большего ряда следует сходимость меньшего, значит, исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+5^n}$ сходится.

Ответ: ряд сходится.

Пример 1.3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3n^2+n+1}$.

Решение

Применим необходимый признак. Найдем предел n-го члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n^2+n+1} = 0,$$

т.к. степень числителя меньше степени знаменателя. Условие необходимого признака выполнено, однако это условие *необходимо*, но *не достаточно* для того, чтобы ряд сходился.

Воспользуемся вторым (предельным) признаком сравнения. Для начала выберем ряд для сравнения. Для этого запишем исходный ряд, а затем оставим в нем только старшие степени числителя и знаменателя:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n^2+n+1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

Полученный таким образом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и есть ряд, с которым надо сравнить исходный, т.е. найти предел отношения a_n к b_n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n^2+n+1} : \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n}{3n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{3n^2+n+1} = \frac{1}{3}.$$

Предел отношения n-ых членов рядов конечен и не равен нулю, следовательно, согласно второму признаку сравнения, ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n^2+n+1}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ведут себя одинаково, а так как гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то расходится и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n^2+n+1}$.

Ответ: ряд расходится.

Замечание. К признакам сравнения часто приходится прибегать при исследовании на сходимость рядов, содержащих тригонометрические функции. При этом удобно использовать эквивалентные бесконечно малые. Напомним некоторые из них (все они имеют место при $x \to 0$):

$$\sin x \sim x, \qquad \arcsin x \sim x,$$
$$\operatorname{tg} x \sim x, \qquad \operatorname{arctg} x \sim x.$$

Пример 1.4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n^2}$.

Решение

Покажем, что $\operatorname{tg} \frac{\pi}{n^2}$ является бесконечно малой при $n \to \infty$. Для этого найдем соответствующий предел:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n^2} = \operatorname{tg} \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n^2} = \operatorname{tg} 0 = 0.$$

Значит, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{n^2}$ – бесконечно малая при $n \to \infty$. Т.к при стремлении n к бесконечности аргумент тангенса $\frac{\pi}{n^2}$ стремится к нулю, то справедливо соотношение:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{n^2} \sim \frac{\pi}{n^2}$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{\pi}{n^2}$ эквивалентен ряду $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\pi}{n^2} = \pi \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ является рядом Дирихле вида (1.4) при $p = 2 > 1$, значит, этот ряд сходится, следовательно, сходится и исходный ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{\pi}{n^2}$.

Ответ: ряд сходится.

Пример 1.5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$.

Решение

Т.к. n-ый член ряда содержит знак факториала (!), то для исследования ряда на сходимость придется воспользоваться признаком д’Аламбера.

Выпишем n-ый член ряда $a_n = \frac{5^n}{n!}$ и следующий за ним $(n+1)$-ый член ряда $a_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)!}$.

Теперь применим признак д’Аламбера: вычислим предел отношения $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ при $n \to \infty$ и сравним получившийся предел с единицей.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{5^n}{n!} = \lim_{n \to \infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{5^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{5 \cdot n!}{(n+1)!}.$$

Мы сократили дробь на 5^n. Теперь сократим факториалы.

Т.к. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$ – произведение чисел от единицы до n, $(n+1)! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n}_{n!} \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot n!}{n!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+1}=\frac{5}{\infty}=0\,.$$

Так как получившийся предел равен нулю, а это меньше единицы, то, согласно признаку д'Аламбера, данный ряд сходится.

Ответ: ряд сходится.

Пример 1.6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^3}$.

Решение

Т.к. n-ый член ряда содержит факториал, то воспользуемся признаком д'Аламбера. Выпишем n-ый и $(n+1)$-ый члены ряда:

$$a_n=\frac{(n+1)!}{n^3}\,,$$

$$a_{n+1}=\frac{((n+1)+1)!}{(n+1)^3}=\frac{(n+2)!}{(n+1)^3}\,.$$

Вычислим предел отношения $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ при $n\to\infty$ и сравним получившийся предел с единицей.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{(n+1)^3}:\frac{(n+1)!}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{(n+1)^3}\cdot\frac{n^3}{(n+1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^3\cdot\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots(n+1)\cdot(n+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3\cdot(n+2)=$$

$$=[\text{заметим, что }\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1]=\lim_{n\to\infty}(n+2)=\infty\,.$$

Так как полученный предел больше единицы, то, согласно признаку д'Аламбера, ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

Пример 1.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{2n+1}\right)^{5n}$.

Решение

Если n-ый член ряда представляет собой выражение, возведенное в некоторую степень, содержащую n (например, в степень n, $3n$ или n^2), то обычно пользуются радикальным признаком Коши. Согласно этому признаку, необходимо найти предел корня n-ой степени из n-ого члена ряда (как всегда, при $n \to \infty$) и сравнить его с единицей. Итак,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+2}{2n+1}\right)^{5n}} == \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{2n+1}\right)^{\frac{5n}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{2n+1}\right)^{5} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{243}{32} > 1.$$

Число, получившееся в пределе, больше единицы, а значит, согласно признаку Коши, данный ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

Пример 1.8. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3n+3}{3n+1}\right)^n$.

Решение

Воспользуемся радикальным признаком Коши. Найдем $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+3}{3n+1}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+3}{3n+1}\right) = 1,$$

а это значит, что признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.

Применим необходимый признак сходимости. Найдем предел n-ого члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+3}{3n+1}\right)^n = (1^\infty).$$

Для раскрытия неопределенности вида (1^∞) можно воспользоваться формулой

$$\lim_{x\to a}(u(x))^{v(x)} = (1^\infty) = e^{\lim\limits_{x\to a}(u(x)-1)\cdot v(x)}.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+3}{3n+1}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+3}{3n+1}-1\right)n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+3-(3n+1)}{3n+1}\right)n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3n+1}\right)n} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)} = e^{\frac{2}{3}} \approx 2{,}7^{\frac{2}{3}}.$$

Т.к. полученный предел не равен нулю, то, согласно необходимому признаку сходимости, данный ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

Пример 1.9. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$.

Решение

Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x\ln^3 x}$. Она положительна и монотонно не убывает на полуинтервале $[2;+\infty)$, а значит, можно воспользоваться интегральным признаком Коши. Вычислим несобственный интеграл:

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}=\left[\frac{dx}{x}=d(\ln x)\right]=\int_2^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln^3 x}=\int_2^{+\infty}(\ln x)^{-3}d(\ln x)=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}(\ln x)^{-3}d(\ln x)=\begin{bmatrix}\text{воспользуемся формулой}\\ \int_a^b x^n dx=\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b\end{bmatrix}=\lim_{b\to\infty}\left.\frac{(\ln x)^{-2}}{-2}\right|_2^b=$$

$$=-\lim_{b\to\infty}\left.\frac{1}{2\ln^2 x}\right|_2^b=-\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2\ln^2 b}-\frac{1}{2\ln^2 2}\right).$$

Так как при стремлении b к бесконечности $\ln b$ также стремится к бесконечности, то $\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2\ln^2 b}=0$, а значит, $\int_2^{+\infty} f(x)dx=\frac{1}{2\ln^2 2}\neq\infty$.

Следовательно, несобственный интеграл $\int_2^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а значит, сходится и ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$.

Ответ: ряд сходится.

1.2. Знакочередующиеся ряды

Определение. Ряд называется ***знакопеременным***, если среди его членов есть как положительные, так и отрицательные.

Определение. Знакопеременный ряд называется ***абсолютно сходящимся,*** если сходится ряд, составленный из модулей его членов.

Определение. Знакопеременный ряд называется ***условно сходящимся,*** если сам ряд сходится, а ряд, составленный из модулей, расходится.

Определение. Числовой ряд называется ***знакочередующимся***, если любые два его соседних члена имеют разные знаки:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n,\ a_n \geq 0 \qquad (1.6)$$

Теорема Лейбница

Если члены знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n,\ a_n \geq 0$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

2) $a_n > a_{n+1} > a_{n+2} > \ldots,$

то

а) заданный ряд сходится;

б) его сумма имеет знак первого члена;

в) его сумма не превосходит первого члена.

Пример 1.10. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{n^6}{6^n}$ на абсолютную и условную сходимость.

Решение

Запишем несколько первых членов этого ряда, чтобы убедиться, что он знакочередующийся. Для этого будем подставлять вместо n единицу, двойку, тройку и т.д.:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^6}{6^n} = -\frac{1}{6} + \frac{2}{6^2} - \frac{3}{6^3} + \cdots$$

Данный ряд является знакочередующимся. Как мы знаем, знакочередующийся ряд может *расходиться*, может *сходиться абсолютно* (когда сходится ряд, составленный из модулей) и может *сходиться условно* (когда ряд из модулей расходится, но сам исходный ряд сходится).

Исследуем ряд сначала *на абсолютную сходимость*. Для этого составим ряд из абсолютных величин (из модулей): $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^6}{6^n}$.

Применим признак Коши: найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ и сравним его с единицей.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^6}{6^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^6}}{6}=\begin{bmatrix}\text{воспользуемся равенством}\\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\end{bmatrix}=\frac{1}{6}<1,$$

следовательно, ряд сходится, причем сходится абсолютно.

Ответ: сходится абсолютно.

Замечание. Абсолютная сходимость «самая сильная», поэтому если ряд сходится абсолютно, то на условную сходимость его проверять уже не надо.

Пример 1.11. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+1}{\sqrt[3]{n^5+2n}}$ на абсолютную и условную сходимость.

Решение

Исследуем данный знакочередующийся ряд *на абсолютную сходимость*. Составим ряд из модулей:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt[3]{n^5+2n}}.$$

Заметим, что при исследовании такого ряда на сходимость не годятся ни признак д’Аламбера, ни признак Коши (при вычислении соответствующего предела любой из этих признаков даст единицу, а в этом случае, как мы знаем, необходимо применить какой-нибудь другой признак).

Применим предельный (второй) признак сравнения. Выберем ряд для сравнения. Для этого запишем исходный ряд, а затем оставим в нем только старшие степени числителя и знаменателя:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt[3]{n^5+2n}}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{\sqrt[3]{n^5}}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^{5/3}}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2/3}}=2\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

Полученный таким образом ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2/3}}$ и есть ряд, с которым надо сравнить исходный, т.е. найти предел отношения a_n к b_n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt[3]{n^5+2n}}:\frac{1}{n^{2/3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)n^{2/3}}{\sqrt[3]{n^5+2n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^{5/3}+n^{2/3}}{\sqrt[3]{n^5+2n}}=2\neq 0,\neq\infty,$$

следовательно, согласно второму признаку сравнения, ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt[3]{n^5+2n}}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2/3}}$ ведут себя одинаково.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2/3}}$ является *рядом Дирихле* вида (1.4), для которого $p=\frac{2}{3}<1$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2/3}}$ расходится, а значит, расходится и ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt[3]{n^5+2n}}$. Таким образом, абсолютной сходимости у ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{\sqrt[3]{n^5+2n}}$ нет.

Исследуем теперь *на условную сходимость*. Для этого проверим выполнение двух условий признака Лейбница:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt[3]{n^5+2n}}=0$, т.к. имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, причем степень числителя меньше степени знаменателя. Таким образом, первое условие признака Лейбница выполняется.

2) Рассмотрим последовательность членов нашего ряда (точнее, их модулей). Для этого подставим в формулу n-го члена ряда $n=1,2,3$ и т.д. Получим числа $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$, $\frac{5}{\sqrt[3]{36}}$, $\frac{7}{\sqrt[3]{249}}$, … Как видим, эта последовательность убывает, т.е. $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}>\frac{5}{\sqrt[3]{36}}>\frac{7}{\sqrt[3]{249}}>\ldots>a_n>a_{n+1}>\ldots$. Таким образом, выполняется второе условие признака Лейбница.

Оба условия выполнены, следовательно, ряд сходится, но т.к. ряд из модулей расходится, то исходный ряд сходится только *условно*.

Ответ: ряд сходится условно.

Пример 1.12. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{5n+2}$ на абсолютную и условную сходимость.

Решение

Прежде чем говорить об абсолютной или условной сходимости, применим *необходимый признак* сходимости числового ряда: если ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то предел n-го члена ряда (а значит, и его модуля) равен нулю. В нашем примере n-ый член ряда достаточно простой, поэтому нам нетрудно будет вычислить этот предел:

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{5n+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{2}{5} \neq 0.$$

Мы видим, что предел отличен от нуля, т.е. не выполнено самое главное, *необходимое* условие сходимости, следовательно, ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

1.3. Функциональные ряды. Степенные ряды

<u>*Определение.*</u> Пусть задана бесконечная последовательность функций $\{u_n(x)\}$. ***Функциональным рядом*** называется сумма всех ее членов:

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (1.7)$$

<u>*Определение.*</u> Точка x_0 называется ***точкой сходимости*** функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ является сходящимся.

<u>*Определение.*</u> ***Областью сходимости*** функционального ряда называется совокупность всех его точек сходимости.

Сумма ряда

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty}(u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x))$$

в области сходимости функционального ряда является функцией аргумента x.

Из всех функциональных рядов наиболее часто применяют степенные ряды, которыми называют ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots c_n x^n \quad (1.8)$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots c_n(x-a)^n. \quad (1.9)$$

Числа c_n называются ***коэффициентами степенного ряда***.

Неотрицательное число R, такое, что ряд (1.9) сходится в интервале $(a-R;a+R)$ и расходится вне этого интервала, называется радиусом сходимости этого ряда, а интервал $(a-R;a+R)$ – его интервалом сходимости. Если ряд (1.9) только в одной точке $x=a$, то для него $R=0$. Для ряда (1.8) интервалом сходимости является интервал $(-R;R)$. В своем интервале сходимости ряд сходится абсолютно.

Если среди коэффициентов степенных рядов (1.8) и (1.9) нет равных нулю, то радиус сходимости может быть найден с помощью одной из формул:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \tag{1.10}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \tag{1.11}$$

Вопрос о сходимости степенных рядов (1.8) и (1.9) на концах интервала сходимости исследуется отдельно.

Замечание. Знак модуля в формулах (1.8) и (1.9) можно опустить, если точно известно, что коэффициенты ряда c_n положительны.

Пример 1.13. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n}$.

Решение

Как известно, степенной ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n x^n$ сходится абсолютно внутри интервала $(-R;R)$, причем радиус сходимости R находится по формуле (1.10) или (1.11).

В нашем примере $c_n=\frac{1}{5^n}$.

Воспользуемся формулой (1.11):

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{1/5^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^n}=5.$$

Следовательно, ряд сходится абсолютно внутри интервала $(-5;5)$.

Исследуем поведение ряда на концах этого интервала. Для этого подставим значения $x_1 = 5$ и $x_2 = -5$ в исходный ряд (в условие задачи).

Для $x_1 = 5$ получим: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$

Очевидно, этот ряд расходится (можно воспользоваться и необходимым признаком, показав, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$). Следовательно, граница $x_1 = 5$ не входит в область сходимости ряда.

Для $x_2 = -5$ получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$$

Этот ряд также расходится (можно воспользоваться также необходимым признаком, показав, что $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$). Следовательно, граница $x_2 = -5$ также не содержится в области сходимости ряда.

Ответ: ряд сходится при $x \in (-5;5)$.

Замечание. Подставлять концы интервала в исходный ряд в большинстве случаев удобно именно в таком порядке – сначала больший, потом меньший.

Пример 1.14. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{4^n n^4}$.

Решение

Как известно, степенной ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n$ сходится внутри интервала $(a-R; a+R)$, где радиус сходимости R находится по формулам (1.10) или (1.11).

1. В нашем примере $c_n = \frac{1}{4^n n^4}$, $a = 3$.

2. Для нахождения радиуса сходимости воспользуемся формулой (1.10):

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^n n^4}:\frac{1}{4^{n+1}(n+1)^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}(n+1)^4}{4^n n^4}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\cdot 4}{4^n}\cdot\frac{(n+1)^4}{n^4}=\lim_{n\to\infty}4\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^4=4\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^4=4\cdot 1=4.$$

Таким образом, ряд сходится внутри интервала $(3-4;\,3+4)=(-1;7)$.

3. Исследуем поведение ряда на границах этого интервала**.** Для этого подставим значения $x_1=7$ и $x_2=-1$ в исходный ряд (в условие задачи).

Для $x_1=7$ получим: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(7-3)^n}{4^n n^4}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{4^n n^4}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

Как мы знаем, это *ряд Дирихле* вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, который сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$. В нашем случае $p=4>1$, следовательно, ряд сходится. Значит, граница интервала $x=7$ входит в область сходимости ряда.

Для $x_2=-1$ получим: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1-3)^n}{4^n n^4}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{4^n n^4}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}$

Перед нами знакочередующийся ряд, который, как мы знаем, может сходиться абсолютно, может условно, а может расходиться.

Исследуем сначала на абсолютную сходимость. Для этого составим ряд из модулей: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$. Ввиду сказанного выше, этот ряд сходится, а значит, при $x_2=-1$ исходный ряд сходится, причем абсолютно. Следовательно, границу $x=-1$ также включаем в область сходимости ряда, т.е. ряд сходится при $x\in[-1;7]$.

Ответ: ряд сходится при $x\in[-1;7]$.

Пример 1.15. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{\sqrt{n+2}}$.

Решение

1. В нашем примере $c_n=\frac{1}{\sqrt{n+2}}$, $a=-5$.

2. Для нахождения радиуса сходимости воспользуемся формулой (1.10):

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}}:\frac{1}{\sqrt{n+3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+2}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+3}{n+2}} = \sqrt{1} = 1.$$

Итак, мы получили радиус сходимости, равный 1. Значит, интервал сходимости имеет вид:

$$(a-R; a+R) = (-5-1; -5+1) = (-6; -4).$$

3. Исследуем поведение ряда на концах интервала. Подставим значения $x_1 = -4$ и $x_2 = -6$ в исходный ряд.

При $x_1 = -4$ получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-4+5)^n}{\sqrt{n+2}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}}$.

Очевидно, что этот ряд будет вести себя так же, как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}.$$

Полученный ряд является *рядом Дирихле* с $p = \frac{1}{2} < 1$, значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится (см. 1.5). Следовательно, расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}}$, а значит, точка $x = -4$ не входит в область сходимости ряда.

Для $x_2 = -6$ получим: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-6+5)^n}{\sqrt{n+2}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$.

Исследуем полученный знакочередующийся ряд сначала на абсолютную сходимость. Для этого составим ряд из модулей: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}}$. Ввиду сказанного выше, этот ряд расходится, а значит, абсолютной сходимости нет. Проверим выполнение двух условий признака Лейбница:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

2) последовательность членов ряда монотонно не возрастает, т.е. каждый следующий член ряда не больше предыдущего.

У нас $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} = \frac{1}{\infty} = 0$ – первое условие выполнено. Очевидно, выполняется и второе условие, т.к. с ростом номера n увеличивается знаменатель дроби $\frac{1}{\sqrt{n+2}}$, а значит, уменьшается сама дробь. Оба условия выполнены, значит, ряд сходится, но, т.к. расходится ряд из модулей, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$ сходится только условно.

Ответ: ряд сходится при $x \in [-6;-4)$, причем в точке $x = -6$ ряд сходится условно.

Пример 1.16. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Решение

1. Перед нами степенной ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x^n$, где $c_n = \frac{1}{n!}$.

2. Найдем радиус сходимости, пользуясь формулой (1.10).

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} : \frac{1}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\cdot (n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{1} = \infty .$$

Т.к. радиус сходимости ряда равен бесконечности, то ряд сходится на всей числовой прямой.

Ответ: ряд сходится для всех $x \in (-\infty;+\infty)$.

Для нахождения области сходимости ряда можно применять и **другой алгоритм**, особенно если функциональный ряд не является степенным рядом вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ или $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n$. Опишем его подробно на примере.

Пример 1.17. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(2x+3)^n}{2^n}$.

Решение

При фиксированном значении переменной x функциональный ряд становится числовым, поэтому для его исследования можно применять признаки сходимости числовых рядов.

1. ***Зафиксируем*** x (таким образом превратив ряд в числовой) ***и составим ряд из модулей*** (таким образом превратив его в знакопостоянный).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n(2x+3)^n}{2^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,|2x+3|^n}{2^n},$$

т.к. n и 2^n – положительные величины.

2. Так как полученный ряд является числовым знакопостоянным, то для исследования его на сходимость можно ***применять признаки Коши или д'Аламбера***. Применим признак Коши.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n\,|2x+3|^n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}\,|2x+3|}{2} =$$

$$= \left[\text{напомним, что} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1\right] = \frac{|2x+3|}{2}$$

3. Как известно, числовой ряд сходится, если число, получившееся в пределе после применения признака Коши, меньше единицы. Следовательно, ***надо сравнить полученный предел с единицей,*** т.е. решить неравенство:

$$\frac{|2x+3|}{2} < 1.$$

Сначала избавимся от знаменателя:

$$|2x+3| < 2,$$

а затем «снимем» знак модуля следующим образом:

$$-2 < 2x+3 < 2.$$

Найдем x, отняв от всех частей неравенства тройку, а затем разделив все части неравенства на 2:

$$-2-3 < 2x < 2-3,$$

$$-5 < 2x < -1,$$

$$-\frac{5}{2} < x < -\frac{1}{2}.$$

Итак, мы получили интервал сходимости ряда: $x \in (-\frac{5}{2};-\frac{1}{2})$.

4. ***Исследуем поведение ряда на концах интервала.***

При $x_1 = -\frac{1}{2}$ получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\left(2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3\right)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1+3)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot 2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n.$$

Этот ряд расходится, т.к. не выполняется необходимое условие сходимости ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty \neq 0$). Следовательно, границу $x_1 = -\frac{1}{2}$ в область сходимости ряда не включаем.

При $x_2 = -\frac{5}{2}$ получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\left(2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)+3\right)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-5+3)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot(-2)^n}{2^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot(-1)^n\cdot 2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n.$$

Этот ряд также расходится в силу невыполнения необходимого признака. Следовательно, границу $x = -\frac{5}{2}$ также не включаем в область сходимости ряда.

Ответ: ряд сходится при $x \in (-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2})$.

1.4. Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена

Определение. Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в точке $x = a$.

Рядом Тейлора называют ряд

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (1.12)$$

Если в области сходимости ряд (1.12) сходится к функции $f(x)$, то имеет место равенство

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\,, \qquad (1.13)$$

называемое разложением функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки a.

Если в разложении функции в ряд Тейлора (1.13) взять $a=0$, то получим частный случай ряда Тейлора, называемый ***рядом Маклорена***:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (1.14)$$

Разложение в ряд Маклорена основных элементарных функций

1. $f(x)=e^x$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (1.15)$$

Область сходимости: $x\in(-\infty;\infty)$

2. $f(x)=\sin x$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (1.16)$$

Область сходимости: $x\in(-\infty;\infty)$

3. $f(x)=\cos x$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad (1.17)$$

Область сходимости: $x\in(-\infty;\infty)$

4. $f(x)=\ln(1+x)$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \qquad (1.18)$$

Область сходимости: $x\in(-1;1]$

5. $f(x)=(1+x)^{\alpha}$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n \qquad (1.19)$$

Область сходимости: $x\in(-1;1)$

6. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad (1.20)$$

Область сходимости: $x\in(-1;1)$

7. $f(x)=\operatorname{arctg}x$

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+\frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)} \qquad (1.21)$$

Область сходимости: $x\in(-1;1)$.

Применение приведенных выше разложений элементарных функций в ряд Маклорена (1.15) – (1.21) позволяют во многих случаях разложить заданную функцию в ряд Маклорена или Тейлора не используя формул (1.13) и (1.14), требующих вычисления n-й производной.

Пример 1.18. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=e^{2x}$.

Решение

Используем стандартное разложение функции e^x в ряд Маклорена (формула (1.15)), но в качестве аргумента вместо x подставим в нее $2x$. Получим

$$e^{2x}=1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\ldots+\frac{(2x)^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!}.$$

Так как ряд (1.15) сходится для всех значений x, то и полученный нами ряд также сходится для любого $x\in(-\infty;\infty)$.

Ответ: $e^{2x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n x^n}{n!}$, область сходимости: $x\in(-\infty;\infty)$.

Пример 1.19. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\dfrac{x}{1+3x^2}$.

Решение

Прежде чем использовать стандартное разложение (1.20), перепишем функцию в более удобном виде.

$$f(x)=\frac{x}{1+3x^2}=x\cdot\frac{1}{1+3x^2}=x\cdot\frac{1}{1-(-3x^2)}.$$

Теперь разложим функцию $\dfrac{1}{1-(-3x^2)}$ в ряд Маклорена по формуле (1.20), подставив в качестве аргумента выражение $-3x^2$:

$$\frac{x}{1+3x^2}=x\cdot\frac{1}{1-(-3x^2)}=x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-3x^2)^n=x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n3^nx^{2n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x\cdot(-1)^n3^nx^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n3^nx^{2n+1}.$$

Подставляя вместо n числа 0,1,2 и т.д., получим ряд в развернутом виде:

$$f(x)=\frac{x}{1+3x^2}=x-3x^3+9x^5-27x^7+\ldots.$$

Найдем область сходимости полученного ряда. Ряд (1.20) сходится при значениях аргумента $x\in(-1;1)$, т.е. $|x|<1$. В нашем разложении в качестве аргумента использовалось выражение $-3x^2$, следовательно, ряд сходится при значениях x, удовлетворяющих неравенству $|-3x^2|<1$. Решим это неравенство. Т.к. $|-3x^2|=3x^2$, то оно примет вид

$$3x^2<1.$$

Разделим обе части неравенства на 3 и извлечем корни:

$$x^2<\frac{1}{3},$$

$$|x|<\frac{1}{\sqrt{3}},$$

откуда

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}<x<\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\dfrac{x}{1+3x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n3^nx^{2n+1}$, сходится при $x\in(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}})$.

1.5. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях

Степенные ряды внутри их области сходимости могут быть почленно проинтегрированы. Это свойство степенных рядов позволяет приближенно вычислять определенные интегралы, предварительно разложив подынтегральную функцию в степенной ряд.

Пример 1.20. Вычислить приближенно $\int\limits_0^{0,3} \frac{e^{-2x}-1}{x}dx$ с точностью $\alpha = 0{,}001$.

Решение

Разложим функцию e^{-2x} в ряд Маклорена, используя формулу (1.15):

$$e^{-2x} = 1 - 2x + \frac{(-2x)^2}{2!} + \frac{(-2x)^3}{3!} + \ldots + \frac{(-2x)^n}{n!} + \ldots = 1 - 2x + \frac{4x^2}{2!} - \frac{8x^3}{3!} + \ldots$$

Тогда подынтегральная функция примет вид:

$$\frac{e^{-2x}-1}{x} = \frac{\left(1 - 2x + \frac{4x^2}{2!} - \frac{8x^3}{3!} + \ldots\right) - 1}{x} = \frac{-2x + \frac{4x^2}{2!} - \frac{8x^3}{3!} + \ldots}{x}$$

Разделим почленно числитель на знаменатель x и запишем еще несколько членов ряда. Получим:

$$\frac{e^{-2x}-1}{x} = -2 + \frac{4x}{2!} - \frac{8x^2}{3!} + \frac{16x^3}{4!} - \frac{32x^4}{5!} + \ldots.$$

Теперь проинтегрируем полученный ряд.

$$\int\limits_0^{0,3} \frac{e^{-2x}-1}{x}dx = \int\limits_0^{0,3} \left(-2 + \frac{4x}{2!} - \frac{8x^2}{3!} + \frac{16x^3}{4!} - \frac{32x^4}{5!} + \ldots \right) dx.$$

Разобьем интеграл от суммы на сумму интегралов:

$$\int\limits_0^{0,3} \frac{e^{-2x}-1}{x}dx = -2\int\limits_0^{0,3} dx + \frac{4}{2!}\int\limits_0^{0,3} xdx - \frac{8}{3!}\int\limits_0^{0,3} x^2dx + \frac{16}{4!}\int\limits_0^{0,3} x^3dx - \frac{32}{5!}\int\limits_0^{0,3} x^4dx + \ldots$$

Вычислим каждый интеграл, воспользовавшись табличным интегралом $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

$$\int\limits_0^{0,3} \frac{e^{-2x}-1}{x}dx = -2x\Big|_0^{0,3} + \frac{4}{2!}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0,3} - \frac{8}{3!}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{0,3} + \frac{16}{4!}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^{0,3} - \frac{32}{5!}\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^{0,3} + \ldots$$

Подставим, согласно формуле Ньютона-Лейбница, сначала верхний, а потом нижний предел интегрирования вместо x и вычислим члены ряда. Так как ряд знакочередующийся, то для вычисления суммы полученного ряда с заданной точностью необходимо взять сумму слагаемых, по модулю превышающих заданную точность α.

$$\int_0^{0,3} \frac{e^{-2x}-1}{x}dx = -2\cdot 0{,}3 + \frac{4}{2!}\cdot\frac{0{,}3^2}{2} - \frac{8}{3!}\cdot\frac{0{,}3^3}{3} + \frac{16}{4!}\cdot\frac{0{,}3^4}{4} - \frac{32}{5!}\cdot\frac{0{,}3^5}{5} + \ldots$$

$$a_1 = 2\cdot 0{,}3 = 0{,}6 > \alpha = 0{,}001,$$

$$a_2 = \frac{4}{1\cdot 2}\cdot\frac{0{,}3^2}{2} = 0{,}09 > \alpha = 0{,}001,$$

$$a_3 = \frac{8}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{0{,}3^3}{3} = 0{,}004 > \alpha = 0{,}001,$$

$$a_4 = \frac{16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{0{,}3^4}{4} = 0{,}00135 > \alpha = 0{,}001,$$

$$a_5 = \frac{32}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{0{,}3^5}{5} = 0{,}0001296 < \alpha = 0{,}001.$$

Таким образом, для вычисления интеграла с заданной точностью $\alpha = 0{,}001$ необходимо взять четыре первых члена полученного ряда:

$$\int_0^{0,3} \frac{e^{-2x}-1}{x}dx \approx -2\cdot 0{,}3 + \frac{4}{2!}\cdot\frac{0{,}3^2}{2} - \frac{8}{3!}\cdot\frac{0{,}3^3}{3} + \frac{16}{4!}\cdot\frac{0{,}3^4}{4} =$$

$$= -0{,}6 + 0{,}09 - 0{,}004 + 0{,}0001 = -0{,}5139.$$

Ответ: $\int_0^{0,3} \frac{e^{-2x}-1}{x}dx \approx -0{,}5139$ с точностью до 0,001.

Пример 1.21. Вычислить приближенно $\int_0^{1/5} \sqrt{1+x^3}\,dx$ с точностью $\alpha = 0{,}001$.

Решение

Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена, используя формулу (1.19):

$$\sqrt{1+x^3} = \left(1+x^3\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot x^3 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\cdot(x^3)^2 +$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\cdot(x^3)^3+\ldots=1+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{4}x^6+\frac{1}{3!}\cdot\frac{3}{8}x^9-\ldots$$

Теперь проинтегрируем полученный ряд.

$$\int_0^{1/5}\sqrt{1+x^3}dx=\int_0^{1/5}\left(1+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{4}x^6+\frac{1}{3!}\cdot\frac{3}{8}x^9-\ldots\right)dx=$$

$$=\int_0^{1/5}dx+\frac{1}{2}\int_0^{1/5}x^3dx-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{4}\int_0^{1/5}x^6dx+\frac{1}{3!}\cdot\frac{3}{8}\int_0^{1/5}x^9dx-\ldots=$$

$$=x\Big|_0^{1/5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^{1/5}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{x^7}{7}\Bigg|_0^{1/5}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{x^{10}}{10}\Bigg|_0^{1/5}-\ldots=$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{(1/5)^4}{4}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{(1/5)^7}{7}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{(1/5)^{10}}{10}-\ldots.$$

Так как ряд знакочередующийся, то для вычисления суммы полученного ряда с заданной точностью необходимо взять сумму слагаемых, по модулю превышающих заданную точность α.

$$a_1=\frac{1}{5}=0{,}2>\alpha=0{,}001,$$

$$a_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1/5)^4}{4}=0{,}0002<\alpha=0{,}001.$$

Так как уже второй член ряда меньше заданной точности, то для вычисления интеграла с точностью $\alpha=0{,}001$ достаточно взять только первый члена полученного ряда:

$$\int_0^{1/5}\sqrt{1+x^3}dx\approx 0{,}2.$$

Ответ: $\int_0^{1/5}\sqrt{1+x^3}dx\approx 0{,}2$ с точностью до 0,001.

2. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

2.1. Двойной интеграл

Пусть ограниченная функция $z=f(x,y)$ определена в некоторой замкнутой области D плоскости xOy. Разобьем область D произвольным образом на n меньших областей $D_1,D_2,...,D_n$, не имеющих общих внутренних точек, в каждой части D_k возьмем произвольную точку $M_k(x_k, y_k)$, вычислим значение $f(x_k, y_k)$, $k = 1, \ldots, n$ и составим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta s_k, \tag{2.1}$$

где Δs_k – площадь D_k.

Эта сумма называется интегральной суммой функции $f(x, y)$, соответствующей данному разбиению области D на части D_k и данному выбору промежуточных точек M_k.

Диаметром замкнутого множества D назовем максимальное из расстояний между двумя произвольными точками этого множества.

Пусть d_k – диаметр $D_k, k = 1, \ldots, n$, $d = \max\limits_{1 \le k \le n} d_k$.

Если существует предел интегральной суммы (2.1) при $d \to 0\ (n \to \infty)$, не зависящий от способа дробления области D на части D_k и выбора точек $M_k(x_k, y_k)$ в них, то он называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D и обозначается

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy, \tag{2.2}$$

т. е.

$$\lim_{\substack{d \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta s_k = \iint_D f(x, y)\,dxdy.$$

Функция $f(x, y)$ называется интегрируемой в области D.

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D, то она интегрируема в этой области.

Двойные интегралы обладают такими же свойствами, как и определенные интегралы (линейность, аддитивность, формулы среднего значения и т. д.).

Геометрический смысл двойного интеграла: если $f(x, y) = 1$, то двойной интеграл (2.2) равен площади $S(D)$ области D, т. е.

$$S(D) = \iint_D dxdy. \tag{2.3}$$

Физический смысл двойного интеграла: если область D – плоская пластинка, лежащая в плоскости xOy, с поверхностной плотностью $\mu = \mu(x, y)$ распределения вещества, то массу пластинки находят по формуле

$$m = \iint_D \mu(x, y)dxdy. \qquad (2.4)$$

Область D, которая определяется неравенствами $a \le x \le b$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, где $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ − непрерывные функции на отрезке $[a;b]$, называется правильной в направлении оси Oy. Аналогично определяется правильная область в направлении оси Ox.

На рисунках (2.1) и (2.2) изображены области, правильные в направлениях осей Oy и Ox соответственно.

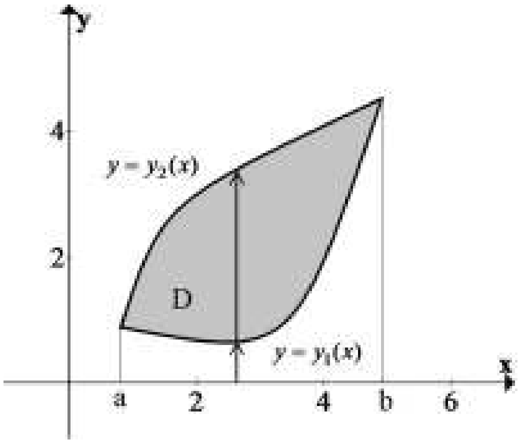


Рис. 2.1

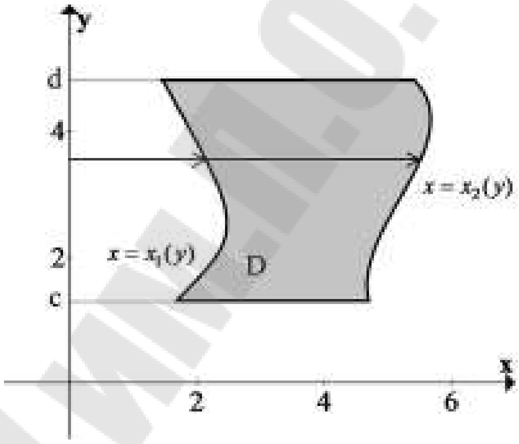


Рис. 2.2

Если D − область интегрирования, правильная в направлении оси Oy, то двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy. \qquad (2.5)$$

Правую часть формулы (2.5) называют повторным интегралом, а интеграл

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$$

называют внутренним интегралом.

Вычисление повторного интеграла следует начинать с вычисления внутреннего, в котором переменную x надо принять при интегрировании за постоянную величину. Результат интегрирования будет некоторой функцией от x, которая интегрируется затем по отрезку $[a;b]$. В результате получается некоторое число − значение интеграла (2.5).

Если область D является правильной в направлении оси Ox (рис. 2.2), двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (2.6)$$

Процесс расстановки пределов интегрирования для внутреннего и внешнего интегралов называется приведением двойного интеграла к повторному, а переход от формулы (2.5) к формуле (2.6) или наоборот − изменением порядка интегрирования.

Если область D не является правильной ни в направлении оси Oy, ни в направлении оси Ox, ее разбивают на конечное число областей $D_1, D_2, \ldots, D_m$, правильных в направлении оси Oy (или Ox), и при вычислении двойного интеграла по области D используют свойство аддитивности.

Пример 2.1. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле. Сделать чертеж:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy,\ D: y = x^2, y = \sqrt[3]{x}.$$

Решение

Изобразим область D, по которой производится интегрирование.

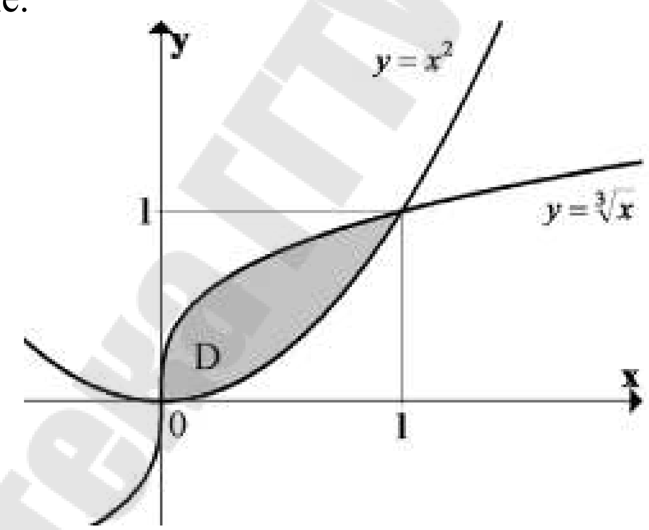


Рис. 2.3

Данная область D является правильной в направлении оси Oy. Снизу она ограничена графиком функции $y = x^2$ (парабола), сверху – графиком функции $y = \sqrt[3]{x}$ (кубическая парабола). Чтобы определить границы изменения внешней переменной интегрирования x необходимо найти абсциссы точек пересечения графиков данных функций. Для этого решим уравнение:

$$x^2 = \sqrt[3]{x};$$
$$x^6 = x;$$
$$x(x^5 - 1) = 0;$$
$$x = 0 \text{ или } x^5 = 1;$$
$$x = 0 \text{ или } x = \sqrt[5]{1} = 1.$$

Переменная x изменяется от 0 до 1. Воспользуемся формулой (2.5):

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{x^2} f(x,y)dy.$$

Ответ: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{x^2} f(x,y)dy.$

Пример 2.2. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле. Сделать чертеж:

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy,\ D: x = y^2 - 1, y - x + 1 = 0.$

Решение

Изобразим область D, по которой производится интегрирование.

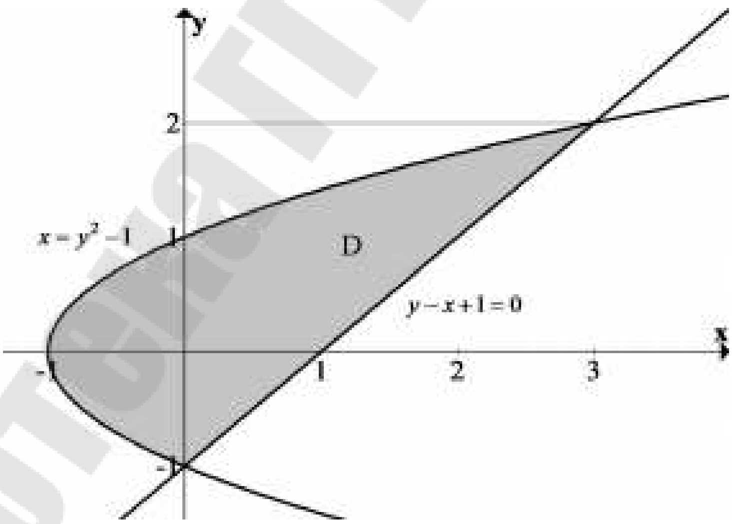


Рис. 2.4

Область D является правильной в направлении оси Ox. Слева она ограничена графиком функции $x = y^2 - 1$ (парабола), справа – графиком функции $y - x + 1 = 0$ (прямая). Запишем уравнение прямой как функцию переменной y: $x = y + 1$. Найдем ординаты точек пересечения графиков данных функций. Для этого решим уравнение:

$$y^2-1=y+1;$$
$$y^2-y-2=0;$$
$$D=b^2-4ac=1+8=9;$$
$$y=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{1\pm3}{2};$$
$$y=-1 \text{ или } y=2.$$

Переменная y изменяется от -1 до 2. Воспользуемся формулой (2.6):

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{2}dy\int_{y^2-1}^{y+1}f(x,y)dx.$$

Ответ: $\iint_D f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{2}dy\int_{y^2-1}^{y+1}f(x,y)dx.$

Замечание. Напомним, как схематически построить график квадратичной функции (параболу). При построении графика функции $y=ax^2+bx+c$ необходимо:

1. найти координаты вершины;
2. выяснить направление ветвей параболы;
3. при необходимости, точки пересечения с осями координат или некоторые другие точки параболы.

Координаты вершины находят по формулам:

$$x_0=\frac{-b}{2a};\ y_0=\frac{-D}{4a}=y(x_0). \qquad (2.7)$$

Направление ветвей параболы зависит от коэффициента перед старшей степенью. Если $a<0$, то ветви направлены вниз, если $a>0$, то вверх.

Пример 2.3. Вычислить площадь области D, ограниченной заданными линиями:

$$D: y=x^2+4x-5,\ y=-x^2+2x-1.$$

Решение

Построим графики квадратичных функций.

Для функции $y=x^2+4x-5$:

1. найдем координаты вершины по формулам (2.7):

$$x_0 = \frac{-4}{2} = -2;\ \ y_0 = y(-2) = 4 - 8 - 5 = -9;$$

$(-2; -9)$ – координаты вершины;

2. так как $a = 1 > 0$, то ветви направлены вверх;
3. найдем точки пересечения с осями координат:

$$x^2 + 4x - 5 = 0;$$

$$D = 16 + 20 = 36;$$

$$x = \frac{-4 \pm 6}{2};$$

$$x = -5 \text{ или } x = 1;$$

$(-5; 0)$ и $(1; 0)$ – точки пересечения с осью Ox;

если $x = 0$, то $y = -5$, следовательно, $(0; -5)$ – точка пересечения с осью Oy.

Для функции $y = -x^2 + 2x - 1$:

1. найдем координаты вершины по формулам (2.7):

$$x_0 = \frac{-2}{-2} = 1;\ \ y_0 = y(1) = -1 + 2 - 1 = 0;$$

$(1; 0)$ – координаты вершины;

2. так как $a = -1 < 0$, то ветви направлены вниз;
3. найдем точки пересечения с осями координат:

$$-x^2 + 2x - 1 = 0;$$

$$D = 4 - 4 = 0;$$

$$x = \frac{-2 \pm 0}{-2};$$

$$x = 1;$$

$(1; 0)$ – точка пересечения с осью Ox;

если $x = 0$, то $y = -1$, следовательно, $(0; -1)$ – точка пересечения с осью Oy.

Сделаем чертеж заданной области D:

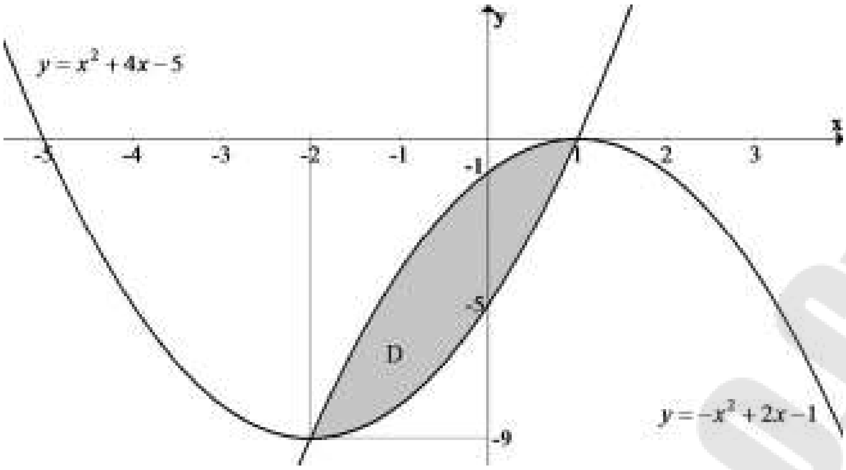


Рис. 2.5

Область D является правильной в направлении оси Oy. Снизу она ограничена графиком функции $y = x^2 + 4x - 5$, сверху – графиком функции $y = -x^2 + 2x - 1$. Чтобы определить границы изменения внешней переменной интегрирования x необходимо найти абсциссы точек пересечения графиков данных функций. Для этого решим уравнение:

$$x^2 + 4x - 5 = -x^2 + 2x - 1;$$
$$2x^2 + 2x - 4 = 0;$$
$$x^2 + x - 2 = 0;$$
$$D = 1 + 8 = 9;$$
$$x = \frac{-1 \pm 3}{2};$$
$$x = -2 \text{ или } x = 1.$$

Переменная x изменяется от -2 до 1. Воспользуемся формулой (2.3), а затем (2.5):

$$S(D) = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x^2+4x-5}^{-x^2+2x-1} dy = \int\limits_{-2}^{1} \left(y \Bigg|_{x^2+4x-5}^{-x^2+2x-1} \right) dx =$$

$$= \int\limits_{-2}^{1} (-x^2 + 2x - 1 - x^2 - 4x + 5) dx = \int\limits_{-2}^{1} (-2x^2 - 2x + 4) dx =$$

$$= \left(\frac{-2x^3}{3} - x^2 + 4x \right) \Bigg|_{-2}^{1} = \frac{-2}{3} - 1 + 4 - \frac{16}{3} + 4 + 8 = 9.$$

Ответ: $S(D) = 9$.

Пример 2.4. Вычислить массу неоднородной пластинки D, ограниченной заданными линиями, если поверхностная плотность в каждой её точке $\mu = \mu(x, y)$:

$$D: y = -x^2 + 6x - 5, y = x^2 - 4x + 3, \mu(x, y) = x + 1.$$

Решение

Сделаем чертеж заданной области D:

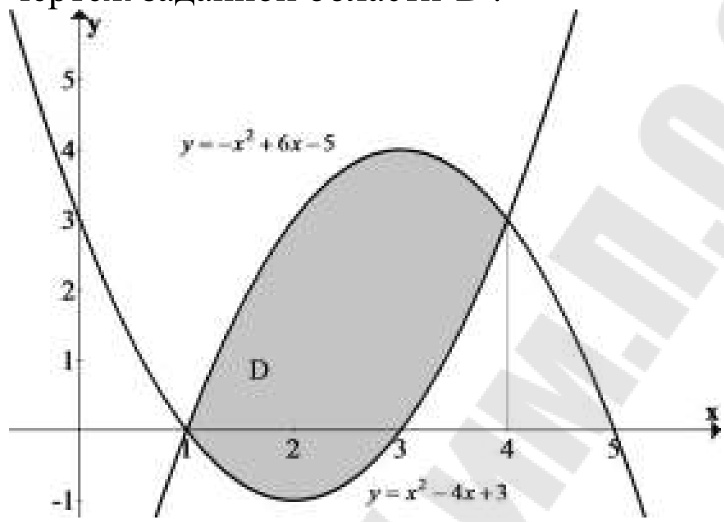


Рис. 2.6

Область D является правильной в направлении оси Oy. Снизу она ограничена графиком функции $y = x^2 - 4x + 3$ (парабола), сверху – графиком функции $y = -x^2 + 6x - 5$ (парабола). Чтобы определить границы изменения внешней переменной интегрирования x необходимо найти абсциссы точек пересечения графиков данных функций. Для этого решим уравнение:

$$-x^2 + 6x - 5 = x^2 - 4x + 3;$$

$$2x^2 - 10x + 8 = 0;$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0;$$

$$D = 25 - 16 = 9;$$

$$x = \frac{5 \pm 3}{2};$$

$$x = 1 \text{ или } x = 4.$$

Переменная x изменяется от 1 до 4. Воспользуемся формулой (2.4), а затем (2.5):

$$m = \iint_D \mu(x, y)dxdy = \iint_D (x+1)dxdy = \int_1^4 dx \int_{x^2-4x+3}^{-x^2+6x-5} (x+1)dy =$$

$$= \int_1^4 \left((x+1)y \Big|_{x^2-4x+3}^{-x^2+6x-5} \right) dx =$$

$$= \int_1^4 (x+1)(-x^2+6x-5-x^2+4x-3)dx =$$

$$= \int_1^4 (x+1)(-2x^2+10x-8)dx = \int_1^4 (-2x^3+8x^2+2x-8)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^4}{2} + \frac{8x^3}{3} + x^2 - 8x \right) \Bigg|_1^4 =$$

$$= -\frac{1}{2}(256-1) + \frac{8}{3}(64-1) + 16 - 1 - 8(4-1) = \frac{-255}{2} + 159 = \frac{63}{2} = 31{,}5.$$

Ответ: $m = 31{,}5$.

Пример 2.5. Вычислить площадь плоской области D, ограниченной заданными линиями:

$D: y = \sqrt{x+1}, y = -4x+16, y = 0.$

Решение

Сделаем чертеж области D:

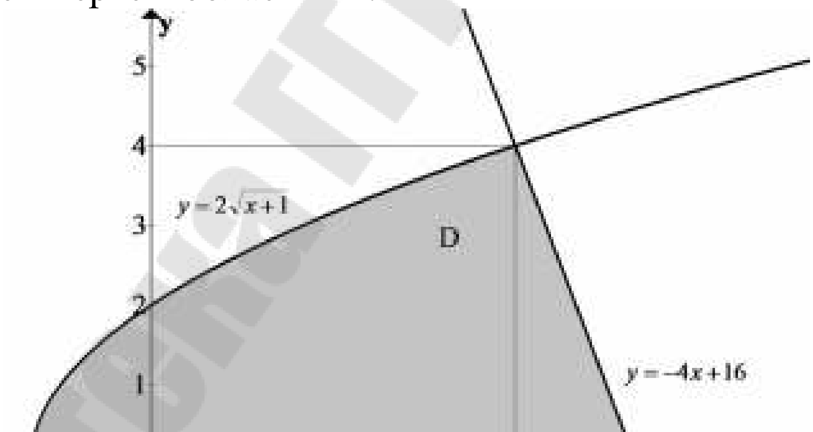


Рис. 2.7

Так как верхняя граница области представляет собой кусочно-заданную функцию (на промежутке $[-1;3]$ график функции $y = \sqrt{x+1}$, на $[3;4]$ – график $y = -4x+16$), то внешнее интегрирование лучше осуществлять по переменной y.

Запишем уравнения кривых, ограничивающих область D как функции переменной y:

$$y = 2\sqrt{x+1} \Rightarrow x = \frac{y^2}{4} - 1, y \geq 0;$$

$$y = -4x + 16 \Rightarrow x = 4 - \frac{y}{4}.$$

Найдем ординату точки пересечения графиков этих функций:

$$\frac{y^2}{4} - 1 = 4 - \frac{y}{4};$$

$$y^2 + y - 20 = 0;$$

$$D = 1 + 80 = 81;$$

$$y = \frac{-1 \pm 9}{2};$$

$y = -5$ (посторонний) или $y = 4$.

Переменная y изменяется от 0 до 4. Воспользуемся формулой (2.3), а затем (2.6):

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int_0^4 dy \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{4-\frac{y}{4}} dx = \int_0^4 \left(x \Bigg|_{\frac{y^2}{4}-1}^{4-\frac{y}{4}} \right) dy = \int_0^4 \left(4 - \frac{y}{4} - \frac{y^2}{4} + 1 \right) dy =$$

$$= \int_0^4 \left(5 - \frac{y}{4} - \frac{y^2}{4} \right) dy = \left(5y - \frac{y^2}{8} - \frac{y^3}{12} \right) \Bigg|_0^4 = 20 - 2 - \frac{16}{3} = \frac{38}{3}.$$

Ответ: $S = \dfrac{38}{3}$.

2.2. Тройной интеграл

Построение тройного интеграла от функции $f(x, y, z)$ по замкнутой ограниченной области G трехмерного пространства аналогично построению двойного интеграла. Тройной интеграл обозначается

$$\iiint\limits_G f(x, y, z) dxdydz. \tag{2.8}$$

Тройные интегралы обладают такими же свойствами, как определенные и двойные интегралы – линейность, аддитивность и т.д.

Геометрический смысл тройного интеграла: если $f(x, y, z) = 1$, то тройной интеграл (2.8) равен объему $V(G)$ области G, т.е.

$$V(G) = \iiint\limits_G dxdydz. \qquad (2.9)$$

При вычислении тройных интегралов особую роль играет понятие правильной трехмерной области, которое вводится по аналогии с правильной двумерной областью. Так, например, область G ограниченная снизу и сверху непрерывными однозначными поверхностями $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$, – правильная в направлении оси Oz (рис 2.8). При этом, плоская область D есть прямая проекция пространственной области G на плоскость xOy.

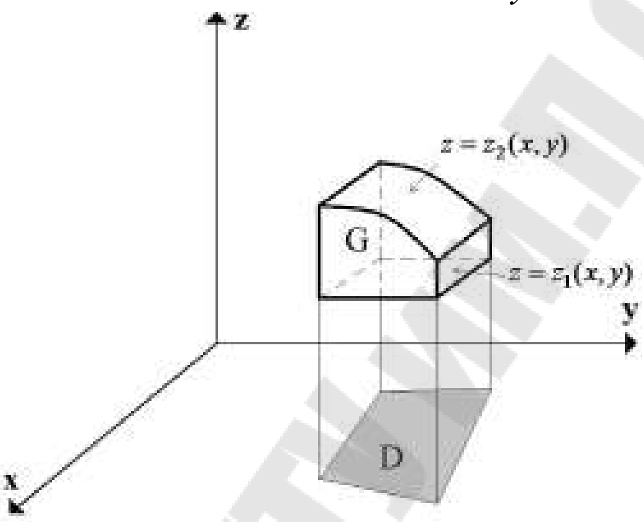


Рис 2.8

Если область G – правильная в направлении оси Oz, то тройной интеграл сводится к двойному по области D следующим образом:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{z=z_1(x,y)}^{z=z_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dxdy. \qquad (2.10)$$

Пример 2.6. Вычислить объем пирамиды V, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью $4x + 6y + 3z = 12$.

Решение:

Сделаем чертеж пространственной области V :

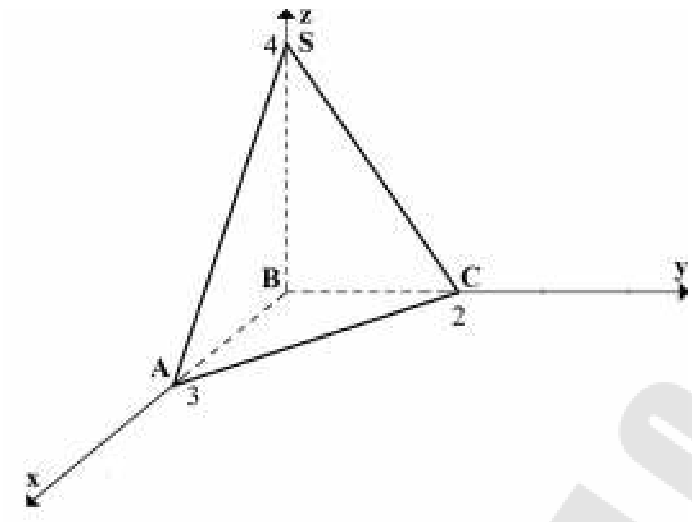


Рис. 2.9

Область V является правильной в направлении оси Oz. Проекция на плоскость xOy есть область D:

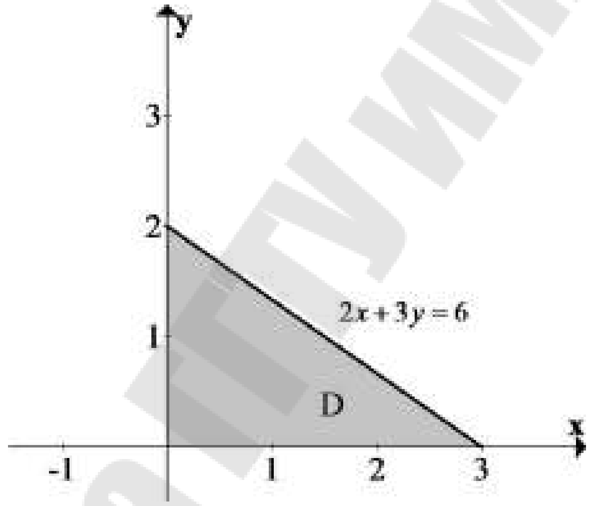


Рис. 2.10

Запишем уравнение плоскости как функцию $z = z(x, y)$:

$$z = 4 - \frac{4x}{3} - 2y.$$

Для вычисления объема пирамиды воспользуемся формулой (2.9), сведя тройной интеграл к двойному по формуле (2.10):

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \iint\limits_D \left(z \Big|_0^{4-\frac{4x}{3}-2y} \right) dxdy = \iint\limits_D \left(4 - \frac{4x}{3} - 2y \right) dxdy =$$

$$= \int_0^3 dx \int_0^{2-\frac{2x}{3}} \left(4 - \frac{4x}{3} - 2y \right) dy = \int_0^3 \left(\left(4 - \frac{4x}{3} \right) y - y^2 \right) \Bigg|_0^{2-\frac{2x}{3}} dx =$$

$$=\int_0^3\left(\left(4-\frac{4x}{3}\right)\left(2-\frac{2x}{3}\right)-\left(2-\frac{2x}{3}\right)^2\right)dx=$$

$$=\int_0^3\left(\frac{4x^2}{9}-\frac{8x}{3}+4\right)dx=\left(\frac{4x^3}{27}-\frac{4x^2}{3}+4x\right)\Bigg|_0^3=4-12+12=4\,.$$

Замечание. Объем пирамиды можно вычислить по формуле:

$$V=\frac{1}{3}S_{осн}H,$$

где $S_{осн}$ – площадь основания пирамиды, H – высота пирамиды.

В нашем случае основанием является прямоугольный треугольник ABC, следовательно:

$$S_{осн}=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=3;$$

$$H=|SB|=4.$$

Тогда объем пирамиды будет равен:

$$V=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 4=4.$$

Ответ: $V=4$.

3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Криволинейный интеграл I рода от функции $f(x,y)$ вдоль кривой AB обозначают $\int\limits_{AB}f(x.y)dl$ или $\int\limits_{L_{AB}}f(x.y)dl$.

Вычисление криволинейного интеграла I рода.

1). Если кривая задана явно уравнением $y=\varphi(x)$ ($a\le x\le b$), то криволинейный интеграл по длине дуги AB кривой L вычисляется по формуле

$$\int\limits_{L_{AB}}f(x,y)dl=\int_a^b f\big(x,\varphi(x)\big)\sqrt{1+\big(\varphi'(x)\big)^2}\,dx.$$

2). Если кривая задана параметрически: $x=x(t)$, $y=y(t)$ ($\alpha\le t\le\beta$), то

$$\int\limits_{L_{AB}}f(x,y)dl=\int_\alpha^\beta f\big(x(t),y(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2}\,dt.$$

Криволинейным интегралом II рода называют интеграл вида

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Физический смысл криволинейного интеграла II рода заключается в следующем: если $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ – сила, действующая на материальную точку, движущуюся вдоль линии L, то работа силы $\vec{F}(x,y)$ вдоль линии L равна

$$A = \int\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \tag{3.1}$$

Метод вычисления криволинейных интегралов второго рода рассмотрим на примерах.

Пример 3.1. Вычислить $\int\limits_{L} xdx + \left(y^2 + x\right)dy$ вдоль параболы $y = x^2$ от точки $A(1;1)$ до точки $B(2;4)$.

Решение

При движении по параболе $y = x^2$ из точки A в точку B x меняется от 1 до 2. Тогда получаем

$$\int\limits_{L} xdx + \left(y^2 + x\right)dy = \left[\begin{array}{c} y = x^2, \\ dy = \left(x^2\right)' dx = 2xdx, \\ 1 \le x \le 2 \end{array}\right] =$$

$$= \int\limits_1^2 \left(x + \left(\left(x^2\right)^2 + x \right) \cdot 2x \right) dx = \int\limits_1^2 \left(x + 2x^5 + 2x^2\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 2 \cdot \frac{x^6}{6} + 2 \cdot \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{2^2}{2} + 2 \cdot \frac{2^6}{6} + 2 \cdot \frac{2^3}{3} \right) - \left(\frac{1^2}{2} + 2 \cdot \frac{1^6}{6} + 2 \cdot \frac{1^3}{3} \right) =$$

$$= \left(2 + \frac{64}{3} + \frac{16}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{16}{3} \right) = \frac{163}{6}.$$

Ответ: $\frac{163}{6}$.

Пример 3.2. Вычислить $\int\limits_{L} (x+1)dx + 2y\,dy$ вдоль линии $x = 3y + 1$ от точки $A(1;0)$ до точки $B(4;1)$.

Решение

При движении по линии $x = 3y + 1$ из точки A в точку B y меняется от 0 до 1. Тогда получаем

$$\int_L (x+1)dx + 2y\,dy = \begin{bmatrix} x = 3y+1, \\ dx = (3y+1)'\,dy = 3dy, \\ 0 \le y \le 1 \end{bmatrix} = \int_0^1 \left(((3y+1)+1)\cdot 3 + 2y\right)dy =$$

$$= \int_0^1 (9y+6+2y)dy = \int_0^1 (11y+6)dy = \left(11\cdot\frac{y^2}{2}+6y\right)\Bigg|_0^1 = \frac{11}{2}+6-0 = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

Пример 3.3. Вычислить работу A силы $\vec{F} = (y-1)\bar{i} + 3x\bar{j}$ при перемещении вдоль линии $y = 1+2\sqrt{x}$ от точки $A(0;1)$ к точке $B(1;3)$.

Решение

Для вычисления работы A силы $\vec{F}$ воспользуемся формулой (3.1). Из условия определяем, что $P = y-1$, $Q = 3x$. Тогда

$$A = \int_{L_{AB}} (y-1)dx + 3xdy = \begin{bmatrix} y = 1+2\sqrt{x}, \\ dy = \left(1+2\sqrt{x}\right)'dx = \frac{1}{\sqrt{x}}dx, \\ 0 \le x \le 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^1 \left(\left(1+2\sqrt{x}\right)-1+3x\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int_0^1 \left(2\sqrt{x}+3\sqrt{x}\right)dx = 5\int_0^1 \sqrt{x}dx = 5\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx =$$

$$= 5\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = 5\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 1^{\frac{3}{2}} - 0\right) = \frac{10}{3}.$$

Ответ: $A = \frac{10}{3}$.

4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Определение. Если каждой точке пространства $M(x,y,z)$ ставится в соответствие некоторая скалярная величина U, то таким образом задается ***скалярное поле*** $U(M) = U(x,y,z)$.

Основные характеристики скалярного поля: градиент, производная по направлению.

Определение. ***Градиентом*** скалярного поля $U(x,y,z)$ в точке M называется вектор

$$\overrightarrow{gradU}=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \qquad , (4.1)$$

где частные производные вычислены в точке M.

Вектор $\overrightarrow{gradU}$ в данной точке указывает направление наибольшего роста функции U.

Модуль градиента $|\overrightarrow{gradU}|$ есть скорость роста функции U в этой точке

$$|\overrightarrow{gradU}|=\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} \qquad (4.2)$$

<u>*Определение*</u>. Производная функции U в точке M по направлению вектора $\vec{l}(l_1,l_2,l_3)$ обозначается $\frac{\partial U}{\partial \vec{l}}$ и вычисляется по формуле

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{l}}=\frac{1}{|\vec{l}|}\left(\frac{\partial U}{\partial x}l_1+\frac{\partial U}{\partial y}l_2+\frac{\partial U}{\partial z}l_3\right), \qquad (4.3)$$

где частные производные вычислены в точке M.

Производная определяет величину скорости изменения функции $U(M)$ при перемещении точки M по направлению вектора $\vec{l}$.

Пример 4.1. Задано скалярное поле $U(M)=\ln\left(3x^2+2y^3+z\right)$. Найти: а) градиент скалярного поля $U(M)$ в точке $M_0(-1;2;1)$; б) производную по направлению вектора $\vec{l}(3;1;-1)$ в точке $M_0(-1;2;1)$,

Решение

а) найдем частные производные $U(M)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{1}{3x^2+2y^3+z}\cdot 6x,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{1}{3x^2+2y^3+z}\cdot 6y^2,$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{1}{3x^2+2y^3+z}.$$

В точке $M_0(-1;2;1)$ имеем:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0} = \frac{1}{3\cdot(-1)^2+2\cdot 2^3+1}\cdot 6\cdot(-1) = -\frac{3}{10},$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0} = \frac{1}{3\cdot(-1)^2+2\cdot 2^3+1}\cdot 6\cdot 2^2 = \frac{6}{5},$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{M_0} = \frac{1}{3\cdot(-1)^2+2\cdot 2^3+1} = \frac{1}{20}.$$

Градиент поля в точке M_0 определим по формуле (4.1):

$$\overrightarrow{grad}\,U = -\frac{3}{10}\vec{i} + \frac{6}{5}\vec{j} + \frac{1}{20}\vec{k} \quad .$$

б) найдем модуль вектора $\vec{l}\,(3;1;-1)$:

$$|\,\vec{l}\,| = \sqrt{3^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{11}.$$

Тогда, с помощью формулы (4.3) получаем

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{l}} = \frac{1}{\sqrt{11}}\left(-\frac{3}{10}\cdot 3 + \frac{6}{5}\cdot 1 - \frac{1}{20}\cdot(-1)\right) = \frac{1}{\sqrt{11}}\cdot\left(\frac{7}{20}\right) \approx 0{,}105.$$

Ответ: а) $\overrightarrow{grad}\,U = -\frac{3}{10}\vec{i} + \frac{6}{5}\vec{j} + \frac{1}{20}\vec{k}$; б) $\frac{\partial U}{\partial \vec{l}} \approx 0{,}105$.

Замечание. Напомним правила вычисления частных производных. Частные производные функции $z = f(x, y)$ вычисляются по тем же правилам и формулам, что и функция одной переменной, при этом учитывается, что при дифференцировании по переменной x, y считается постоянной, а при дифференцировании по переменной y постоянной считается x.

<u>*Определение*</u>. Если в каждой точке M пространства задан определенный вектор $\vec{a} = \vec{a}(M)$, то говорят, что в этом пространстве задано *векторное поле* $\vec{a}$.

Задание векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ равносильно заданию трех скалярных функций $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, которые являются проекциями вектора $\vec{a} = \vec{a}(M)$ на координатные оси

$$\vec{a} = \vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}. \qquad (4.4)$$

Основными характеристиками векторного поля являются: дивергенция, ротор, поток, циркуляция.

<u>*Определение*</u>. ***Дивергенцией*** векторного поля $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ называется скалярная функция

$$div\,\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \qquad (4.5)$$

Дивергенция характеризует плотность источников данного векторного поля в рассматриваемой точке.

Если вектор $\vec{a}$ характеризует поле скоростей текущей жидкости, то абсолютная величина $div\,\vec{a}(M)$ определяет мощность источника или стока. Так, если $div\,\vec{a}(M)$, то точка M называется источником. Если $div\,\vec{a}(M) < 0$, то точка M называется стоком. Если в каждой точке поля $div\,\vec{a}(M) = 0$, то векторное поле называется ***соленоидальным***.

<u>*Определение*</u>. ***Ротором*** (или вихрем) векторного поля $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ называется вектор

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}. \qquad (4.6)$$

Векторное поле, во всех точках которого $\overrightarrow{rot}\,\vec{a} = 0$, называется ***потенциальным***.

Если векторное поле является одновременно потенциальным и соленоидальным, то оно называется ***гармоническим***.

Пример 4.2. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}(M) = (z + yx)\vec{i} + (3x^2y^3 + 2)\vec{j} - 5\dfrac{z^2y}{x}\vec{k}$ в точке $M(1;2;3)$.

Решение

Для вычисления дивергенции воспользуемся формулой (4.5).

Из условия определяем, что

$$P = z + yx,\; Q = 3x^2y^3 + 2,\; R = -5\frac{z^2y}{x}.$$

Следовательно, $\dfrac{\partial P}{\partial x} = y$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = 9x^2y^2$, $\dfrac{\partial R}{\partial z} = -10\dfrac{zy}{x}$.

Тогда, согласно формуле (4.5) имеем

$$div\,\vec{a} = y + 9x^2y^2 - 10\frac{zy}{x}.$$

Вычислим значение дивергенции в точке M:

$$div\,\vec{a}(M) = 2 + 9\cdot 1^2 \cdot 2^2 - 10\frac{3\cdot 2}{1} = -22,$$

т.е. точка M является стоком.

Ротор можно определить по формуле (4.6). Вычислим значения требуемых частных производных, учитывая, что $P = z + yx$,

$$Q = 3x^2y^3 + 2,\ R = -5\frac{z^2y}{x} = -5z^2yx^{-1}:$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{5z^2}{x},\ \frac{\partial Q}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial R}{\partial x} = 5z^2yx^{-2} = \frac{5z^2y}{x^2},\ \frac{\partial P}{\partial z} = 1,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 6xy^3,\ \frac{\partial P}{\partial y} = x.$$

Подставим полученные выражения в формулу (4.6):

$$\overrightarrow{rot\,\vec{a}} = \left(-\frac{5z^2}{x} - 0\right)\vec{i} - \left(\frac{5z^2y}{x^2} - 1\right)\vec{j} + \left(6xy^3 - x\right)\vec{k}.$$

Подставляя координаты точки M, получим:

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{a} = 45\bar{i} - 90\bar{j} + 47\bar{k}.$$

Ответ: $div\,\vec{a}(M) = -22$, $rot\,\vec{a} = 45\bar{i} - 90\bar{j} + 47\bar{k}$.

Пример 4.3. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a}(M) = (2xy + z)\vec{i} + (x^2 - 2y)\vec{j} + x\vec{k}$ соленоидальным (потенциальным).

Решение

Имеем: $P = 2xy + z$, $Q = x^2 - 2y$, $R = x$. Тогда

$$div\,\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2y - 2 + 0 = 2y - 2 \neq 0,$$

значит поле $\vec{a}(M)$ не является соленоидальным.

Вычислим ротор векторного поля с помощью формулы (4.6).

Учитывая, что по условию $P = 2xy + z$, $Q = x^2 - 2y$, $R = x$, тогда

$$\frac{\partial R}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial Q}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial R}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial P}{\partial z} = 1,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial P}{\partial y} = 2x.$$

Подставим полученные выражения в формулу (4.6):

$$\overrightarrow{rot\,\vec{a}} = (0-0)\vec{i} - (1-1)\vec{j} + (2x - 2x)\vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = 0,$$

т.е. векторное поле $\vec{a}(M)$ является потенциальным.

Ответ: векторное поле $\vec{a}(M)$ является потенциальным.

Поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S в направлении её внешней нормали $\vec{n}$ определяется с помощью *формулы Остроградского-Гаусса*

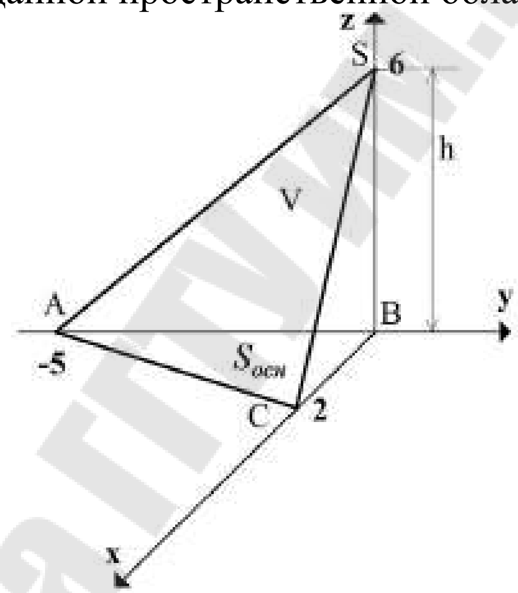
$$P_S(\vec{a}) = \iiint\limits_V div\,\vec{a}\,dxdydz = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz. \qquad (4.7)$$

Пример 4.4. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через поверхность пирамиды, образованной координатными плоскостями и указанной плоскостью P:

$$\vec{a} = 3x\vec{i} + 2y\vec{j} - 3z\vec{k}, P: \frac{x}{2} - \frac{y}{5} + \frac{z}{6} = 1.$$

Решение

Сделаем чертеж данной пространственной области:



Поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность V можно вычислить по формуле:

$$P = \iiint\limits_V (div\,\vec{a}) dxdydz.$$

Найдем дивергенцию поля $\vec{a}$:

$$div\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial(3x)}{\partial x} + \frac{\partial(2y)}{\partial y} + \frac{\partial(-3z)}{\partial z} = 3 + 2 - 3 = 2.$$

Получим:

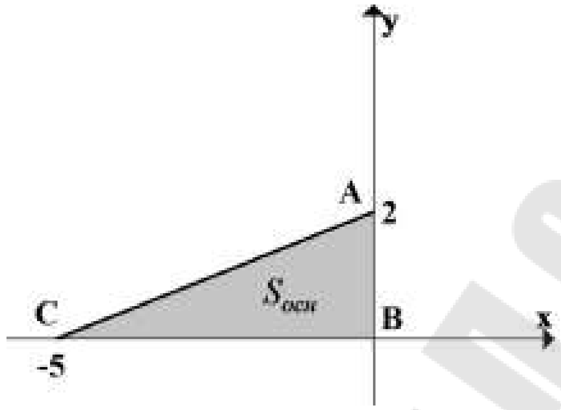
$$P = \iiint\limits_V 2dxdydz = 2 \cdot \iiint\limits_V dxdydz.$$

В силу геометрического смысла тройного интеграла, $\iiint\limits_V dxdydz$ равен объему пирамиды V.

Объем пирамиды можно вычислить по формуле:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{осн} \cdot h,$$

где $S_{осн}$ – площадь основания пирамиды, h – высота пирамиды.



В нашем случае основанием является прямоугольный треугольник ABC, следовательно:

$$S_{осн} = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 5;$$

$$h = |SB| = 6.$$

Тогда объем пирамиды будет равен:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 6 = 10.$$

Окончательно получим:

$$P = 2 \cdot \iiint_V dxdydz = 2 \cdot 10 = 20.$$

Ответ: $P = 20$.

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

Вариант 1

1. Исследовать ряд на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3n^3+2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n!}$.

2. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5n+3}{7n+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

3. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{5^n}$.

4. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^1 e^{-x/4}dx$ с точностью $\alpha=0{,}001$.

5. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле. Сделать чертеж: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy,\ D: y=x^2, y=2x+3.$

6. Вычислить площадь области D, ограниченной заданными линиями: $D: y=x, y=-2x+3, y=0$.

7. Вычислить работу силы $\vec{F}=(x+2)\vec{i}+2y\vec{j}$ при перемещении и вдоль линии $y=x^2$ от точки А (0;0) до точки В (1;1).

8. Задано скалярное поле $U(M)=3zx+y^2x$. Найти градиент скалярного поля $U(M)$ в точке $M_0(1;0;-3)$.

9. Проверить, является ли векторное поле $\vec{a}(M)=2xy\vec{i}+(x+2z)\vec{j}+xz^2y$ соленоидальным.

10. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через поверхность пирамиды, образованной координатными плоскостями и указанной плоскостью P: $\vec{a}=2x\vec{i}+y\vec{j}+3z\vec{k}, P: \frac{x}{3}-\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1.$

Ответы:**1**. а), в) сходятся, б) расходится. **2**. а) расходится; б) сходится условно. **3**. а) $x\in[-1;1]$; б) $x\in(0;10)$. **4**. $0{,}885$. **6**. $\frac{3}{4}$. **7**. 3,5. **8**. $\overrightarrow{grad}\,U=-9\vec{i}+3\vec{k}$. **9**. нет. **10.** 12.

Вариант 2

1. Исследовать ряд на сходимость:

а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n^2+3}{n^2+2}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n+2}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{10^n}$.

2. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$.

3. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{3n+7}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-4)^n}{10^n}$.

4. Вычислить интеграл $\int_0^{0.2} x\cos x dx$ с точностью $\alpha = 0{,}001$.

5. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле. Сделать чертеж: $\iint_D f(x,y)dxdy,\ D: y=\sqrt{x-1}, x=5$.

6. Вычислить площадь области D, ограниченной заданными линиями: $D: y=x^2, y=4$.

7. Вычислить $\int_L (y+1)dx + x\,dy$ вдоль линии $x=-y+2$ от точки A (2;0) до точки B (1;1).

8. Задано скалярное поле $U(M)=2x+5xy^2z$. Найти производную по направлению вектора $\vec{l}\,(1;-2;-1)$ в точке $M_0(1;1;3)$.

9. Вычислить дивергенцию векторного поля $\vec{a}(M)=2xz^3\vec{i}+4y\vec{j}-3yz\vec{k}$ в точке $M_0(0;2;1)$.

10. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через поверхность пирамиды, образованной координатными плоскостями и указанной плоскостью P: $\vec{a}=3x\vec{i}+2y\vec{j}, P: \frac{x}{2}-\frac{y}{2}+\frac{z}{6}=1$.

Ответы:**1**. а), в) расходятся, б) сходится. **2**. а) сходится условно; б) сходится абсолютно. **3**. а) $x\in[-3;-1)$, причем в точке $x=-3$ ряд сходится условно; б) $x\in(-6;14)$. **4**. 0,02. **6**. $\frac{32}{3}$. **7**. 0. **8**. $-48/\sqrt{6}$. **9**. 0.**10**.20.

Вариант 3

1. Исследовать ряд на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n^3+2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n^{10}}$.

2. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость:

а). $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{5n+3}{7n+2}\right)^{2n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^3+n}}$.

3. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2n+3}$.

4. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{1/5}\frac{\sin x-x}{x^2}dx$ с точностью $\alpha=0{,}001$.

5. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле. Сделать чертеж: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy,\ D: y=\sqrt{x}, y=\sqrt{8-x}.$

6. Вычислить площадь области D, ограниченной заданными линиями: $D: y=x, y=x^2-2x.$

7. Вычислить работу A силы $\vec{F}=(2x+1)\vec{i}+2y\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $y=1+x^2$ от точки $A(0;1)$ к точке $B(2;5)$.

8. Задано скалярное поле $U(M)=3zx-xy^2z$. Найти производную по направлению вектора $\vec{l}(1;1;-1)$ в точке $M_0(1;0;3)$.

9. Вычислить ротор векторного поля $\vec{a}(M)=2z\vec{i}-yx\vec{j}-\frac{yx}{z}\vec{k}$ в точке $M_0(1;1;-1)$.

10. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через поверхность пирамиды, образованной координатными плоскостями и указанной плоскостью P: $\vec{a}=-3x\vec{i}+2y\vec{j}-3z\vec{k}, P: \frac{x}{6}+\frac{y}{2}+\frac{z}{6}=1.$

Ответы:**1**. а), б) сходятся, в) расходится. **2**. а) сходится абсолютно; б) сходится условно. **3**. а) $x\in(-2;4)$; б) $x\in[-3;-1)$, причем в точке $x=-3$ ряд сходится условно. **4**. $-0{,}003$. **6**. $\frac{9}{2}$. **7**. 30. **8**. 0. **9**. $\overrightarrow{rot}\,\vec{a}=(1;3;-1)$. **10**. 48.

Вариант 4

1. Исследовать ряд на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+4}\right)^{n^2}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+5}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^2}$.

2. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+3}{n^2+7n+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$.

3. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n^3+1}$.

4. Вычислить интеграл $\int_0^{1/2} x^2 arctg\frac{x}{3}dx$ с точностью $\alpha = 0{,}001$.

5. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле. Сделать чертеж: $\iint_D f(x,y)dxdy$, $D: y = x+1, y = 5-x$.

6. Вычислить площадь области D, ограниченной заданными линиями: $D: x = 5, x = y^2 - 4y$.

7. Вычислить $\int_L yxdx - 2x\,dy$ вдоль параболы $y = 2x^2$ от точки A (1;2) до точки B (2;8).

8. Задано скалярное поле $U(M) = -zx - 2y^2x + 5$. Найти градиент скалярного поля $U(M)$ в точке $M_0(1;0;1)$.

9. Проверить, является ли векторное поле $\vec{a}(M) = 2xz\vec{i} + (x+3)\vec{j} + zy\vec{k}$ потенциальным.

10. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через поверхность пирамиды, образованной координатными плоскостями и указанной плоскостью P: $\vec{a} = 3x\vec{i} + 3y\vec{j} - z\vec{k}$, $P: \frac{x}{2}+\frac{y}{5}+\frac{z}{2} = 1$.

Ответы:**1**. а), в) расходятся, б) сходится. **2**. а) сходится условно; б) сходится абсолютно. **3** а) $x \in (-\infty;\infty)$; б) $x \in [-1;0]$. **4**. $0{,}005$. **6**. 36. **7**. $-\frac{41}{8}$. **8**. $\overline{grad}\,U = -\vec{i} - \vec{k}$. **9**. нет. **10**. $\frac{50}{3}$.

Вариант 5

1. Исследовать ряд на сходимость:

а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{\sqrt{n^2+2}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{n!}$.

2. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{2n}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+5}}$.

3. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(x-5)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{\sqrt{n^2+1}}$.

4. Вычислить интеграл $\int_0^{1/2}\sqrt[4]{1+2x^3}\,dx$ с точностью $\alpha = 0{,}001$.

5. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле. Сделать чертеж: $\iint_D f(x,y)dxdy,\ D: y = x^2+4x, y = 5.$

6. Вычислить площадь области D, ограниченной заданными линиями: $D: y = x^2-2x+5, y = -2x^2+10x-4.$

7. Вычислить работу A силы $\vec{F} = yx\bar{i} - 3y\bar{j}$ при перемещении вдоль линии $y = \sqrt{x}$ от точки $A(1;1)$ к точке $B(4;2)$.

8. Задано скалярное поле $U(M) = 2 + yx^2 - xyz^3$. Найти производную по направлению вектора $\bar{l}(1;\,1;\,2)$ в точке $M_0(1;2;0)$.

9. Вычислить ротор векторного поля $\vec{a}(M) = x^2z\vec{i} + xz\vec{j} - \frac{yx}{2}\vec{k}$ в точке $M_0(1;1;2)$.

10. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через поверхность пирамиды, образованной координатными плоскостями и указанной плоскостью P: $\vec{a} = 3x\vec{i} - 2y\vec{j} - 3z\vec{k}, P: \frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{2} = 1.$

Ответы:**1**. а), б) расходятся, в) сходится. **2**. а) сходится абсолютно; б) сходится условно. **3**. а) $x \in (4{,}5;\,5{,}5)$; б) $x \in [-6;-4)$, причем в точке $x = -6$ ряд сходится условно. **4**. $0{,}508$. **6**. 4. **7**. 7,9. **8**. $5/\sqrt{6}$. **9**. $\overrightarrow{rot}\,\vec{a} = -1{,}5\vec{i} + 1{,}5\vec{j} + 2\vec{k}$.**10**. -10.

Вариант 6

1. Исследовать ряд на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^n n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(2n+3)}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^3+1}}$.

2. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+3}{n+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n}$.

3. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n n^5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3x+1)^n}{n}$.

4. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{1/3}\frac{dx}{1+x^5}$ с точностью $\alpha = 0{,}001$.

5. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле. Сделать чертеж: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy,\ D: y=\sqrt{x}, x=\sqrt{y}$.

6. Вычислить массу неоднородной пластинки D, ограниченной заданными линиями, если поверхностная плотность в каждой её точке $\mu = \mu(x,y)$: $D: y=-2x+2, y=0, x=0, \mu = x+y$.

7. Вычислить работу A силы $\vec{F} = 2x\bar{i} - 3y\bar{j}$ при перемещении вдоль линии $x = 2-2y$ от точки $A(2;0)$ к точке $B(0;1)$.

8. Задано скалярное поле $U(M) = -3x + y^2x^2 + z$. Найти градиент скалярного поля $U(M)$ в точке $M_0(1;-1;1)$.

9. Вычислить ротор векторного поля $\vec{a}(M) = x^2\vec{i} + y^2x\vec{j} - 3x\vec{k}$ в точке $M_0(1;0;2)$.

10. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через поверхность пирамиды, образованной координатными плоскостями и указанной плоскостью P: $\vec{a} = 3x\vec{i} + y\vec{j} + 3z\vec{k}, P: \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$.

Ответы:**1**. а), б) сходятся, в) расходится. **2**. а) расходится; б) сходится абсолютно. **3**. а) $x\in[-5;5]$; б) $x\in[-2/3;0)$, причем в точке $x=-2/3$ ряд сходится условно. **4**. $0{,}333$. **6**. 1. **7**. -13,5. **8**. $\overrightarrow{grad}\,U = (-1;-2;1)$. **9**. $\overrightarrow{rot}\,\vec{a} = (0;3;0)$. **10**. $\frac{56}{3}$.

Вариант 7

1. Исследовать ряд на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+5}{\sqrt{n^5+1}}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^n}{(2n+3)^{2n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^3+1}$.

2. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+7}}$.

3. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n n!$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-5)^n}{2^n n^2}$.

4. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 e^{-x^3}dx$ с точностью $\alpha = 0{,}001$.

5. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле. Сделать чертеж: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy,\ D: y = x^3, x = 0, y = 8.$

6. Вычислить массу неоднородной пластинки D, ограниченной заданными линиями, если поверхностная плотность в каждой её точке $\mu = \mu(x,y)$: $D: y = x^2 - x - 2, y = 4, \mu = x + 2.$

7. Вычислить $\int\limits_L ydx - x\,dy$ вдоль параболы $y = x^3$ от точки A (1;1) до точки B (2;8).

8. Задано скалярное поле $U(M) = yxz^2 - 3xy^3$. Найти производную по направлению вектора $\vec{l}(-1;\,2;\,2)$ в точке $M_0(1;2;1)$.

9. Вычислить дивергенцию векторного поля $\vec{a}(M) = 3x^2\vec{i} + y^2z\vec{j} - z\vec{k}$ в точке $M_0(1;-2;2)$.

10. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через поверхность пирамиды, образованной координатными плоскостями и указанной плоскостью P: $\vec{a} = -2x\vec{i} - 2y\vec{j} - 3z\vec{k}, P: \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1.$

Ответы:**1**. а), б) сходятся, в) расходится. **2**. а) сходится абсолютно; б) сходится условно. **3**. а) сходится в точке $x = 0$; б) $x \in [1;\,7/3]$. **4**. $0{,}733$. **6**. $625/12$. **7**. -7,5. **8**. $-40/3$. **9**. -3. **10**. -28.

Вариант 8

1. Исследовать ряд на сходимость:

а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n^2+5}{3n^2+2}$; в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+5}{(n+1)\sqrt{n+2}}$.

2. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{n+3}{2n+1}\right)^{3n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+5}$.

3. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2(x+8)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-2)^n}{\sqrt{n^5}}$.

4. Вычислить интеграл $\int_0^1\cos\frac{x^2}{5}dx$ с точностью $\alpha=0{,}001$.

5. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле. Сделать чертеж: $\iint_D f(x,y)dxdy$, $D: y=x^2+3x-4, y=-2x^2-3x+5$.

6. Вычислить массу неоднородной пластинки D, ограниченной заданными линиями, если поверхностная плотность в каждой её точке $\mu=\mu(x,y)$: $D: y=x-2, x=y^2+2y, \mu=y^2$.

7. Вычислить $\int_L 2xdx+3ydy$ вдоль параболы $y=2x^2$ от точки A (0;0) до точки B (2;8).

8. Задано скалярное поле $U(M)=5x^2yz^3$. Найти градиент скалярного поля $U(M)$ в точке $M_0(1;-1;1)$.

9. Выяснить, является ли поле $\vec{a}(M)=zx^2\vec{i}+y^2xz\vec{j}-y^2\vec{k}$ соленоидальным.

10. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через поверхность пирамиды, образованной координатными плоскостями и указанной плоскостью P: $\vec{a}=5x\vec{i}-2y\vec{j}-4z\vec{k}$, $P: \frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$.

Ответы:**1**. а) сходится, б), в) расходятся. **2**. а) сходится абсолютно; б) сходится условно. **3**. а) $x\in[-9;-7]$; б) $x\in[1/3;1]$. **4**. $0{,}996$. **6**. $63/20$. **7**. 100. **8**. $\overrightarrow{grad}\,U=(-10;5;-15)$. **9**. нет. **10**. -2.

Вариант 9

1. Исследовать ряд на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n+2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{n!}$.

2. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{5n+3}{7n+2}\right)^{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+7}{\sqrt{n^3+1}}$.

3. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^4+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-5)^n n^2}{3^n}$.

4. Вычислить интеграл $\int_0^{0,4}\frac{\sin x^3}{x^3}dx$ с точностью $\alpha=0{,}001$.

5. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле. Сделать чертеж: $\iint_D f(x,y)dxdy$, $D: x=y^2+3y, y=2x-7$.

6. Вычислить массу неоднородной пластинки D, ограниченной заданными линиями, если поверхностная плотность в каждой её точке $\mu=\mu(x,y)$: $D: y=x^2-2x+2, x=0, x=2, y=0, \mu=x+2$.

7. Вычислить работу A силы $\vec{F}=(x+2)\bar{i}+(y+x)\bar{j}$ при перемещении вдоль линии $y=2x$ от точки $A(1;2)$ к точке $B(3;6)$.

8. Задано скалярное поле $U(M)=2xy^2z^3$. Найти градиент скалярного поля $U(M)$ в точке $M_0(1;-1;-1)$.

9. Проверить, является ли векторное поле $\vec{a}(M)=z^2\vec{i}+(x+y)\vec{j}+z^2y\vec{k}$ потенциальным.

10. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через поверхность пирамиды, образованной координатными плоскостями и указанной плоскостью P: $\vec{a}=x\vec{i}-3z\vec{k}, P: \frac{x}{2}-\frac{y}{7}+\frac{z}{2}=1$.

Ответы:**1**.а), в) сходятся, б) расходится. **2**. а) сходится абсолютно; б) сходится условно. **3**. а) $x\in[-1;1]$; б) $x\in(1;4)$. **4**. $0{,}4$. **6**. 8. **7**. 32. **8**. $\overrightarrow{grad}\,U=-2\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k}$. **9**. нет. **10**. $-\frac{28}{3}$.

Вариант 10

1. Исследовать ряд на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n+5}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} arctg\frac{1}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{n}\right)^{n^2}$.

2. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+3}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(n+2)(n+7)}$.

3. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{\sqrt{2n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{2n}}{n\cdot 9^n}$.

4. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,5}\frac{\ln(1+x^2)}{x}dx$ с точностью $\alpha = 0{,}001$.

5. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле. Сделать чертеж: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy,\ D: x=-\sqrt{y},\ y=x-6$.

6. Вычислить массу неоднородной пластинки D, ограниченной заданными линиями, если поверхностная плотность в каждой её точке $\mu=\mu(x,y)$: $D: x=y^2-4y+3, x=0, y=2, \mu=2y+1$.

7. Вычислить работу A силы $\vec{F}=(y+2)\vec{i}+(2+x)\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $x=y^2$ от точки $A(4;2)$ к точке $B(9;3)$.

8. Задано скалярное поле $U(M)=2\sqrt{z}xy^2$. Найти производную по направлению вектора $\vec{l}(-1;0;2)$ в точке $M_0(1;2;4)$.

9. Вычислить ротор векторного поля $\vec{a}(M)=4x^2\vec{i}+yxz\vec{j}-yx^2\vec{k}$ в точке $M_0(1;-1;0)$.

10. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через поверхность пирамиды, образованной координатными плоскостями и указанной плоскостью P: $\vec{a}=x\vec{i}-y\vec{j}-3z\vec{k}, P: \frac{x}{6}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$.

Ответы:**1**.а), б) сходятся, в) расходится. **2**. а) сходится абсолютно; б) сходится условно. **3**. а) $x\in[-3;-1)$, причем в точке $x=-3$ ряд сходится условно; б) $x\in(2;8)$. **4**. $0{,}117$. **6**. $\frac{23}{6}$. **7**. 85. **8**. $-12/\sqrt{5}$. **9**. $\overrightarrow{rot}\,\vec{a}=-2\vec{j}$. **10**. -12.

ВАРИАНТЫ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

1. Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$. Пятый член ряда имеет вид:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$; б) $\frac{2^5}{5!}$; в) $\frac{5^n}{n!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^5}{5!}$; д) $\sum_{n=1}^{5}\frac{2^n}{n!}$.

2. Дан ряд $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$. Тогда n-ый член ряда имеет вид:

а) $\frac{1}{n}$; б) $\frac{1}{n+1}$; в) $\frac{1}{n!}$; г) $\frac{1}{2n-1}$; д) $\frac{1}{7}$.

3. Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{2^n}$. Второй член ряда равен

а) $\sum_{n=1}^{2}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{2^n}$; б) $-\frac{3}{4}$; в) $(-1)^3$; г) $\frac{n+1}{2^n}$; д) $\frac{1}{2^2}$.

4. Дан ряд $\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}-\cdots$. Тогда n-ый член ряда имеет вид:

а) $\frac{(-1)^n}{n!}$; б) $\frac{1}{(2n)!}$; в) $\frac{1}{n!}$; г) $\frac{(-1)^n}{2n!}$; д) $\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}$.

5. Ряд Дирихле $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ сходится при

а) $p>1$; б) $p\ge 1$; в) $p<0$; г) $p>0$; д) $p\le 1$.

6. Геометрический ряд $\sum_{n=0}^{\infty}q^n$ сходится при

а) $|q|>1$; б) $|q|\ge 1$; в) $q<0$; г) $1>q>0$; д) $|q|<1$.

7. Отметить верные утверждения:

а) если $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится;

б) если $\lim_{n\to\infty}a_n\ne 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится;

в) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty}a_n=0$;

г) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится, то $\lim_{n\to\infty}a_n\ne 0$.

8. Какие из данных рядов сходятся?

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{3/2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$.

9. Какие из данных рядов сходятся?

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-2/3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{-n}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}$.

10. В признаке д'Аламбера требуется

а) вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ и сравнить его с нулем;

б) вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$ и сравнить его с единицей;

в) вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ и сравнить его с единицей;

г) вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$ и сравнить его с нулем.

11. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – знакоположителный числовой ряд, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = k$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при

а) $k<1$; б) $k=1$; в) $k>0$; г) $k\neq 0, k\neq\infty$; д) $k>1$.

12. Радиус сходимости степенного ряда можно вычислить по формуле:

а) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$; б) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$; в) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$; г) $R=\lim\limits_{n\to\infty}|c_n|$;

13. Если область интегрирования D является правильной относительно оси Oy, то интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ сводится к повторному следующим образом:

а) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$;

б) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$;

в) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx \int\limits_a^b f(x,y)dy$;

г) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dy \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dx.$

14. Если область интегрирования D является правильной относительно оси Ox, то интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ сводится к повторному следующим образом:

а) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$;

б) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$;

в) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$;

г) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dx \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dy.$

15. Площадь плоской области D вычисляется по формуле

а) $\iint\limits_D ydx$; б) $\int\limits_D dxdy$; в) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$; г) $\iint\limits_D dxdy$

16. Масса пластинки D плотностью $\mu = \mu(x,y)$ вычисляется по формуле

а) $\iint\limits_D Sdx$; б) $\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy$; в) $\int\limits_D \text{м}dx$; г) $\iint\limits_D dxdy$.

17. Работа силы $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ по перемещению тела вдоль кривой L от точки A к точке B равна

а) $A = \iint\limits_F dxdy$;

б) $A = \int\limits_L Pdx + Qdy$;

в) $A = \int\limits_F xdx + ydy$;

г) $A = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y}$.

18. Градиент скалярного поля $U = U(x, y, z)$ равен

а) $\overrightarrow{gradU} = x + y + z$;

б) $\overrightarrow{gradU} = \dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial U}{\partial y} + \dfrac{\partial U}{\partial z}$;

в) $\overrightarrow{gradU} = \iint\limits_U dxdy$;

г) $\overrightarrow{gradU} = \dfrac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$.

19. Производная по направлению $\vec{l}$ скалярного поля $u = u(x, y, z)$ в точке M определяет

а) массу скалярного поля;
б) скорость изменения скалярного поля;
в) векторные линии;
г) количество источников векторного поля.

20. Дивергенция векторного поля $\overline{a}(M) = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ вычисляется по формуле

а) $div\,\vec{a} = P + Q + R$;

б) $div\,\vec{a} = \int\limits_L (P + Q + R)dxdy$;

в) $div\,\vec{a} = \lim\limits_{a \to \infty}(P + Q + R)$;

г) $div\,\vec{a} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$.

21. Дивергенция векторного поля $\overline{a}(M) = x\overline{i} + \overline{j} + y^2\overline{k}$ в точке $O(0,0,0)$ равна

а) 0; б)1; в) 2; г) x; д) $\vec{k}$.

22. Является ли поле $\overline{a}(M) = 2x\overline{i} + 3z\overline{j} - z^2\overline{k}$ соленоидальным?

а) да; б) нет;

23. Является ли точка $M_0(1, 0, 0)$ источником векторных линий поля $\overline{a}(M) = x^2\overline{i} - \overline{j} + y^2\overline{k}$.

а) да; б) нет;

24. Ротор векторного поля $\overline{a}(M) = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ можно вычислить по формуле

а) $\overrightarrow{rot}\,\vec{a} = P + Q + R$;

б) $\overrightarrow{rot}\,\vec{a} = \int\limits_L (P + Q + R)dxdy$;

в) $\overrightarrow{rot}\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$;

г) $\overrightarrow{rot}\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (P + Q)\vec{i} + (R + Q)\vec{j} + (P + R)\vec{k}$.

25. Поток векторного поля $\overline{a}(M) = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ через замкнутую поверхность можно вычислить по формуле

а) $P_S(\vec{a}) = \iiint\limits_S \vec{a}dxdydz$;

б) $P_S(\vec{a}) = \overrightarrow{rot}\,\vec{a}\,dxdydz$;

в) $P_S(\vec{a}) = \iiint\limits_V div\,\vec{a}dxdydz$;

г) $P_S(\vec{a}) = (P + Q)\vec{i} + (R + Q)\vec{j} + (P + R)\vec{k}$.

Ответы:**1**. г. **2**. г. **3**. б. **4**. д. 5. а. **6**. д. **7**. б, в. **8**. б, в. **9**. д. **10**. в. **11**. а. **12**. а, б. **13**. б. **14**. а. **15**. г. **16**. б. **17**. б. **18**. г. **19**. б. **20**. г. **21**. б. **22**. б. **23**. а. **24**. в. **25**. в.

ЛИТЕРАТУРА

1. Герасимович, А.И. Математический анализ: Справ. пособие. В 2-х ч.: ч.2 / А.И. Герасимович, Н.А. Рысюк. – Мн.: Выш. шк., 1989. – 287 с.
2. Гурский, Е.И. Руководство к решению задач по высшей математике: Учеб. пособие. В 2-х ч. / Е.И. Гурский, В.П. Домашов, В.К. Кравцов, А.П. Сильванович; Под общ. ред. Е.И. Гурского. – Мн.: Выш. шк., 1990. – 349 с.
3. Гусак, А.А. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак, Е.А. Бричикова. – Мн.: ТетраСистемс, 2002. – 640 с.
4. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2 т. / Н.С. Пискунов – М.:Наука, 1985. – 429 с.
5. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2-х ч. / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2005. – 234 с.
6. Рябушко, А.П. Индивидуальные задания по высшей математике: Учеб. пособие. В 4-х ч.: ч.3 / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть; Под общ. ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Выш. шк., 2004. – 288 с.

Задорожнюк Мария Викторовна
Бородин Николай Николаевич
Дегтярева Екатерина Александровна

РЯДЫ.
КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Пособие
по выполнению тестовых заданий
по дисциплине «Математика»
для студентов всех специальностей
заочной формы обучения

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 14.04.14.
Рег. № 67Е.
http://www.gstu.by