Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ПРАКТИКУМ
к расчетно-графической работе по одноименному курсу для студентов специальностей 1-36 01 01 «Технология машиностроения» и 1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства» дневной формы обучения

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2007

УДК 519.854(075.8)
ББК 22.176я73
Д48

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом факультета автоматизированных и информационных систем ГГТУ им. П. О. Сухого (*протокол № 7 от 13.03.2006 г.*)

Авторы-составители: *А. А. Бабич, А. В. Емелин*

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доц. каф. «Высшая математика» ГГТУ им. П. О. Сухого *Л. Л. Великович*

Д48 **Дискретная** математика : практикум к расчет.-граф. работе по одноим. курсу для студентов специальностей 1-36 01 01 «Технология машиностроения» и 1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства» днев. формы обучения / авт.-сост.: А. А. Бабич, А. В. Емелин. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2007. – 31 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://gstu.local/lib. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-420-569-4.

Данный практикум содержит 11 типов задач по 30 вариантов в каждом для семестровой работы по элементам теории множеств, математической логике, включая алгебру высказываний, булеву алгебру предметов и элементы теории графов.

Для студентов специальностей 1-36 01 01 «Технология машиностроения» и 1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства» дневной формы обучения.

УДК 519.854(075.8)
ББК 22.176я73

ISBN 978-985-420-569-4

ЗАДАНИЕ 1

1.1. Задать списком множество всех простых двузначных чисел.

1.2. Задать списком множество всех простых делителей числа 3628800.

1.3. Задать списком множество всех простых делителей чисел: а) 20!; б) 50!

1.4. Задать списком множество всех простых делителей чисел: а) 50!/20!; б) 50!/40!

1.5. Задать списком множество всех целых делителей числа 1024.

1.6. Пусть имеется алфавит, содержащий две буквы $\Sigma = \{a, b\}$. Составить множество всех слов, длина которых не превышает трех.

1.7. Задать списком множество всех двоичных чисел, длины которых не превышают четырех.

1.8. Задать множество всех натуральных чисел от 5 до 15 включительно:

а) списком;

б) порождающей процедурой;

в) характеристическим свойством.

1.9. Проверить равенство множеств A и B:

а) $A = \{1, 3, 5, 7\}$ и $A = \{5, 1, 7, 5, 3\}$;

б) $\{x \in N \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ и $B = \{1, 2, 1\}$.

1.10. Составить множество студентов Вашей группы, фамилии которых начинаются с буквы с номером в алфавите, являющимся корнем уравнения:

а) $x^2 - 4 = 0$;

б) $x^2 - 6x - 7 = 0$.

1.11. Указать, какие из приведенных включений справедливы и почему:

а) $a \in \{2, x, a\}$;

б) $2 \in \{1, \{2, 3, 4\}, 5\}$;

в) $5 \subset \{1, 3, 5\}$.

1.12. Указать, какие из приведенных включений справедливы и почему:

а) $x \in \{1, \sin x\}$;

б) $\{x, y\} \subset \{a, \{x, y\}, b\}$;

в) $\{5\} \subset \{1, \{3, 4\}, 5\}$.

1.13. Даны множества $\varnothing$, $A = \{1\}$, $D = \{1, 3\}$, $C = \{1, 5, 9\}$. Вставить правильно символы $\notin$, $\in$, $\not\subset$, $\subset$ между парами множеств:

а) $\varnothing, A$;

б) A, C;

в) B, C;

г) A, B.

1.14. Даны множества $B = \{1, 3\}$, $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $E = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Вставить правильно символы $\notin$, $\in$, $\not\subset$, $\subset$ между парами множеств:

а) $\varnothing, D$;

б) B, D;

в) B, E;

г) D, E.

1.15. Даны множества $C = \{1, 5, 9\}$, $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $U = N_9$. Вставить правильно символы $\notin$, $\in$, $\not\subset$, $\subset$ между парами множеств и элементов:

а) C, D;

б) D, U;

в) $10, U$;

г) $4, U$.

1.16. Дано множество $A = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7, 8\}\}$. Установить, верны ли утверждения:

а) $1 \in A$;

б) $\{\{4, 5\}\} \subset A$;

в) $\{1, 2, 3\} \subset A$;

г) $\varnothing \notin A$.

1.17. Дано множество $B = \{\{1, 2\}, 3, \{4, 5, 6\}\}$. Установить, верны ли утверждения:

а) $\{1, 2\} \subset B$;

б) $\varnothing \subset B$;

в) $\{3\} \subset B$;

г) $3 \in B$.

1.18. Установить, какие из множеств $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$; $C = \{2, 1, 2\}$, $D = \{1, 1, 3\}$; $F = \{1, 2, 1, 3\}$ равны друг другу и почему.

1.19. Установить, какие из множеств $G = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$, $E = \{x \mid x \in N,\ x < 3\}$, $K = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $L = \{x \mid x \in N, x - \text{нечетное}, x < 4\}$ равны друг другу и почему.

1.20. Пусть универсальным множеством U является множество всех букв русского алфавита. Задать следующие множества списком:
$A = \{x \mid x - \text{гласная}\}$,
$B = \{x \mid x - \text{буква в слове «немного»}\}$,
$C = \{x \mid x - \text{буква в слове «Кирилл»}\}$,
$D = \{x \mid x - \text{буква в слове «лирик»}\}$.
Есть ли среди множеств равные друг другу?

1.21. Даны множества $A = N_9$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $D = \{3, 4, 5\}$, $E = \{3, 5\}$. Указать среди них такие множества, для которых справедливы утверждения:
а) X и B не пересекаются;
б) $X \subset D$, но $X \not\subset B$;
в) $X \subset A$, но $X \not\subset C$;
г) $X \subset C$, но $X \not\subset A$.

1.22. Составить булеан множества $M = \{a, b, c, d\}$.

1.23. Доказать, что $\varnothing \neq \{\varnothing\}$.

1.24. Доказать, что $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} \neq \{1, 2, 3\}$.

1.25. Существуют ли такие множества A, B, C, что $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C \neq \varnothing$ и $(A \cap B) \setminus C \neq \varnothing$.

1.26. Указать множества корней уравнения $x^4 - 1 = 0$ для следующих универсальных множеств:
а) $U = Q$;
б) $U = N$;
в) $U = Z$;
г) $U = R$;
д) $U = C$.

1.27. Указать, какие из приведенных множеств конечны: $A =$ {сезоны года}, $B =$ {районы Беларуси}, $C =$ {положительные числа >1}, $D =$ {нечетные целые}, $E =$ {простое число}, $F =$ {кошки, живущие в Беларуси}.

1.28. Составить булеан множества корней уравнения $x^2 - 16 = 0$, если универсальное множество:

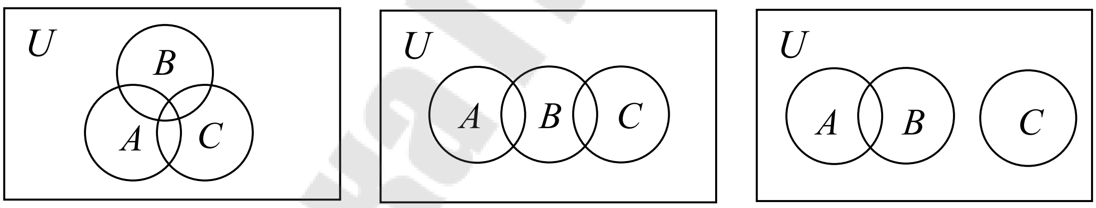
а) $U = Q$;
б) $U = N$;
в) $U = R$.

1.29. Привести пример множеств A, B, и C, который бы явно указывал на нарушение транзитивности отношения принадлежности элемента множеству: $A \in B,\ B \in C\ \not\Rightarrow\ A \in C$.

1.30. Пусть $U = \{$множество всех животных$\}$, $M = \{$множество всех млекопитающих$\}$, $D = \{$множество всех собак$\}$, $C = \{$множество всех кошек$\}$, $L = \{$множество всех овчарок$\}$. Проверить истинность утверждений:
а) $L \subset D \subset M \subset U$;
б) $C \subset D \subset M \subset U$;
в) $C \cap D = \varnothing$;
г) $D \setminus L \subset C$;
д) $U \setminus M \subset D$;
е) $D \setminus C = D$.

ЗАДАНИЕ 2

Заштриховать на диаграммах Венна для трех различных конфигураций (рис. 2.1) множества, соответствующие заданным формулам (п. 2.1–2.10).



а) *б)* *в)*

Рис. 2.1

2.1. а) $(A \cup B) \setminus C$; б) $\overline{A \cap B} \cup C$.
2.2. а) $(A \cap B) \setminus C$; б) $\overline{A \cup B} \cap C$.
2.3. а) $(A \cap B) \setminus C$; б) $(A \cap B) \cup C$.
2.4. а) $\overline{A \setminus B} \cup C$; б) $C \setminus \overline{B \cup A}$.
2.5. а) $A \oplus B \oplus C$; б) $\overline{A \oplus B} \oplus C$.
2.6. а) $(A \oplus B) \cap C$; б) $\overline{A} \cap (B \oplus C)$.
2.7. а) $A \setminus (B \oplus C)$; б) $(A \oplus B) \setminus C$.

2.8. а) $(A \cap B) \oplus C$; б) $(A \cup B) \oplus C$.

2.9. а) $(B \cap C) \oplus A$; б) $(B \cup C) \oplus A$.

2.10. а) $(A \setminus B) \setminus C$; б) $\overline{A \oplus B} \cap C$.

Используя свойства теоретико-множественных операций, проверить справедливость указанных равенств (п. 2.11–2.20).

2.11. а) $\overline{A \cap \overline{B}} \cup B = \overline{A} \cup B$; б) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

2.12. а) $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$; б) $(\varnothing \cup A) \cap (B \cup A) = A$.

2.13. а) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$; б) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

2.14. а) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$; б) $A \oplus (A \cap B) = A \setminus B$.

2.15. а) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$; б) $A \oplus (A \oplus C) = C$.

2.16. а) $(A \oplus B) \cup (A \cap B) = A \cup B$;

б) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

2.17. а) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \setminus C)$; б) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$.

2.18. а) $A \oplus B \oplus (A \cap B) = A \cup B$; б) $A \cup (A \oplus B) = A \cup B$.

2.19. а) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$; б) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$.

2.20. а) $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) = B \cap C$;

б) $(A \oplus B) \cup (A \setminus B) = A \oplus B$.

2.21. Из 100 студентов английский язык изучают 45 человек, немецкий – 40, французский – 35, английский и немецкий – 15 человек, английский и французский – 10 человек, немецкий и французский – 10 человек. Все три языка изучают 8 человек. Сколько студентов не изучают ни одного языка?

2.22. За границу выехала группа туристов из 90 человек, 15 из них не знали немецкого и английского языка, 45 знали немецкий язык и 50 английский. Сколько туристов знали только английский язык?

2.23. В специализированном спортивном магазине, который торгует лыжами, лыжными ботинками и лыжными палками, за месяц было куплено 800 пар лыж, 400 пар ботинок и 500 пар палок. При этом 350 пар лыж было куплено вместе с ботинками, 250 пар ботинок – вместе с палками, а 150 пар лыж – вместе с ботинками и палками. Сколько было совершено покупок?

2.24. Из 50 студентов потока в сессию 40 студентов сдали экзамен по химии, 35 – по физике и 42 – по математике. Причем 32 студента сдали экзамены по химии и физике, 38 – по химии и математике, 33 – по физике и математике, все три экзамена сдали 30 студентов. Сколько студентов после сессии имеют всего одну задолженность по математике?

2.25. На потоке из 50 студентов 25 умеют играть в футбол, 18 – в волейбол, 20 – в баскетбол. Причем в футбол и волейбол умеют играть 15 студентов, в футбол и баскетбол – 16, а в волейбол и баскетбол – 10. Какое возможное число студентов на потоке не занимаются спортивными играми?

2.26. Найти число всех различных разбиений шестиэлементного множества на непустые классы.

2.27. Найти число всех различных разбиений семиэлементного множества:

а) на 3 класса;

б) на 4 класса.

2.28. Построить все разбиения множества $A = \{a, b, c, d\}$ на непустые классы.

2.29. Решить систему

$$\begin{cases} A \setminus X = B, \\ A \cup X = C, \end{cases}$$

если известно, что $B \subseteq A \subseteq C$.

2.30. Решить систему

$$\begin{cases} A \cap X = B, \\ A \cup X = C, \end{cases}$$

если известно, что $A \subseteq B \subseteq C$.

ЗАДАНИЕ 3

3.1. Выписать все сюръективные бинарные отношения, определенные на множествах $A = \{a_1, a_2\}$ и $B = \{b_1, b_2\}$.

3.2. Выписать все бинарные отношения, определенные на множестве $A = \{a, b\}$.

3.3. Выписать явно отношение $R \equiv x \mid y = \{x \text{ делит } y\}$, определенное на множестве $A = \{1, 2, 4, 6\}$. Построить координатную диаграмму и матрицу отношения M_R.

3.4. Выписать явно отношение $R \equiv x \mid y = \{x \text{ делит } y\}$, определенное на множестве $B = \{2, 3, 6, 10, 15\}$.

3.5. Выписать явно отношение $R \equiv x \mid y = \{x \text{ делит } y\}$, определенное на множестве $C = \{3, 4, 6, 12, 18\}$.

3.6. Указать число различных рефлексивных отношений, определенных на n элементном множестве A.

3.7. Указать число различных симметричных отношений, определенных на n элементном множестве A.

3.8. Указать число различных антисимметричных отношений, определенных на n элементном множестве A.

3.9. Установить, является ли отношение $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 3)\}$ рефлексивным, симметричным, антисимметричным и транзитивным.

3.10. Установить, является ли отношение $S = \{(1,1), (1, 2), (2,1), (2, 2), (3, 3)\}$ рефлексивным, симметричным, антисимметричным и транзитивным.

3.11. Установить, является ли отношение $R = \{x$ взаимно простое с $y\}$, определенное на множестве $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, рефлексивным, симметричным, антисимметричным и транзитивным.

3.12. Для отношений
$R = \{(1,1), (1,2), (2,3), (3,1), (3,3)\}$ и $S = \{(1,1), (1,3), (2,1), (3,3)\}$
найти $R \cap S$, $R \cup S$, $R^{-1} \cap S$.

3.13. Для отношений
$R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 3)\}$ и $S = \{(1, 1), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$
найти $R \circ S$ и $S \circ R$.

3.14. Для отношения $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$ найти R^{-1}, $R \circ R$ и $R^{-1} \circ R$.

3.15. Для отношения $R = \{(1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,3)\}$ найти $R \circ R^{-1}$, $R \circ R$, $R \circ R \circ R$.

3.16. Найти композицию $R \circ R$ для отношения $R = \{x$ взаимно простое с $y\}$, определенного на множестве $B = \{3, 4, 6, 8, 9\}$.

3.17. Установить, является ли эквивалентным отношение $R = \{x$ кратно $y\}$, определенное на множестве целых чисел.

3.18. Установить, является ли эквивалентным отношение $R = \{x$ имеет общие точки с $y\}$, определенное на множестве прямых плоскости.

3.19. Установить, является ли эквивалентным отношение $R = \{x$ касается $y\}$, определенное на множестве окружностей плоскости.

3.20. Установить, является ли эквивалентным отношение $R = \{x$ знаком с $y\}$, определенное на множестве студентов университета.

3.21. Разбить множество $N_{20} = \{1, 2, \dots, 20\}$ на смежные классы по отношению эквивалентности $R_5 = \{x = y \bmod 5\}$. Построить фактор-множество N_{20} / R_5.

3.22. Разбить множество $A = \{2^k \mid k = \overline{1,10}\}$ на смежные классы, по отношению эквивалентности $R_8 = \{x = y \bmod 8\}$. Построить фактор-множество A / R_8.

3.23. На множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ задано отношение эквивалентности $R = \{(1,1), (1,5), (2,2), (2,3), (2,6), (3,2), (3,3), (3,6), (4,4), (5,1), (5,5), (6,2), (6,3), (6,6)\}$. Найти разбиение множества A на смежные классы, которые индуцирует R. Построить фактор-множество.

3.24. На множестве $A = \{2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 15\}$ задано отношение частичного порядка $R \equiv x \mid y = \{x \text{ делит } y\}$. Построить диаграмму Хассе для этого отношения. Указать наименьший, наибольший, максимальный и минимальный элементы.

3.25. На множестве $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}$ задано отношение частичного порядка $R = \{x \text{ кратно } y\}$. Построить диаграмму Хассе. Указать наименьший, наибольший, максимальный и минимальный элементы.

3.26. На булеане множества $A = \{a, b, c, d\}$ частичный порядок может быть установлен с помощью отношения включения подмножеств $\subseteq$. Построить соответствующую диаграмму Хассе. Указать наибольший и наименьший элементы.

3.27. Изобразить с помощью диаграммы Хассе все различные типы частичного порядка для трех элементных множеств.

Отношение R на множестве $A = \{a, b, c, d, e\}$ задается матрицей отношения M_R. Определить смежные классы $[x]_R$ всех элементов $x \in A$ по отношению R и установить, является ли отношение R отношением эквивалентности. (*Указание*: для определения типа отношения R воспользоваться теоремой о разбиении множества на классы по отношению эквивалентности.)

3.28. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$ **3.29.** $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ **3.30.** $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$

ЗАДАНИЕ 4

4.1. Функция следования Пеано σ: $N \to N$ определена как $\sigma(n) = n + 1$. Определить, является ли функция сюръекцией, инъекцией, биекцией.

4.2. На множестве $M = \{1, 2, ..., n\}$ определена функция циклической перестановки $S : M \to M$ как $S(k) = k + 1, k \neq n$ и $S(n) = 1$. Определить, является ли функция сюръекцией, инъекцией, биекцией.

4.3. Определить число различных сюръективных отображений, действующих из $A = \{a, b, c\}$ в $D = \{1, 2\}$.

4.4. Определить число различных сюръективных отображений, действующих из $C = \{1, 2, 3, 4\}$ в $D = \{a, b, c\}$.

4.5. Определить число различных инъективных отображений, действующих из $A = \{a, b\}$ в $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

4.6. Определить число различных инъективных отображений, действующих из $C = \{a, b, c\}$ в $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

4.7. Установить, являются ли отображения $\sigma : x \to x^2$, действующие из множеств N, Z, Q, R, C в себя: а) инъекциями; б) сюръекциями.

4.8. Установить, являются ли отображения $f : x \to x^3$, действующие из множеств N, Z, Q, R, C в себя: а) инъекциями; б) сюръекциями.

4.9. Задать в виде таблиц все различные функциональные отношения, заданные на множествах $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $Y\{y_1, y_2, y_3\}$, указать их тип.

4.10. Указать тип функциональных отношений:

а) $F : R_{>0} \to R$, $F(x) = \ln x$;

б) $F : R_{\geq 0} \to R_{\geq 0}$, $F(x) = x^2$.

4.11. Указать тип функциональных отношений:

а) $F : R \to [-2; 2]$, $F(x) = \sin x$;

б) $F : R \to [-1; 1]$, $F(x) = \cos x$.

4.12. Указать тип функционального отношения $F(x) = \sqrt{x}$, если:

а) $F : R_{\geq 0} \to R_{\geq 0}$;

б) $F : R_{\geq 0} \to R$;

в) $F : N \to R$.

Разложить заданные сюръективные отображения, действующие из $A = \{a, b, c, d\}$ в $B = \{1, 2\}$, на композицию канонического отображения $j: A \to A/\sigma$ и биекцию $G: A/\sigma \to B$, где σ – ядерная эквивалентность (п. 4.13–4.15).

4.13.

a	b	c	d
1	1	2	2

4.14.

a	b	c	d
1	2	1	2

4.15.

a	b	c	d
1	2	2	2

4.16. На множестве N определена алгебра $(N,*)$, где $m * n =$ Н.О.К. (m, n). Найти $4*6, 3*5, 9*18, 12*16$. Установить, является ли алгебра коммутативной полугруппой.

4.17. На множестве N определена алгебра $(N,*)$, где $m * n =$ Н.О.К. (m, n). Установить: а) имеет ли алгебра единичный элемент e; б) какие элементы x имеют обратные x^{-1}.

4.18. На множестве N определена алгебра $(N,*)$, где $m * n =$ Н.О.Д. (m, n). Найти $4*6, 3*5, 9*18, 12*16$. Установить, является ли алгебра коммутативной полугруппой.

4.19. На множестве N определена алгебра $(N,*)$, где $m * n =$ Н.О.Д. (m, n). Установить: а) имеет ли алгебра единичный элемент e; б) какие элементы x имеют обратные x^{-1}.

4.20. На множестве Q задана алгебра $(Q,*)$, где $a*b = a+b-ab$. Найти $3*4;\ 5*(-3);\ \frac{2}{3}*\frac{1}{5};\ -\frac{1}{2}*1$. Установить, является ли алгебра коммутативной полугруппой.

4.21. На множестве Q задана алгебра $(Q,*)$, где $a*b = a+b-ab$. Установить: а) имеет ли алгебра единичный элемент e; б) какие элементы a имеют обратные a^{-1}.

4.22. На множестве Q задана алгебра $(Q,*)$, где $a*b = ab+a+b$. Найти $3*(-2);\ 0*5;\ -\frac{1}{2}*4;\ \left(-\frac{3}{4}\right)*\frac{2}{5}$. Установить, является ли алгебра коммутативной полугруппой.

4.23. На множестве Q задана алгебра $(Q,*)$, где $a*b = ab+a+b$. Установить: а) имеет ли алгебра единичный элемент e; б) какие элементы a имеют обратные a^{-1}.

4.24. Для множества $Z_{\geq 0}$ определены подмножества $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{x / x - \textit{простые}\}$, $D = \{x / x - \textit{четные}\}$, $E = \{x / x - \textit{нечетные}\}$, $F = \{x / x = 2^n\}$. Указать, какие из подмножеств замкнуты относительно арифметических операций:
а) сложения; б) умножения.

4.25. Для симметрической группы S_3 найти порядок и составить таблицу Кэли.

4.26. Найти все подгруппы симметрической группы S_3.

4.27. Множество $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ образует группу с групповой операцией умножения по модулю 7: $a \circ b = ab \mod 7$. Составить таблицу Кэли. Найти $2^{-1}, 3^{-1}, 6^{-1}$. Найти порядок и подгруппу, которая генерируется 4.

4.28. Множество $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ образует группу с групповой операцией сложения по модулю 7: $a \circ b = a + b \mod 7$. Составить таблицу Кэли. Найти $2^{-1}, 3^{-1}, 6^{-1}$. Найти порядок и подгруппу, которая генерируется 3.

4.29. Составить таблицу Кэли для группы преобразований поворотов, совмещающих вершины квадрата. Найти порядки всех элементов. Разбить группу на классы сопряженных элементов. Найти инвариантную подгруппу.

4.30. Составить таблицу Кэли для группы преобразований поворотов, совмещающих вершины правильного шестиугольника. Найти порядки всех элементов. Разбить группу на классы сопряженных элементов. Найти инвариантную подгруппу.

ЗАДАНИЕ 5

С помощью таблиц истинности установить, являются ли заданные формулы алгебры высказываний: а) тавтологиями; б) противоречиями; в) нейтральными (п. 5.1–5.10).

5.1. а) $(P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow (Q \wedge P))$;

б) $\left(\neg\left(P \Rightarrow \neg\left(Q \wedge P\right)\right)\right) \Rightarrow \left(P \vee R\right)$.

5.2. а) $\left(P \wedge \left(Q \Rightarrow P\right)\right) \Rightarrow \neg P$;

б) $\left(\left(P \wedge \neg Q\right) \Rightarrow Q\right) \Rightarrow \left(P \Rightarrow Q\right)$.

5.3. а) $\left(P \Rightarrow \left(Q \Rightarrow R\right)\right) \Rightarrow \left(\left(P \Rightarrow Q\right) \Rightarrow \left(P \Rightarrow R\right)\right)$;

б) $\left(P \wedge \left(Q \vee \neg P\right)\right) \wedge \left(\left(\neg Q \Rightarrow P\right) \vee Q\right)$.

5.4. а) $\left(P \Rightarrow Q\right) \vee Q \Rightarrow P$;

б) $\left(\left(P \Rightarrow Q\right) \Rightarrow P\right) \Rightarrow P$.

5.5. а) $(P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow \neg Q)$;

б) $(Q \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee R))$.

5.6. а) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \wedge Q))$;

б) $(\neg Q \Rightarrow \neg P) \Rightarrow ((\neg Q \Rightarrow P) \Rightarrow Q)$.

5.7. а) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$;

б) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$.

5.8. а) $Q \Rightarrow (P \vee Q)$;

б) $(P \Rightarrow R) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow R))$.

5.9. а) $((P \wedge Q) \Rightarrow Q) \Rightarrow P$;

б) $((P \vee P) \Rightarrow P) \Rightarrow ((Q \vee Q) \Rightarrow Q)$.

5.10. а) $(P \Rightarrow Q) \sim (\neg P \vee Q) \Rightarrow (\neg (Q \vee R) \Rightarrow P)$;

б) $(Q \Rightarrow (P \vee Q)) \sim (P \Rightarrow (P \vee Q))$.

Используя свойства операций алгебры высказываний, проверить эквивалентность заданных соотношений (п. 5.11–5.15).

5.11. а) $A \wedge (P \vee A) \equiv A$;

б) $\neg (A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$.

5.12. а) $A \wedge (B \vee \neg B) \equiv A$;

б) $A \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

5.13. а) $(A \Rightarrow \neg A) \equiv \neg A$;

б) $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee D) \wedge (C \vee D) \equiv (A \wedge D) \vee (B \wedge C)$.

5.14. а) $A \vee (\neg A \wedge B) \equiv A \vee B$;

б) $(A \vee B) \wedge (B \vee C) \wedge (C \vee A) \equiv (A \wedge B) \vee (B \wedge C) \vee (C \wedge A)$.

5.15. а) $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \equiv A$;

б) $(A \wedge B) \vee ((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \equiv A \vee B$.

Решить заданные на алгебре высказываний уравнения (п. 5.16–5.20).

5.16. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) = P \wedge R \Rightarrow \neg Q$.

5.17. $(P \Rightarrow Q \vee R) \wedge (\neg Q \wedge S) \wedge S \wedge P \Rightarrow \neg R = 0$.

5.18. $(Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \vee Q \Rightarrow P \vee R) = 0$.

5.19. $(P \wedge Q \wedge R) \Rightarrow \neg P \vee Q \vee \neg R = 0$.

5.20. $\neg P \Rightarrow (P \Rightarrow Q) = P \vee \neg Q$.

5.21. На вопрос, кто из трех учащихся изучал логику, был получен правильный ответ: если изучал первый, то изучал и второй, но неверно, что если изучал третий, то изучал и второй. Кто из учащихся изучал логику?

5.22. По обвинению в ограблении перед судом предстали A, B и C. Достоверно было установлено: 1) если A не виновен или B виновен, то C виновен; 2) если A не виновен, то C не виновен. Установить, виновен ли A.

5.23. Установить, кто из четырех подозреваемых участвовал в ограблении, если известно: 1) что если A участвовал, то и B участвовал; 2) если B участвовал, то или C участвовал, или A не участвовал; 3) если D не участвовал, то A участвовал, а C не участвовал; 4) если D участвовал, то A тоже участвовал.

5.24. Экзамен сдавали три студента A, B и C. Известно: 1) что если A не сдал или B сдал, то и C сдал; 2) если A не сдал, то и C не сдал. Можно ли на основании этих данных установить, кто сдал экзамен?

5.25. Виктор, Роман, Юрий и Сергей заняли на математической олимпиаде первые 4 места. Когда их спросили о распределении мест, они дали такие ответы: а) Сергей – первый, Роман – второй; 2) Сергей – второй, Виктор – третий; 3) Юрий – второй, Виктор – четвертый. Как распределились места, если в каждом ответе только одно утверждение истинно?

5.26. Голосуют 3 человека. Решение принимается, если число поданных «за» голосов будет ≥ 2. Рассмотреть функцию $f(x_1, x_2, x_3) = \{решение \quad принято\}$. Составить ее таблицу. Записать ее в виде булевой формулы, используя операции алгебры высказываний.

5.27. Для трех переменных x_1, x_2, x_3 выписать: а) все конституэнты единицы; б) все элементарные конъюнкции.

5.28. Для n булевых переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ определить, сколько существует различных: а) конституэнт единицы; б) элементарных конъюнкций.

5.29. Построить булеву формулу из четырех переменных, которая истинна в том и только в том случае, когда ровно две переменные ложны.

5.30. Построить булеву формулу Σ из переменных A, B и C так, чтобы $A \wedge \Sigma = A \wedge B$ и $A \vee \Sigma = A \vee C$.

ЗАДАНИЕ 6

Используя различные методы, построить для заданных булевых функций ДНФ, СДНФ, КНФ и СКНФ (п. 6.1–6.15).

6.1. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow \neg A)) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg C)$.

6.2. $((((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg C) \Rightarrow C$.

6.3. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \neg C) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)).$

6.4. $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((B \wedge C) \Rightarrow (A \wedge C)).$

6.5. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge C)).$

6.6. $(A \Rightarrow C) \Rightarrow (\neg(B \vee C) \Rightarrow A.$

6.7. $(C \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg(B \vee C) \Rightarrow A).$

6.8. $\neg((A \wedge B) \Rightarrow A) \vee (A \wedge (B \vee C)).$

6.9. $\neg(A \wedge (B \vee C)) \Rightarrow ((A \wedge B) \vee C).$

6.10. $(A \vee B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee C \Rightarrow B \vee C).$

6.11. $(\neg A \Rightarrow B) \vee (\neg C \wedge A \Rightarrow B \wedge \neg A) \wedge A \vee B \Rightarrow C.$

6.12. $(A \Rightarrow (B \wedge C)) \vee (A \Rightarrow (A \wedge B)).$

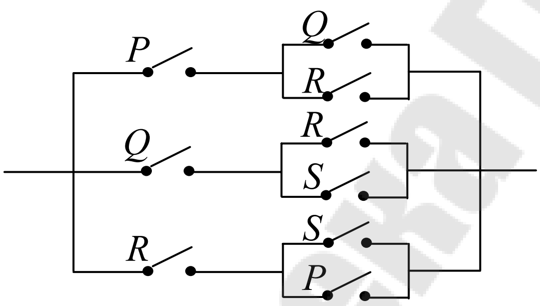
6.13. $(C \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg(B \vee C) \Rightarrow A).$

6.14. $(C \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg(B \wedge C) : A \wedge \neg C.$

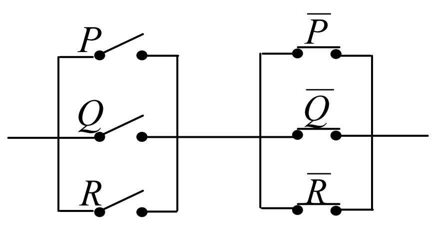
6.15. $A \wedge (B \vee C) : A \wedge B \vee C.$

Для заданной контактной схемы записать булеву формулу и привести ее к тупиковой ДНФ, используя метод таблицы покрытия. Изобразить контактную схему, соответствующую полученной тупиковой ДНФ, с минимальным количеством ключей (п. 6.16–6.30).

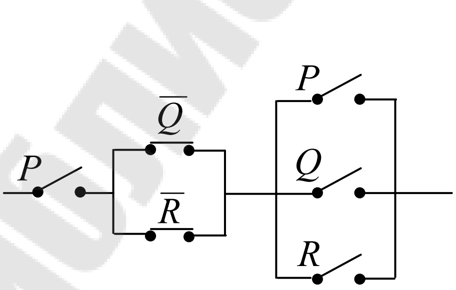
6.16.



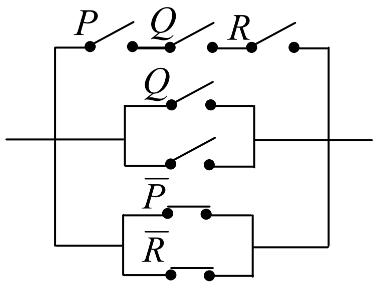
6.17.



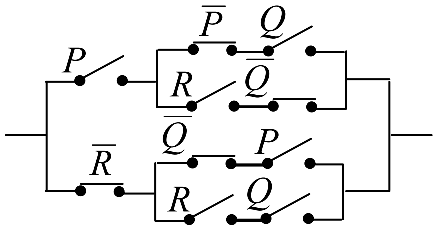
6.18.



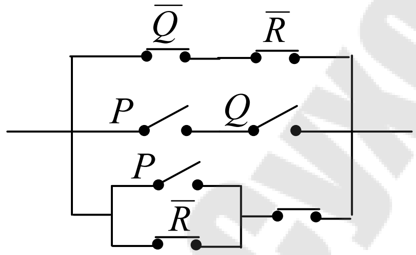
6.19.



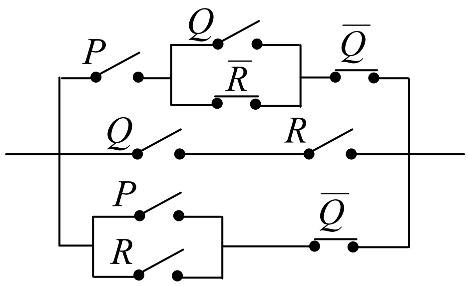
6.20.



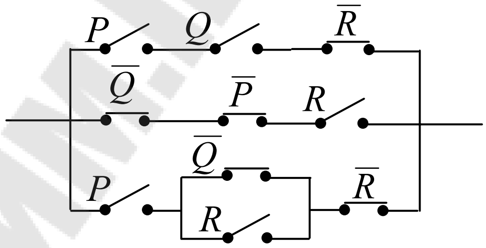
6.21.



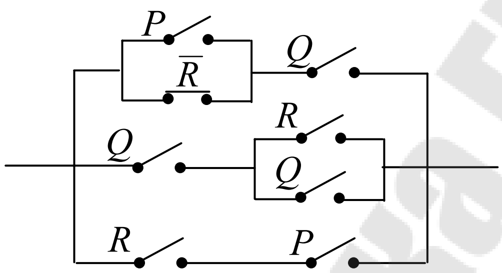
6.22.



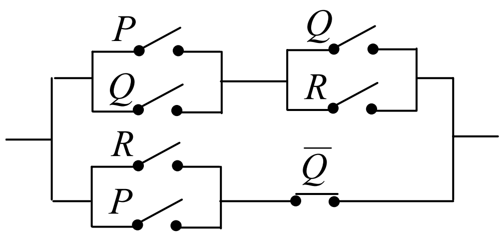
6.23.



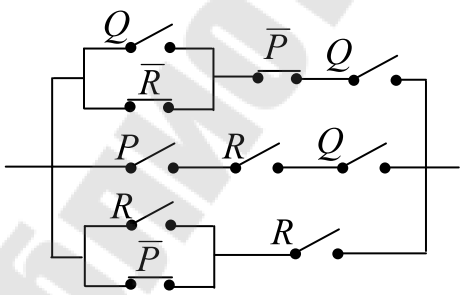
6.24.



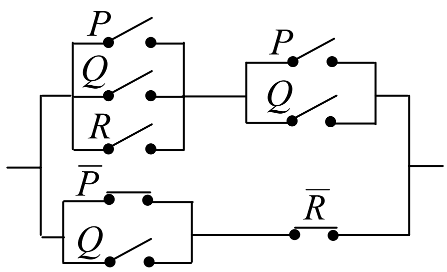
6.25.



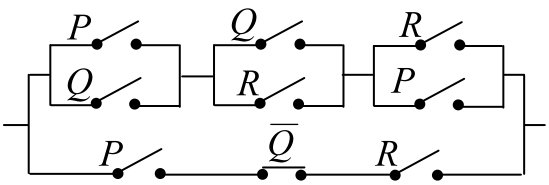
6.26.



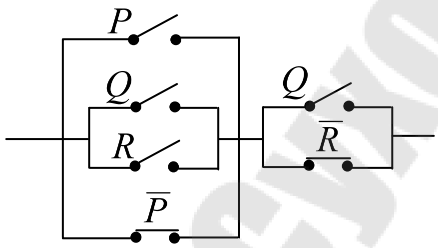
6.27.



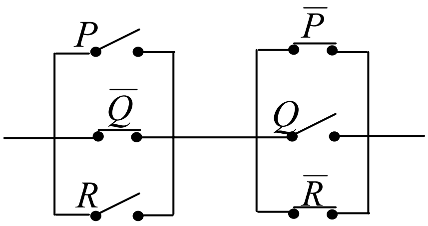
6.28.



6.29.



6.30.



ЗАДАНИЕ 7

Установить, являются ли заданные булевы функции а) монотонными; б) линейными; в) сохраняющими 0; г) сохраняющими 1; д) самодвойственными.

Указать, образуют ли они совместно базис (п. 7.1–7.30).

7.1. а) $\bar{x}_1 \Rightarrow x_2$; б) $x_1 \vee x_2$.

7.2. а) $\bar{x}_1 \sim x_2$; б) $x_2 \Rightarrow x_1$.

7.3. а) $(x_1 \Rightarrow x_2) \wedge x_1$; б) $\overline{x_1 \vee x_2}$.

7.4. а) $x_1 \mid \bar{x}_2$; б) $\bar{x}_1 \vee x_2$.

7.5. а) $x_1 \downarrow x_2$; б) $x_1 \oplus x_2$.

7.6. а) $(x_1 \Rightarrow x_2) \mid x_1$; б) $x_1 \wedge \bar{x}_2$.

7.7. а) $\overline{x_1 \Rightarrow x_2}$; б) $\bar{x}_1 \oplus x_2$.

7.8. а) $x_1 \sim \bar{x}_2$; б) $x_1 \mid x_2 \Rightarrow x_1$.

7.9. а) $\overline{x_1 \oplus x_2}$; б) $x_2 \Rightarrow x_1$.

7.10. а) $(x_1 \mid x_2) \mid x_1$; б) $(x_1 \vee x_2) \wedge x_1$.

7.11. а) $x_1 \oplus \bar{x}_2$; б) $\bar{x}_1 \downarrow x_2$.

7.12. а) $\bar{x}_1 \sim \bar{x}_2$; б) $(x_2 \Rightarrow x_1) \mid x_1$.

7.13. а) $(x_1 \vee x_2) \oplus x_2$; б) $(x_1 \downarrow x_2) \vee x_1$.

7.14. а) $(x_1 \oplus x_2) \vee x_1$; б) $\overline{x_1 \downarrow x_2}$.

7.15. а) $(\bar{x}_1 \sim x_2) \Rightarrow x_2$; б) $(x_1 \vee x_2) \sim x_1$.

7.16. а) $(x_2 \Rightarrow x_1) \downarrow x_1$; б) $\overline{x_1 \sim x_2}$.

7.17. а) $x_1 \wedge (\bar{x}_2 \Rightarrow x_1)$; б) $x_1 \sim (x_1 \oplus x_2)$.

7.18. а) $x_1 \mid (x_1 \sim x_2)$; б) $x_1 \downarrow (x_2 \Rightarrow x_1)$.

7.19. а) $(x_1 \vee x_2) \oplus \bar{x}_1$; б) $x_1 \sim (x_1 \downarrow x_2)$.

7.20. а) $(x_1 \mid x_2) \sim x_2$; б) $(x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow x_2$.

7.21. а) $x_1 \Rightarrow (x_2 \Rightarrow \bar{x}_1)$; б) $(x_1 \wedge x_2) \oplus x_2$.

7.22. а) $(x_1 \sim x_2) \oplus x_1$; б) $(\bar{x}_1 \oplus x_2) \vee x_1$.

7.23. а) $(x_1 \Rightarrow x_2) : x_1$; б) $\overline{x_1 \wedge x_2} \oplus x_1$.

7.24. а) $\overline{x_1 \sim x_2} \vee x_1$; б) $(x_1 \Rightarrow \bar{x}_2) \vee \bar{x}_2$.

7.25. а) $(\bar{x}_1 \sim x_2) \vee x_1$; б) $(x_1 \Rightarrow \bar{x}_2) \mid x_1$.

7.26. а) $\overline{x_1 \mid x_2} \oplus x_1$; б) $\overline{x_1 \vee x_2} \downarrow x_2$.

7.27. а) $\overline{x_1 \wedge x_2} \Rightarrow x_2$; б) $x_1 \wedge \overline{x_2 \Rightarrow x_1}$.

7.28. а) $x_1 \mid (x_1 \downarrow x_2)$; б) $\overline{x_1 \oplus x_2} \vee x_2$.

7.29. а) $\overline{x_1 \downarrow x_2} \Rightarrow x_1$; б) $\overline{x_1 \oplus x_2} \sim x_1$.

7.30. а) $(x_1 \vee x_2) \Rightarrow (x_1 \wedge x_2)$; б) $(x_1 \downarrow \bar{x}_2) \wedge x_1$.

ЗАДАНИЕ 8

Для заданных двуместных предикатов $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ указать (заштриховать) на плоскости области истинности предикатов:

а) $P(x, y) \Rightarrow Q(x, y)$; б) $P(x, y) \sim Q(x, y)$.

8.1. $P(x, y) = \{x^2 + y^2 \le 1\}$, $Q(x, y) = \{x^2 + y^2 \ge 4\}$.

8.2. $P(x, y) = \{x^2 + y^2 \le 4\}$, $Q(x, y) = \{x + y \le 1\}$.

8.3. $P(x, y) = \{x + y \ge 1\}$ $Q(x, y) = \{x^2 + y^2 \le 3\}$.

8.4. $P(x, y) = \{x - y \le 2\}$, $Q(x, y) = \{x^2 + y^2 \ge 9\}$.

8.5. $P(x, y) = \{x^2 + y^2 \ge 4\}$, $Q(x, y) = \{y \le x^2\}$.

8.6. $P(x, y) = \{y \ge x^2\}$, $Q(x, y) = \{y^2 \le x\}$.

8.7. $P(x, y) = \{(x-1)^2 + y \le 1\}$, $Q(x, y) = \{y \le |x|\}$.

8.8. $P(x, y) = \{x^2 + (y-1)^2 \ge 1\}$, $Q(x, y) = \{y \ge |x|\}$.

8.9. $P(x, y) = \{|y| \ge x + 1\}$, $Q(x, y) = \{|y| \ge 1 - x\}$.

8.10. $P(x,y)=\{x^2+y^2\le 4\}$, $Q(x,y)=\{|x|+|y|\ge 2\}$.

8.11. $P(x,y)=\{(x+1)^2+y^2\ge 1\}$, $Q(x,y)=\{y\le x\}$.

8.12. $P(x,y)=\{x^2+(y-1)^2\le 1\}$, $Q(x,y)=\{x^2+(y-2)^2\le 4\}$.

8.13. $P(x,y)=\{x^2+(y-1)^2\le 1\}$, $Q(x,y)=\{y\ge x^2\}$.

8.14. $P(x,y)=\{|x+y|\le 1\}$, $Q(x,y)=\{x^2+y^2\le 1\}$.

8.15. $P(x,y)=\{|x-y|\ge 1\}$, $Q(x,y)=\{|x|+|y|\le 1\}$.

Сформулировать и выяснить истинность заданных с помощью кванторов $\forall$ и $\exists$ высказываний.

8.16. а) $\exists x\in R,\ \exists y\in R: x+y=3$; б) $\forall x\in R,\ \exists y\in R: x+y=3,$.

8.17. а) $\exists x\in R,\ \exists y\in Z: 2x-y=5$; б) $\forall x\in R,\ \exists y\in Z: 2x-y=5$.

8.18. а) $\exists x\in R,\ \exists y\in R: x^2+y^2=1$; б) $\forall x\in R,\ \exists y\in Z: x^2+y^2\le 2$.

8.19. а) $\exists x\in R,\ \exists y\in Z: x^2+y^2<1$; б) $\forall x\in R,\ \exists y\in Z: y\ge x^2$.

8.20. а) $\exists x\in Z,\ \exists y\in Z: |x|+|y|<1$; б) $\forall x\in R: x^2-2x+1>0$.

8.21. а) $\forall x\in R,\ \forall y\in R: x<y\Rightarrow x<z<y$; б) $\forall x\in R: \sqrt{x^2}>x$.

8.22. а) $\forall x\in R,\ \forall y\in R: \ln xy=\ln|x|+\ln|y|$;

б) $\forall x\in R: x-1\ge 0\Rightarrow x^2-1\ge 0$.

8.23. а) $\exists x\in R,\ \exists y\in R: x^2-2x+y^2+2=0$;

б) $\forall x\in N,\ \forall y\in N: \sqrt{xy}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$.

8.24. а) $\forall x\in R,\ \exists y\in R: \sqrt{xy}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$; б) $\exists x\in Z: 5\le x^2\le 10$.

8.25. а) $\forall\bar{a},\ \exists\bar{b}: \bar{a}\cdot\bar{b}=2$; б) $\forall\bar{a},\ \forall\bar{b}: \bar{a}\times\bar{b}=0$.

8.26. а) $\forall\bar{a},\ \forall\bar{b},\ \exists\bar{c}: \bar{a}\times\bar{b}=\bar{c}$; б) $\forall\bar{a},\ \forall\bar{b},\ \exists\bar{c}: (\bar{a}\bar{b}\bar{c})=0$.

8.27. а) $\forall\bar{a},\ \forall x\in N,\ \exists\bar{b}: \bar{b}=x\bar{a}$; б) $\forall\bar{a},\ \forall\bar{b},\ \exists\bar{c}: (\bar{a}\bar{b}\bar{c})=-1$.

Далее M – матричная алгебра.

8.28. а) $\forall A\in M,\ \forall B\in M:\ AB=BA$; б) $\forall A\in M,\ \exists B\in M:\ AB=BA$.

8.29. а) $\forall A\in M,\ \exists B:\ AB=I$; б) $\forall A\in M,\ \exists B\in M:\ AB=I$.

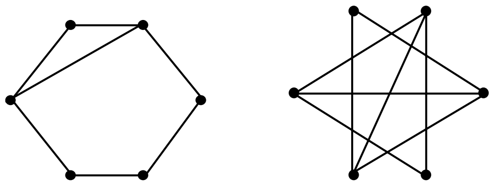
8.30. а) $\forall A\in M,\ \forall B\in M,\ \exists X\in M:\ AX=B$;

б) $\forall A\in M,\ \exists X\in M,\ \forall B\in M:\ AX=B$.

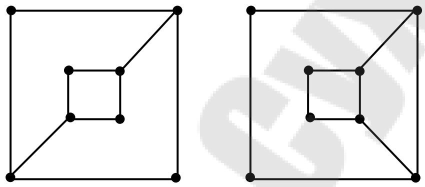
ЗАДАНИЕ 9

Установить, изоморфны ли заданные пары графов.

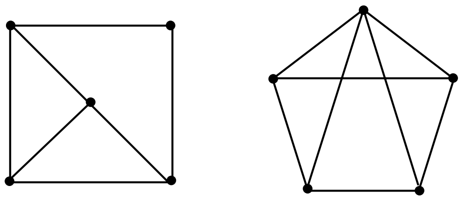
9.1.



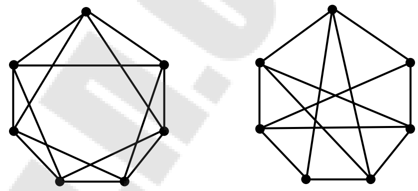
9.2.



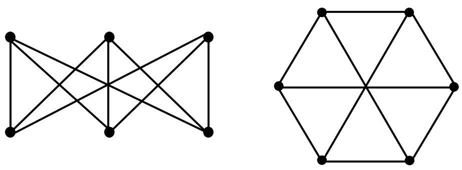
9.3.



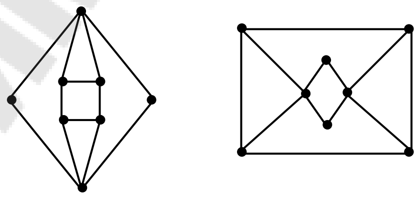
9.4.



9.5.

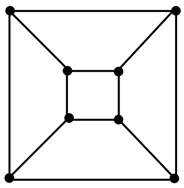


9.6.

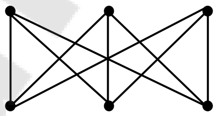


Найти число Хадвигера $\eta = (G)$ для указанных графов.

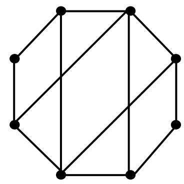
9.7.



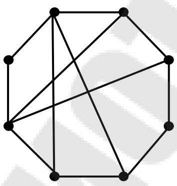
9.8.



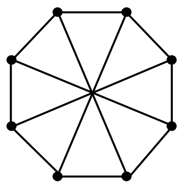
9.9.



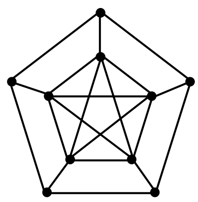
9.10.



9.11.

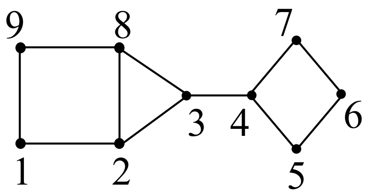


9.12.

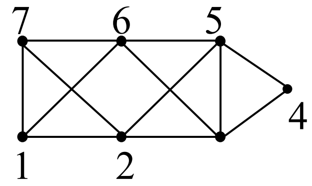


Для заданных помеченных графов указать: 1) маршрут, но не цепь; 2) цепь; 3) простую цепь; 4) цикл; 5) простой цикл.

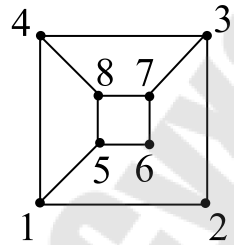
9.13.



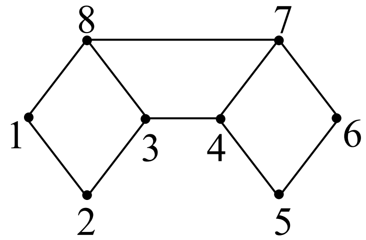
9.14.



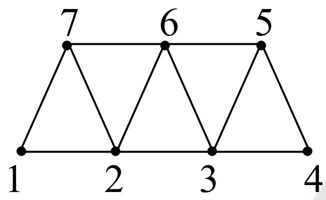
9.15.



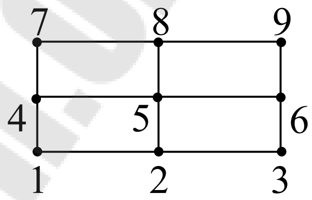
9.16.



9.17.

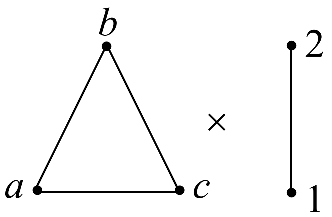


9.18.

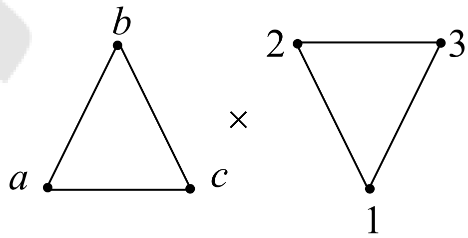


Для заданных графов найти их декартово произведение. Изобразить искомый граф без самопересечений ребер (если возможно).

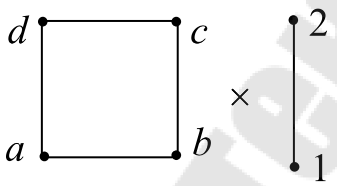
9.19.



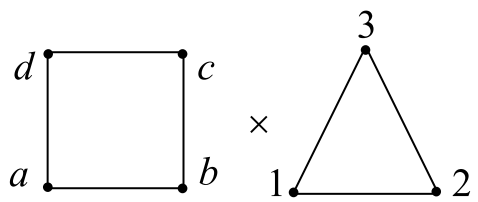
9.20.



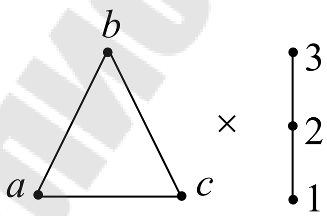
9.21.



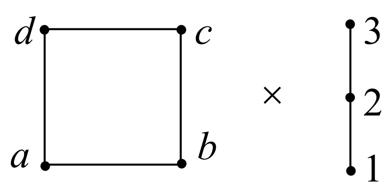
9.22.



9.23.

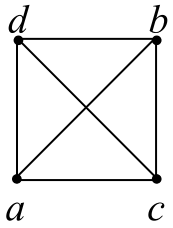


9.24.

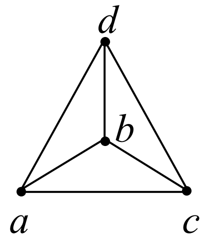


Используя матрицу смежности указанного графа, найти число всех различных маршрутов длины 2 и 3, соединяющих вершины a и b. Выписать эти маршруты.

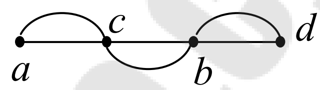
9.25.



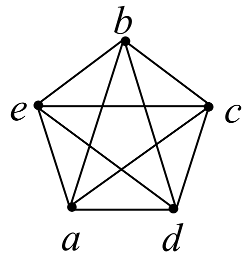
9.26.



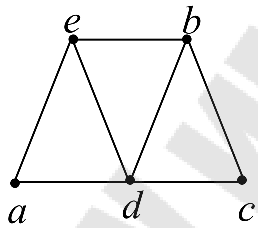
9.27.



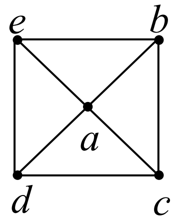
9.28.



9.29.



9.30.



ЗАДАНИЕ 10

10.1. Доказать, что в любом графе порядка $n \geq 2$ всегда найдутся 2 вершины, имеющие одинаковую степень.

10.2. Девять шахматистов проводят турнир в один круг, т. е. каждый шахматист играет по одной партии с другим. Доказать, что в любой момент всегда найдутся двое, сыгравшие одинаковое число партий.

10.3. Познакомившись, участники олимпиады обменялись конвертами. Каким может быть число всех переданных конвертов?

10.4. Познакомившись, участники конференции обменялись значками. Каким может быть число участников, которые обменялись нечетным числом значков?

10.5. В футбольном турнире участвуют 17 команд. Найдется ли в любой момент времени команда, сыгравшая четное число матчей?

10.6. Является ли любой граф с 53 вершинами и со степенями вершин не меньшими, чем 26, связным?

10.7. Является ли граф с 45 вершинами и 950 ребрами связным?

10.8. Изобразить графы в порядке с наибольшим и наименьшим числом ребер, имеющие: а) 2 компоненты; б) 3 компоненты; в) 4 компоненты.

10.9. Может ли каждый из 135 участников конференции быть знакомым ровно с 5, 11 или 15 из остальных участников?

10.10. Может ли каждый из 129 участников конференции быть знакомым ровно с 5, 12 или 20 из остальных участников?

10.11. Может ли каждый из 121 участника конференции быть знакомым ровно с 7, 12 или 17 из остальных участников?

10.12. Может ли каждый из 125 участников конференции быть знакомым ровно с 7, 9 или 17 из остальных участников?

10.13. В соревновании по круговой системе с двенадцатью участниками проведены все встречи тура. Сколько встреч было сыграно?

10.14. Какое максимальное число разрезов можно сделать в волейбольной сетке размером 20×10 так, чтобы она не распалась?

10.15. Какое максимальное число разрезов можно сделать в волейбольной сетке размером 24×12 так, чтобы она не распалась?

10.16. Спортсмен делает 3 выстрела и за каждое попадание по условию соревнований получает право еще на 2 выстрела. Определить число попаданий в цель, если известно, что спортсмен выстрелил 15 раз.

10.17. Спортсмен делает 5 выстрелов и за каждое попадание по условию соревнований получает право еще на 2 выстрела. Определить число попаданий в цель, если известно, что спортсмен выстрелил 25 раз.

10.18. При скатывании камня с горы он при каждом ударе о препятствие делится на 3 части, которые в дальнейшем при ударе также могут делиться на 3 части. Определить число ударов, если внизу было обнаружено 43 осколка.

10.19. Найти радиус и центр простых цепей P_9, P_{11} и P_{2k+1}.

10.20. Найти радиус и центр простых цепей P_6, P_{12} и P_{2k}.

10.21. Пусть C_n – простой цикл порядка n. Найти его диаметр, радиус и центр.

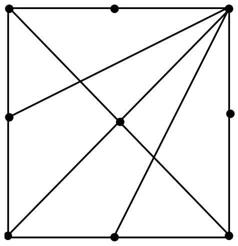
10.22. Построить граф порядка 6, центр которого состоит: а) из одной; б) двух; в) трех вершин.

10.23. Построить граф порядка 7, центр которого состоит: а) из одной; б) двух; в) трех вершин.

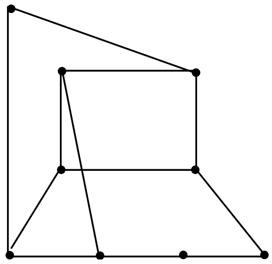
10.24. Построить граф порядка 8, центр которого состоит: а) из двух; б) четырех; в) пяти вершин.

Используя поиск в ширину, установить, являются ли указанные графы двудольными.

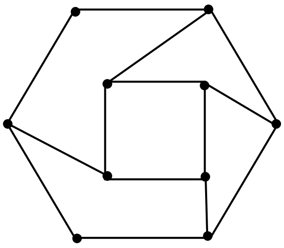
10.25.



10.26.



10.27.



Найти реберную $\lambda(G)$ и вершинную $\chi(G)$ связности заданных графов G.

10.28. а) K_4; б) $K_{3,3}$.

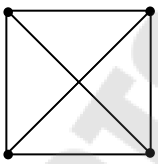
10.29. а) K_5; б) $K_{2,4}$.

10.30. а) K_6; б) $K_{4,3}$.

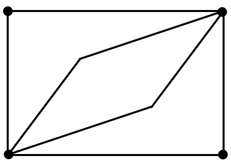
ЗАДАНИЕ 11

Проверить формулу Эйлера для заданных плоских графов.

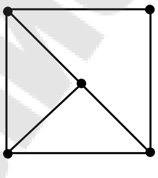
11.1. а)



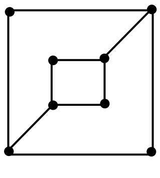
б)



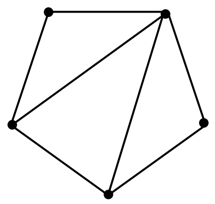
11.2. а)



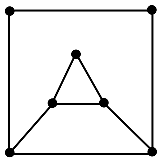
б)



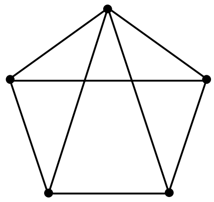
11.3. а)



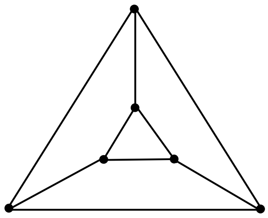
б)



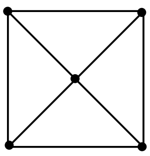
11.4. а)



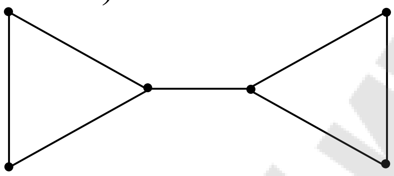
б)



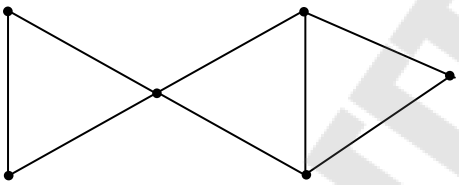
11.5. а)



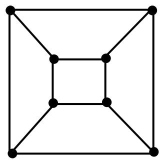
б)



11.6. а)



б)



Построить плоские графы G с заданным числом вершин n, если известно, что каждая грань графа является $r \geq 3$ циклом.

11.7. а) $r = 3, n = 4$; б) $r = 4, n = 7$.

11.8. а) $r = 3, n = 5$; б) $r = 4, n = 6$.

11.9. а) $r = 3, n = 6$; б) $r = 4, n = 5$.

11.10. а) $r = 5, n = 8$; б) $r = 6, n = 8$.

11.11. Доказать, что в плоском графе порядка n, у которого каждая грань является r циклом, число граней удовлетворяет соотношению $f(r-2) = 2(n-2)$.

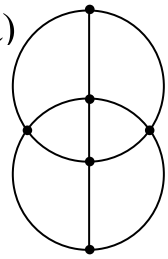
11.12. Могут ли населенные пункты быть соединены 54 дорогами, если известно, что из каждого пункта выходит ровно: а) 3 дороги; б) 4 дороги?

11.13. Могут ли населенные пункты быть соединены 50 дорогами, если известно, что из каждого пункта выходит: а) 5 дорог; б) 6 дорог?

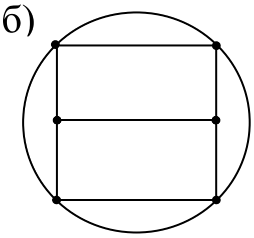
Являются ли заданные линии уникурсальными, т. е. можно ли их нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, при этом проходя ребра только один раз?

11.14.

а)

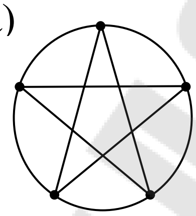


б)

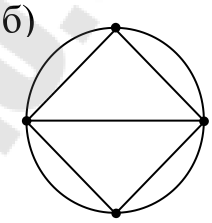


11.15.

а)

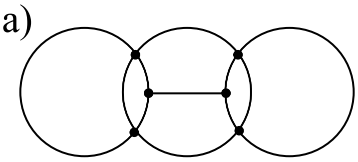


б)

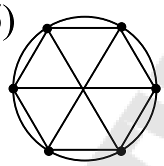


11.16.

а)

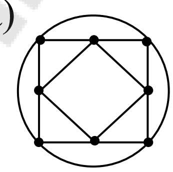


б)

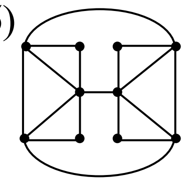


11.17.

а)

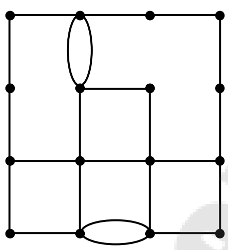


б)

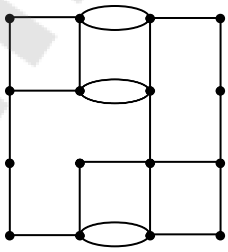


Используя алгоритм Флери, найти эйлеров путь указанного графа.

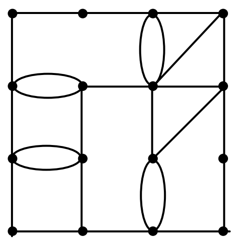
11.18.



11.19.

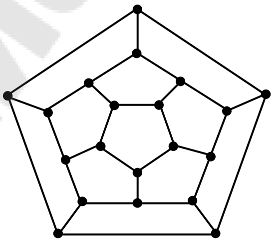


11.20.



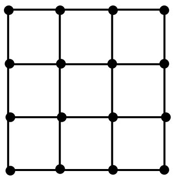
11.21. Из какого минимального числа кусков проволоки можно спаять каркас плоского графа куба Q_3?

11.22. Найти гамильтонов цикл в графе додекаэдра.

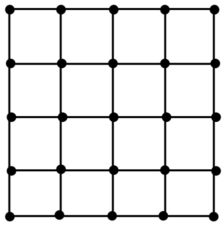


11.23. Являются ли указанные графы гамильтоновыми, если да, то указать гамильтонов цикл.

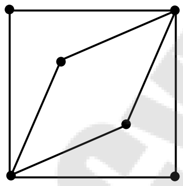
а)



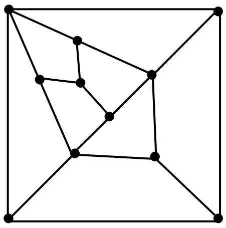
б)



в)

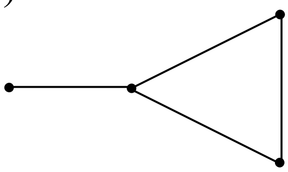


11.24. Проверить двудольность, и используя этот факт, доказать, что указанный трехсвязный граф не является гамильтоновым.

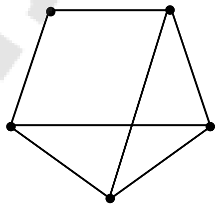


11.25. Задать для указанных графов произвольную ориентацию и проверить равенство $K = I \cdot I^T$, где K – матрица Кирхгофа, а I – матрица инцидентности графа.

а)

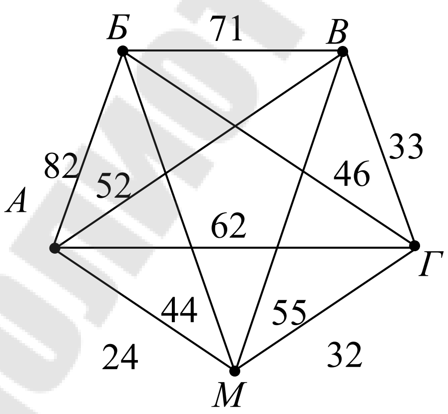


б)

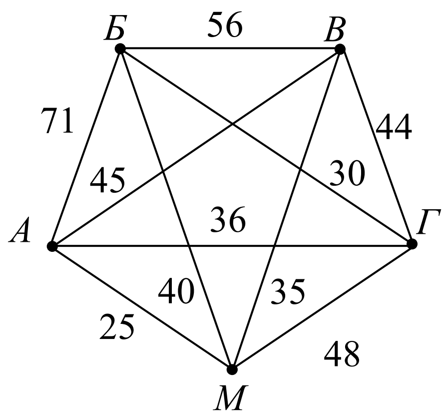


Дана схема между городами *М*, *А*, *Б*, *В*, *Г*. Числа на схеме указывают расстояния между городами. Найти кратчайший маршрут, по которому можно доставить груз из города *М* в остальные города и вернуться обратно (п. 11.26–11.28).

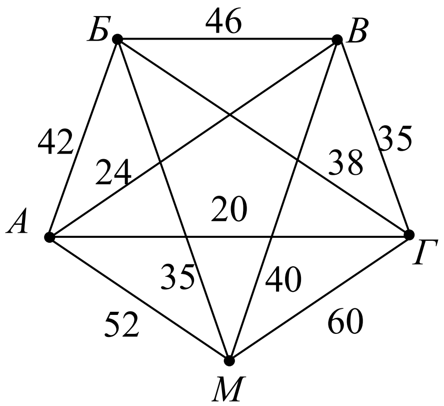
11.26.



11.27.



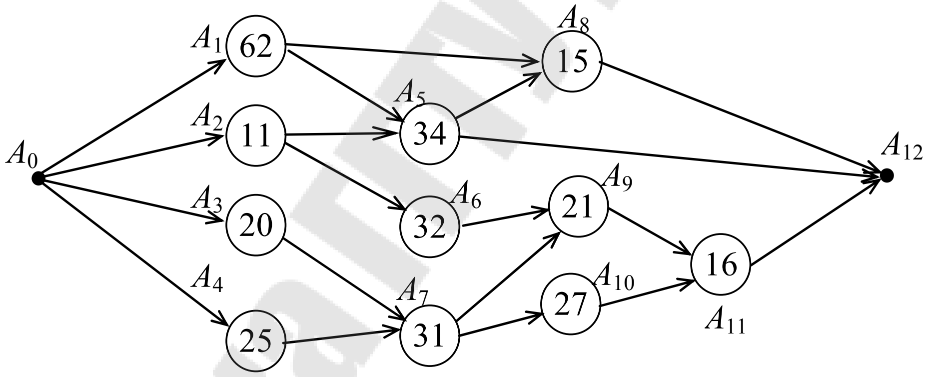
11.28.



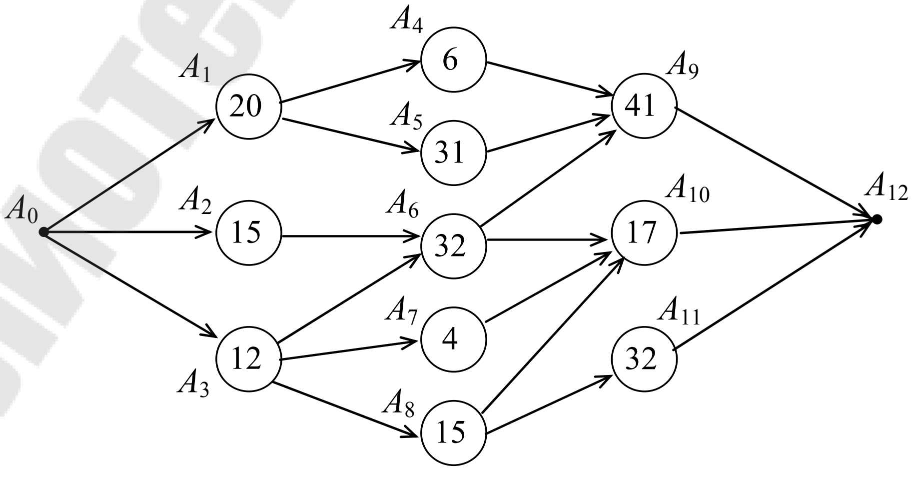
Изображен сетевой график строительства, где указана продолжительность (в днях) работы A_i, $i = 1, 2, ...,$ A_0 – начало строительства, A_{12} – конец. Стрелка от A_i к A_j означает, что работа A_j не может начаться раньше, чем A_i.

Найти наименьшую возможную продолжительность строительства, если сократить время работы A_3 на 5, а A_9 на 6 дней (п. 11.29–11.30).

11.29.



11.30.



Литература

1. Лавров, И. А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И. А. Лавров, Л. Л. Максимова. – Москва : Наука, 1979.

2. Гнидикин, С. Г. Алгебра логики в задачах / С. Г. Гнидикин. – Москва : Наука, 1972.

3. Оре, О. Графы и их применение / О. Оре. – Москва : Мир, 1965.

4. Бабич, А. А. Элементы теории множеств математической логики и теории графов : практ. рук. по курсу «Дискретная математика» / А. А. Бабич, Е. А. Молокова. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2002. – 53 с.

5. Дискретная математика : практикум к контрол. заданиям по одноим. курсу для студентов заоч. формы обучения / авт.-сост.: А. А. Бабич, Е. А. Молокова. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2004. – 52 с.

Содержание

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Практикум к расчетно-графической работе по одноименному курсу для студентов специальностей 1-36 01 01 «Технология машиностроения» и 1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства» дневной формы обучения

Электронный аналог печатного издания

Авторы-составители: **Бабич** Александр Антонович
Емелин Анатолий Владимирович

Редактор *Н. Г. Мансурова*
Компьютерная верстка *Н. Б. Козловская*

Подписано в печать 07.05.07.
Формат 60x84/$_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Цифровая печать. Усл. печ. л. 1,86. Уч.-изд. л. 1,82.
Изд. № 54.
E-mail: ic@gstu.gomel.by
http://www.gstu.gomel.by

Издатель и полиграфическое исполнение:
Издательский центр учреждения образования
«Гомельский государственный технический университет
имени П. О. Сухого».
ЛИ № 02330/0131916 от 30.04.2004 г.
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.