



Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Сельскохозяйственные машины»

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ТРАКТОРОВ И СПЕЦИАЛЬНЫХ МАШИН

ПРАКТИКУМ

**по одноименному курсу
для студентов специальности 1-36 12 01
«Проектирование и производство
сельскохозяйственной техники»
дневной и заочной форм обучения**

Гомель 2006

УДК 631.3:681.513.5(075.8)
ББК 34.9я73
Т33

*Рекомендовано научно-методическим советом
механико-технологического факультета ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 10 от 29.06.2005 г.)*

Автор-составитель: *В. Б. Попов*

Рецензент: д-р. техн. наук, проф. каф. «Автоматизированный электропривод»
ГГТУ им. П. О. Сухого *В. И. Луковников*

Т33 **Теория** автоматических систем тракторов и специальных машин : практикум по одноим. курсу для студентов специальности 1-36 12 01 «Проектирование и производство сельскохозяйственной техники» днев. и заоч. форм обучения / авт.-сост. В. Б. Попов. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2006. – 63 с.– Систем. требования: РС не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <http://gstu.local/lib>. – Загл. с титул. экрана.

В книге представлено содержание практических занятий, разработанное в соответствии с программой курса.

Краткие теоретические сведения, четкая постановка и примеры решения задач, необходимый справочный материал, помогающие правильно решить задачу, изложены так, чтобы студенты смогли успешно выполнить индивидуальные задания по расчету элементов систем автоматического управления (САУ).

Для студентов машиностроительных специальности 1-36 12 01 «Проектирование и производство сельскохозяйственной техники» заочной формы обучения.

УДК 631.3:681.513.5(075.8)
ББК 34.9я73

© Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого», 2006

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗВЕНЬЕВ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА	5
2. ТИПОВЫЕ ВНЕШНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ В СИСТЕМЕ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ	8
3. ПОЛУЧЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ЗВЕНА СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ПО ЕГО ПЕРЕХОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ	12
4. АНАЛИЗ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ	20
4.1. Формирование структурной схемы системы автоматического регулирования.....	21
4.2. Определение передаточных функций системы по задающему и возмущающему воздействиям, а также для ошибки регулирования.....	22
4.3 Анализ устойчивости систем автоматического управления	24
4.3.1. Анализ устойчивости систем автоматического управления по критерию Гурвица	24
4.3.2. Анализ устойчивости по критерию Михайлова	28
4.3.3. Анализ устойчивости по критерию Найквиста.....	30
4.4. Определение запасов устойчивости систем автоматического управления	36
4.5. Анализ влияния малых параметров на устойчивость.....	38
4.6. Оценка качества управления в системе автоматического управления	39
ЛИТЕРАТУРА	46
ПРИЛОЖЕНИЕ	47

ВВЕДЕНИЕ

Автоматизация технологических процессов и режимов работы составляют одно из главных направлений научно-технического прогресса в разработке современных с/х машин. Экономичная, надежная и безопасная работа сложных технических объектов, к которым принадлежат с/х машины, может быть обеспечена путем широкого внедрения принципов и средств автоматического регулирования и управления.

Основы теоретических знаний о структуре и составе систем автоматического управления (САУ) и закономерностях протекающих в них процессов излагаются в прикладной инженерной дисциплине для специальности 1-36 12 01 – теории автоматических систем. В ней рассматриваются общие закономерности функционирования САУ, присущие автоматическим системам различного назначения и различной физической природы. На основе знания этих закономерностей разрабатываются методы анализа и синтеза систем автоматического управления и регулирования.

В программе курса “Теория автоматических систем тракторов и специальных машин” предусматриваются практические занятия по дисциплине. Настоящее пособие было разработано с целью более полного и детального обучения студентов во время практических занятий методике решения задач анализа линейных автоматических систем непрерывного действия. В пособии изложен необходимый для решения задач теоретический материал, приведены примеры решения задач и варианты для самостоятельной проработки, а также таблица преобразований Лапласа.

Наряду с общепринятыми во всех технических дисциплинах разделами математики, которые изучаются в курсах “Математический анализ” и “Аналитическая геометрия” при анализе сложных САУ необходимы знания таких разделов как “Операционное исчисление” и “Математическое моделирование процессов управления”.

Студентам предлагается решение задач различной сложности – среднего уровня обычным способом с использованием таблицы преобразований Лапласа, более сложных - с использованием возможностей ПЭВМ. Решение сложных задач предполагает знание основных приемов и операций в программной среде MathCAD, полученных в курсах “Информатика” и “Математическое моделирование”. Практика показала, что такой подход при решении задач помимо всего прочего способствует лучшей проработке и усвоению двух других составляющих курса “Теория автоматических систем тракторов и специальных машин” - лекций и лабораторных работ.

1. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗВЕНЬЕВ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

В теории автоматического управления кроме дифференциальных уравнений широко используются передаточные функции, временные и частотные характеристики. Последние отличаются наглядностью и возможностью экспериментального определения.

Передаточной функцией звена (третья форма записи дифференциальных уравнений) по какому-либо внешнему воздействию называется отношение преобразования Лапласа выходной величины звена к преобразованию Лапласа рассматриваемого внешнего воздействия при нулевых начальных условиях. Изображения часто используемых функций времени даны в таблице преобразований Лапласа в Приложении.

Следовательно, для звена с одной выходной величиной число передаточных функций равно числу внешних воздействий:

$$W(S) = \frac{Y(S)}{G(S)} \text{ — по входной величине (задающему воздействию);}$$

$$W(S) = \frac{Y(S)}{F(S)} \text{ — по возмущению (в общем случае возмущений мо-}$$

жет быть несколько и для их учета в линейных САУ используют принцип суперпозиции). В этих выражениях S - комплексная переменная.

Изображения приведенных функций по Лапласу представляются в виде:

$$Y(S) = L\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t)e^{-St} dt \quad (1.1)$$

$$G(S) = L\{g(t)\} = \int_0^{\infty} g(t)e^{-St} dt \quad (1.2)$$

$$F(S) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-St} dt \quad (1.3)$$

Для того чтобы пояснить эти записи, приведем некоторые сведения из операционного исчисления.

В основу операционного исчисления положен метод, примененный О. Хевисайдом к решению задач электротехники, когда рассматривается любая вещественная или комплексная функция $f(t)$ действительного переменного t , которая при $t < 0$ равна нулю, а при $t > 0$ возрастает не быстрее показательной функции $\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{e^{\alpha t}} = 0 \right)$.

С помощью этой функции $f(t)$ и измененного интеграла Лапласа мож-

но всегда сконструировать новую функцию $F(S)$ (см. выражение 1.3), где $S = \alpha + j\omega$ — комплексное число.

В теории автоматического управления часто применяют изображения Лапласа. Практическая ценность их использования в операционном исчислении состоит в том, что дифференцированию и интегрированию оригиналов ставится в соответствие операции умножения и деления их изображений на S .

Передаточная функция динамического звена может быть легко получена из записи дифференциального уравнения в символической форме, для чего формально надо разделить многочлен (множитель) символической формы записи правой части на многочлен символической формы левой части.

$$W(S) = \frac{k_2 \cdot k_1}{T_1^2 S^2 + T_2 S + 1} = \frac{Y(S)}{G(S)} \text{ - по задающему воздействию;}$$

$$W(S) = \frac{k_3}{T_1^2 S^2 + T_2 S + 1} = \frac{Y(S)}{F(S)} \text{ - по внешнему возмущению.}$$

Многочлен, фигурирующий в знаменателе передаточной функции звена, называется *характеристическим полиномом* этого звена, а уравнением $D(S) = 0$ — *характеристическим уравнением звена*.

Пример № 1. Определить сигнал на выходе динамического звена САУ, если сигнал, поступающий на вход: $x(t) = 1(t)$.

Передаточная функция: $W(S) = \frac{k}{T^2 S^2 + 2\xi TS + 1}$.

Решение

Преобразованный по Лапласу входной сигнал имеет вид: $X(S) = \frac{1}{S}$.

Тогда, изображение сигнала на выходе динамического звена будет:

$$Y(S) = X(S) \cdot W(S); \quad Y(S) = \frac{k}{S(T^2 S^2 + 2\xi TS + 1)}$$

Определим сигнал во временном диапазоне по таблице преобразований Лапласа (см. Приложение поз. 34) через обратное преобразование Лапласа:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{S(T^2 S^2 + 2\xi TS + 1)} \right\} = 1 + C e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \Theta).$$

Параметры сигнала на выходе звена:

$$\gamma = \frac{\xi}{T}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}; \quad \Theta = \arctg \frac{\lambda}{\gamma}; \quad C = -\frac{1}{\lambda T}.$$

В результате окончательно сигнал на выходе звена:

$$y(t) = k \left[1 - \frac{1}{\lambda T} e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \Theta) \right].$$

Пример № 2. Определить сигнал на выходе того же динамического звена, если сигнал поступающий на вход: $x(t) = \delta(t)$.

Решение

Преобразованный по Лапласу входной сигнал имеет вид: $X(S) = 1$, следовательно на выходе колебательного звена во временном диапазоне (Приложение табл. поз. 32) имеем сигнал в виде функции:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{T^2 S^2 + 2\xi TS + 1} \right\} = C e^{-\gamma t} \sin \lambda t.$$

Параметры сигнала:

$$\gamma = \frac{\xi}{T}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}; \quad C = \frac{1}{\lambda T^2}.$$

В результате сигнал на выходе звена:

$$y(t) = \frac{1}{\lambda T^2} e^{-\gamma t} \sin \lambda t.$$

Пример № 3. Определить вид сигнала на выходе динамического звена САР, если сигнал, поступающий на вход звена: $x(t) = A \sin \omega t$.

Передаточная функция динамического звена: $W(S) = \frac{k_1}{T_1 S + 1}$.

Решение

Преобразованный по Лапласу входной сигнал:

$$X(S) = A \frac{\omega / \omega^2}{\frac{1}{\omega^2} S^2 + \frac{\omega^2}{\omega^2}} = \frac{A}{\omega} \cdot \frac{1}{T^2 S^2 + 1} = \frac{k}{T^2 S^2 + 1}.$$

Изображение сигнала на выходе динамического звена определяется как:

$$Y(S) = X(S) \cdot W(S); \quad Y(S) = \frac{k}{T^2 S^2 + 1} \cdot \frac{k_1}{T_1 S + 1} = k_{\Sigma} \frac{1}{(T^2 S^2 + 1)(T_1 S + 1)}; \quad k_{\Sigma} = \frac{k_1 A}{\omega}.$$

Определим сигнал во временном диапазоне (оригинал функции) по табл. (см. Приложение) через обратное преобразование Лапласа:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(T^2 S^2 + 1)(T_1 S + 1)} \right\} = C \sin(\alpha t - \Theta) + C_1 e^{-\alpha_1 t}.$$

Параметры сигнала на выходе звена:

$$\alpha = \frac{1}{T} = \omega; \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}; \quad \Theta = \text{arctg} \frac{T_1}{T}; \quad C_1 = \frac{T_1}{T^2 + T_1^2}; \quad C = \frac{1}{\sqrt{T^2 + T_1^2}}.$$

В результате сигнал на выходе звена:

$$y(t) = \frac{k_1 A}{\omega} \left[\frac{1}{\sqrt{T^2 + T_1^2}} \sin(\omega t - \Theta) + \frac{T_1}{T^2 + T_1^2} e^{-\alpha_1 t} \right].$$

2. ТИПОВЫЕ ВНЕШНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ В СИСТЕМЕ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Поведение любого звена САУ и собственно системы автоматического управления как в статике, так и в динамике зависит от изменения во времени внешних воздействий, законы изменения которых, как правило, заранее неизвестны. Поэтому при исследовании элементов и систем используют так называемые типовые законы изменения внешних воздействий.

Единичная ступенчатая функция. В качестве типовых внешних воздействий принимают так называемые полиномиальные воздействия:

$$\text{задающие } g(t) = \frac{g_n}{n!} t^n \cdot 1(t), \quad (2.1)$$

$$\text{возмущающие } f(t) = \frac{f_n}{n!} t^n \cdot 1(t), \quad (2.2)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ натуральное число; g_n, f_n — постоянные задающая и возмущающая величины.

При $n = 0$ выражения (2.1) и (2.2) определяют ступенчатые типовые воздействия

$$g(t) = g_0 \cdot 1(t), \quad f(t) = f_0 \cdot 1(t).$$

Внешнему воздействию (например, возмущающему) соответствует $f(t) = f_0 \cdot 1(t)$ скачкообразное увеличение или уменьшение нагрузки в САУ скорости вращения вала двигателя, мгновенное подключение или отключение группы потребителей энергии в САУ напряжения генератора и т. д.

В выражениях (2.1) и (2.2) функция $1(t)$ представляет единичную ступенчатую функцию

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0 \\ 1 & \text{при } t > 0 \end{cases}. \quad (2.3)$$

Эта функция может быть в виде единичного мгновенного скачка (рис. 2.1а). Например, воздействию $g(t) = 1(t)$ соответствует процесс перенастройки системы стабилизации на новое значение регулируемой величины.

Единичный импульс бывает 1-го (рис. 2.1б) и 2-го (рис. 2.1в) рода, т.е. это скачкообразные функции с длительностью скачка τ , стремящиеся к нулю, представляющие первую или, соответственно, вторую производные от единичного скачка.

Аналитически импульсы представляются в виде $g(t) = 1'(t)$ — первого рода и $g(t) = 1''(t)$ — второго рода.

При $n = 1$ типовые воздействия изменяются с постоянной скоростью, то есть:

$$g(t) = g_1 \cdot t \cdot 1(t), \quad f(t) = f_1 \cdot t \cdot 1(t),$$

где g_1 и f_1 — постоянные значения. Графическое представление этих функций показано на рис. 2.1а.

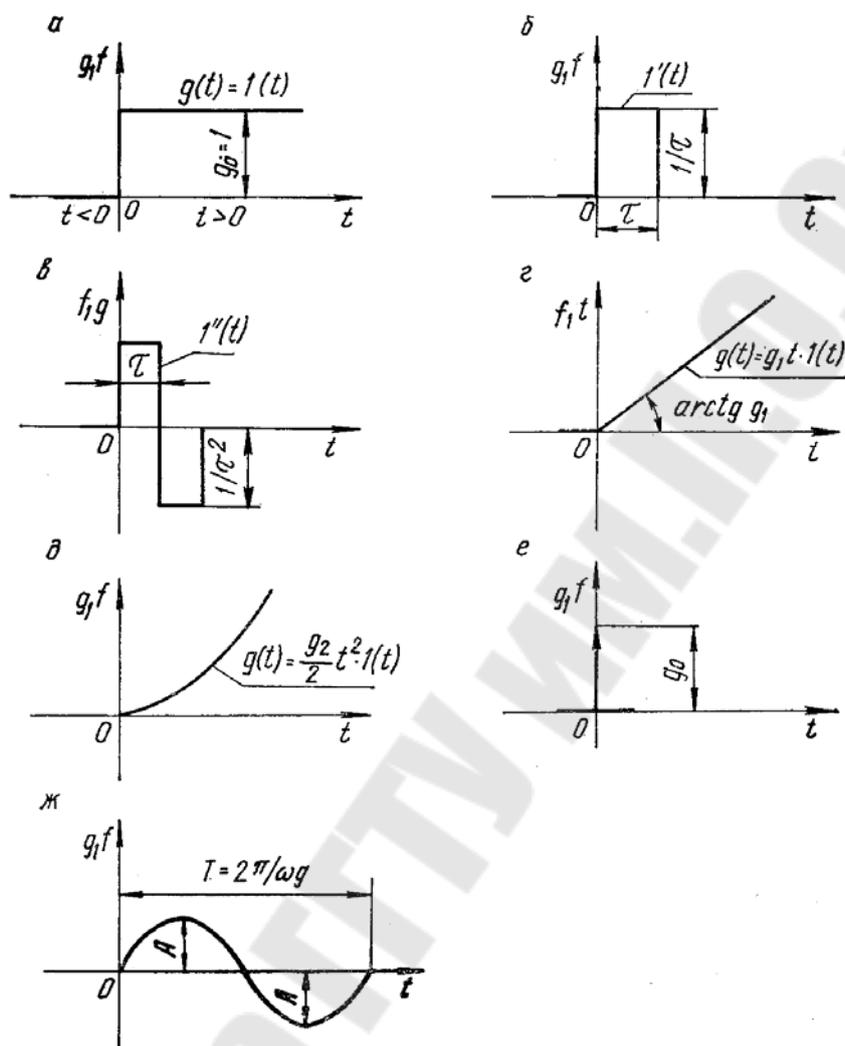


Рис. 2.1. Типовые внешние воздействия в САУ.

При $n = 2$ типовые воздействия изменяются с постоянным ускорением. Их аналитическое и графическое изображение представлено на рис. 2.1 д.

$$g(t) = \frac{g_2}{2} t^2 \cdot 1(t); \quad f(t) = \frac{f_2}{2} t^2 \cdot 1(t).$$

Единичная дельта-функция используется также в качестве типового внешнего воздействия (рис. 2.1е). Аналитическое выражение этой функции

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0 \\ \infty & \text{при } t = 0. \end{cases}$$

Воздействие с помощью дельта-функции представляется как

$$g(t) = g_0 \cdot \delta(t), \quad f(t) = f_0 \cdot \delta(t).$$

Дельта-функция обладает тем свойством, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1,$$

то есть дельта-функция представляет математическую идеализацию импульса бесконечно малой длительности, имеющего конечную площадь, равную единице, и относится к числу функций специального класса, называемых *обобщенными*.

Моделирование внешних воздействий при помощи дельта-функции хорошо имитирует работу САУ, функционирующих в условиях внешних импульсных возмущений.

Гармонические воздействия. Кроме полиномиальных воздействий весьма часто, особенно при частотных методах анализа и синтеза систем, применяются гармонические воздействия (рис. 2.1ж)

$$g(t) = A \sin \omega_g t, \quad f(t) = A \sin \omega_f t,$$

где A —амплитуда гармонического сигнала, ω_g, ω_f —круговые частоты гармонических сигналов. Эти воздействия хорошо отвечают реальным условиям работы систем в условиях качки, вибраций и т. п.

Пример № 4. Получить графический вид характерных для с/х машин внешних воздействий, заданных в аналитическом виде. Для построения используется универсальный пакет инженерных расчетов MathCAD.

Диапазон изменения внешних воздействий
 $t = 0.0, 0.01 \dots 12 \text{ с.}$

Аналитическая форма внешних воздействий

$$g(t) = e^{-\alpha t} \quad g_1(t) = 1 - e^{-\alpha t} \quad \alpha = 0.75$$

$$G(t) = t \cdot e^{-\alpha t} \quad G_1(t) = t^2 \cdot e^{-\alpha t}$$

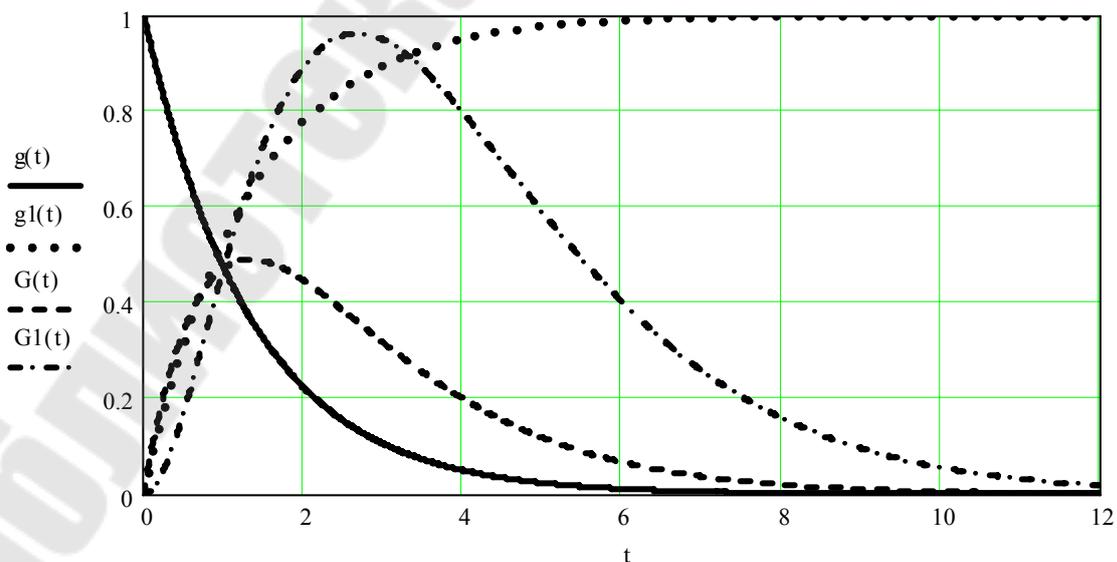


Рис. 2.2. Графический вид внешних воздействий

Диапазон изменения внешних воздействий

$t = 0.0, 0.01 \dots 6$ с.

Аналитическая форма внешних воздействий

$$\omega = 4; \quad g(t) = e^{-\alpha t} \cdot \sin \omega t; \quad g1(t) = e^{-\alpha t} \cdot \cos \omega t.$$

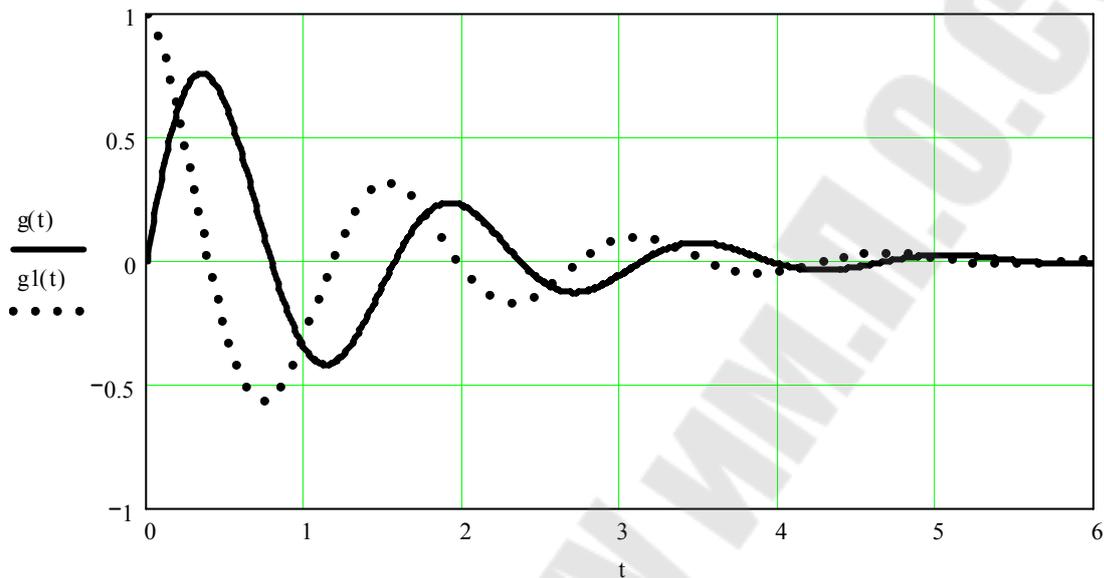


Рис. 2.3. Графический вид внешних воздействий

Диапазон изменения внешних воздействий

$t = 0.0, 0.01 \dots 12$ с.

Аналитическая форма внешних воздействий

$$g(t) = t \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin \omega t; \quad g1(t) = t \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos \omega t.$$

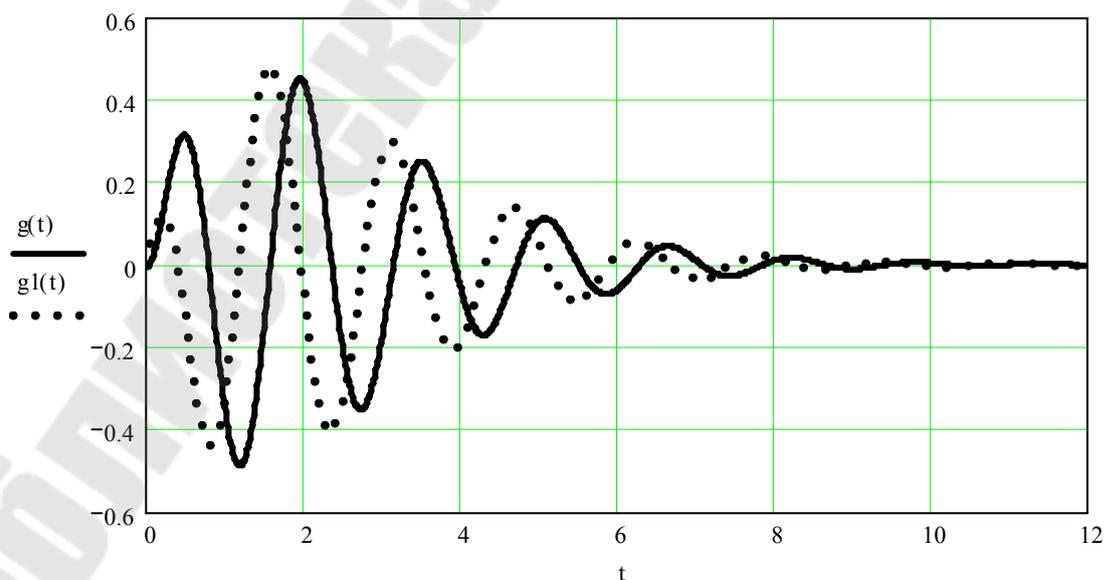


Рис. 2.4. Графический вид внешних воздействий

3. ПОЛУЧЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ЗВЕНА СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ПО ЕГО ПЕРЕХОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ

Известно, что математическое описание (составление уравнений движения) объектов регулирования, прежде всего технологических процессов и исполнительных элементов САР иногда представляет собой достаточно сложную задачу или возможно лишь с существенными допущениями, т. е. весьма приближенно. В этих случаях оказывается целесообразным получать математическое описание элемента в виде его ПФ на основании экспериментальных данных. Чаще всего экспериментально определяют переходную характеристику (ПХ) элемента (иногда ее называют кривой разгона) и по ней составляют ПФ. Естественно, что неизбежны погрешности, как при снятии экспериментальной характеристики, так и при ее аппроксимации передаточной функцией. Однако обычно погрешности оказываются допустимыми для инженерных расчетов. Процесс экспериментального исследования объекта регулирования состоит из трех этапов:

1. планирования и подготовки эксперимента;
2. проведения эксперимента;
3. обработки результатов эксперимента, которая заключается в сглаживании полученной ПХ и аппроксимации её ПФ.

Сглаживание экспериментально полученной ПХ оказывается необходимым для устранения разброса результатов отдельных измерений, т. е. приближения их к истинным значениям. Этот разброс создается различными причинами и, прежде всего, помехами, действующими на процесс.

Для сглаживания используют ряд методов, простейшими и наиболее широко применяемыми из которых являются метод скользящего среднего, метод четвертых разностей, метод площадей и интерполяционный метод.

Метод скользящего среднего. Принцип метода заключается в выравнивании экспериментальных данных путем вычисления арифметических значений по небольшому числу l измерений. Число l удобно выбирать четным. При общем числе измерений $n \leq (20 - 30)$ первоначально следует выбрать $l = 2$. Если же сглаживание оказывается недостаточным, то значение l нужно постепенно увеличивать. При $n \geq 100 - 150$ можно выбрать сначала $l \approx \frac{n}{10}$ и затем, при необходимости, постепенно его увеличивать.

После выбора значения l находят среднее от первых $(l + 1)$ значений $h(i)$:

$$h_i\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{l+1} \cdot \sum_{v=0}^l h(v) \quad \text{соответствующее измерению } i = \frac{l}{2}.$$

Затем определяют среднее $h_i\left(\frac{l}{2} + 1\right) = \frac{1}{l+1} \cdot \sum_{v=1}^{l+1} h(v)$,

соответствующее измерению $i = \frac{l}{2} + 1$ и т.д.

Общий вид формулы для усреднения следующий:

$$h_i \left(\frac{l}{2} + j \right) = \frac{1}{l+1} \cdot \sum_{v=j}^{l+j} h(v). \quad (3.1)$$

Основное внимание при использовании метода должно быть обращено на выбор числа l . При слишком малых значениях числа l выравнивание экспериментальных данных может оказаться недостаточным. Однако завышение значения l может привести к искажению характеристики. Следует иметь в виду, что при сглаживании теряются точки с номерами:

$$i = 0, 1, 2, \dots, \frac{l}{2} - 1, \quad n - \frac{l}{2} + 1, \quad n - \frac{l}{2} + 2, \dots, \quad n.$$

Этот последний недостаток можно устранить, если сделать несколько замеров до начала переходного процесса ($i = -m, -m + 1, \dots, -1$) и после его окончания.

Метод четвертых разностей. Сущность метода состоит в том, что по каждым пяти соседним экспериментальным значениям $h(i)$ строят параболу. Значения её точек находят методом наименьших квадратов. Затем делают такую поправку к экспериментальной кривой, чтобы средняя из пяти рассматриваемых точек совпадала с параболой. Первые две точки сглаженной характеристики определяют по формулам:

$$\tilde{h}(1) = h(1) - \frac{1}{5} \cdot B \left(\frac{2}{3} \right) + \frac{1}{12} \cdot A(3) \quad \tilde{h}(2) = h(2) + \frac{2}{5} \cdot B \left(\frac{2}{3} \right) - \frac{1}{7} \cdot A(3) \quad (3.2)$$

Точки до $(n-2)$ -й включительно определяют по общей формуле:

$$\tilde{h}(i) = h(i) - \frac{1}{12} \cdot A(i), \quad i = 3, 4, \dots, n-2 \quad (3.3)$$

и две последние точки определяют по формулам:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(n-1) &= h(n-1) - \frac{2}{5} \cdot B \frac{(n-2)}{(n-1)} - \frac{1}{7} \cdot A(n-2) \\ \tilde{h}(n) &= h(n) + \frac{1}{5} \cdot B \frac{(n-2)}{(n-1)} + \frac{1}{12} \cdot A(n-2). \end{aligned} \quad (3.4)$$

В этих формулах

$$\begin{aligned} A(i) &= h(i-2) - 4h(i-1) + 6h(i) - 4h(i+1) + h(i+2) = \\ &= [h(i-2) + 6h(i) + h(i+2)] - 4[h(i-1) + h(i+1)] \\ \frac{B(i)}{i+1} &= h(i-1) - 3h(i) + 3h(i+1) - h(i+2) = \\ &= [h(i-1) + 3h(i+1)] - [3h(i) + h(i+2)] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Возможно двукратное применение метода. Метод дает особенно хорошие результаты, если сглаживаемая ПХ соответствует решению дифференциального уравнения порядка выше первого.

Аппроксимация ПХ, соответствующей некоторой ПФ может выполняться различными способами, различающимися по структуре аппроксимирующей ПФ и по используемому математическому аппарату. Для оценки аппроксимации можно использовать величину δ :

$$\delta = \max \frac{|h(t_i) - h_a(t_i)|}{h(\infty)} \cdot 100\% \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad (3.6)$$

где $h(t_i)$ и $h_a(t_i)$ - значения ПХ соответственно экспериментальной и вычисленной по аппроксимирующей ПФ; t_i - моменты времени.

Достаточно выбрать $l \leq (3 \dots 6)$. Если $\delta \leq (3 - 5)\%$, то точность аппроксимации считают удовлетворяющей требованиям инженерных расчетов. При использовании ПЭВМ наивысшую точность обеспечивает метод площадей. При ручном счете предполагают, что ПФ имеет в знаменателе полином 1-ой или 2-ой степени, а в числителе - нулевой или первой степени. Прежде всего по экспериментальной ПХ необходимо определить передаточный коэффициент (k) исследуемого устойчивого элемента

$$k = \frac{y(\infty)}{x}, \quad (3.7)$$

где $x = const$ - входная величина; $y(\infty)$ - установившееся значение выходной величины.

Затем по виду ПХ следует выяснить, имеется ли в исследуемом элементе чистое (транспортное запаздывание) и определить время запаздывания (θ). Кроме того, возможно, потребуются нормирование экспериментальной ПХ. Для этого значения всех её ординат нужно разделить на установившееся значение выходной величины.

Метод площадей. При аппроксимации нормированной ПХ передаточной функцией

$$W = \frac{k \cdot (bS + 1) \cdot e^{-\theta S}}{a_0 S^2 + a_1 S + 1} \quad (3.8)$$

расчет после определения k и θ заключается в следующем:

1. По начальному участку характеристики определяют чему равна её производная при $t = 0$. Если производная равна 0, то в ПФ (3.8) $b = 0$.
2. Ось времени характеристики делят на n равных малых промежутков времени Δt , в пределах каждого из которых характеристику $h(t)$ можно считать прямой.
3. Определяют и заносят в таблицу начальное значение $h(0)$ ПХ, её значения $h(i)$ в конце каждого i -го промежутка времени Δt и разности $1 - h(i)$.
4. Вычисляют вспомогательную величину

$$F_1 = \Delta t \left\{ \sum_{i=0}^n [1 - h(i)] - 0.5[1 - h(0)] \right\}. \quad (3.9)$$

5. Подсчитывают и заносят в таблицу значения

$$\lambda(i) = \frac{i \cdot \Delta t}{F_1}; \quad 1 - \lambda(i); \quad [1 - h(i)] \cdot [1 - \lambda(i)]$$

6. Вычисляют вспомогательную величину

$$F_2 = F_1^2 \Delta t \left\{ \sum_{i=0}^n [1 - h(i)] \cdot [1 - \lambda(i)] - 0.5[1 - h(0)] \right\}. \quad (3.10)$$

7. Если $b = 0$, то определяют коэффициенты передаточной функции

$$a_1 = F_1 \quad \text{и} \quad a_0 = F_2.$$

8. Если $b \neq 0$, то подсчитывают и заносят в таблицу значения

$$1 - 2\lambda(i) + \frac{\lambda^2(i)}{2} \quad \text{и} \quad [1 - h(i)] \cdot \left[1 - 2\lambda(i) + \frac{\lambda^2(i)}{2} \right]. \quad (3.11)$$

При этом могут быть использованы данные табл. 1.

9. Вычисляют вспомогательную величину

$$F_3 = F_1^3 \Delta t \left\{ \sum_{i=0}^n [1 - h(i)] \cdot \left[1 - 2\lambda(i) + \frac{\lambda^2(i)}{2} \right] - 0.5[1 - h(0)] \right\}. \quad (3.12)$$

10. Определяют коэффициенты передаточной функции из системы уравнений:

$$b = \frac{F_3}{F_2}; \quad a_1 = F_1 + b; \quad a_0 = F_2 + b \cdot F_1. \quad (3.13)$$

11. По аппроксимирующей передаточной функции определяют переходную характеристику $h_a(t)$ и на основании формулы (3.6) оценивают точность аппроксимации. В случае недостаточной точности расчет повторяют при меньших значениях Δt .

Пример № 5

Установившееся значение кривой разгона объекта регулирования, снятой при $x = 5A$, равно 120°C . Полученная при этом сглаженная и нормированная переходная характеристика объекта регулирования изображена на рис. 3.1 кривой 1. Требуется аппроксимировать эту характеристику передаточной функцией вида (3.8).

Решение

По формуле (3.7) передаточный коэффициент

$$k = 120/5 = 24^\circ\text{C}/A.$$

Из характеристики следует, что объект регулирования имеет чистое запаздывание и время запаздывания $\theta = 1$ с.

Отсчёт времени \tilde{t} начинаем от момента $\tilde{t} = 1$ с и расчёт ведём по ранее изложенной методике. Выберем $\Delta t = 2$ с и определим $h(i)$ и $1 - h(i)$. Результаты занесём в табл. 3.2.

По формуле (3.9) вспомогательная величина

$$F_1 = 2(8.105 - 0.5) = 15.21.$$

Теперь можно подсчитать значения $\lambda(i)$, $1 - \lambda(i)$ и $[1 - h(i)][1 - \lambda(i)]$.

Результаты заносим в табл. 3.2.

По формуле (3.10)

$$F_2 = 15.21^2 \cdot 2(3.224 - 0.5) = 82.55.$$

Если принять, что при $t = 0$ производная переходной характеристики равна нулю, то $b = 0$ и по формулам (3.13)

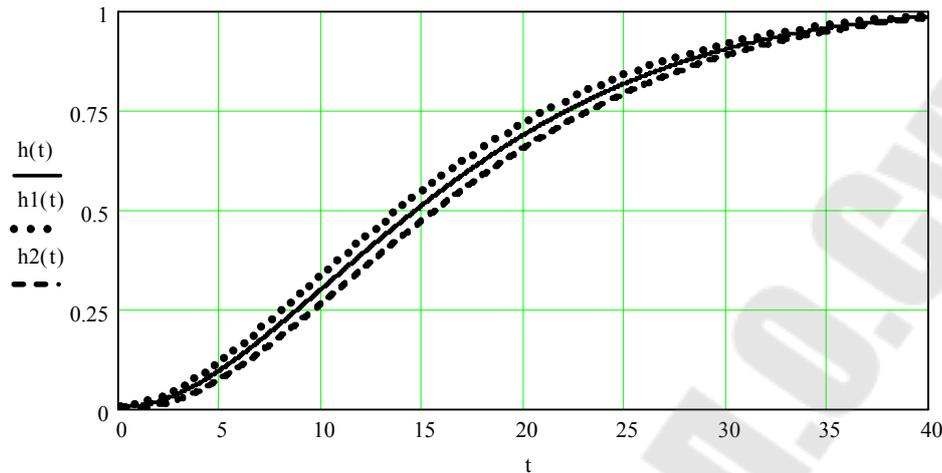


Рис. 3.1. Переходные характеристики:

$h(t)$ - экспериментальная; $h1(t)$, $h2(t)$ - вычисленные по аппроксимирующим формулам $a_1 = 15.21$ и $a_0 = 82.55$.

Следовательно, значащая часть нормированной переходной характеристики аппроксимируется передаточной функцией

$$W = \frac{1}{82.55s^2 + 15.21s + 1} = \frac{1}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1},$$

где $T = 9.08$ с и $\xi = 0.838$.

Пользуясь формулами из Приложения, таблица преобразований Лапласа поз. 34, составим аналитическое выражение значащей части нормированной характеристики:

$$h_a(\tilde{t}) = 1 - 1.90e^{-0.092t} \sin(0.058t + 0.562)$$

Несколько значений характеристики $h_a(\tilde{t})$, вычисленных по этому выражению, занесены в табл. 3.3, и характеристика изображена на рис. 3.1 кривой $h1(t)$. По формуле (3.6) точность аппроксимации $\delta = 4.4\%$.

Предположим, что производная переходной характеристики при $t = 0$ не равна нулю, и продолжим расчёт, занося его результаты в табл. 3.2. Затем, пользуясь формулами (3.12) и (3.13), определим

$$F_3 = 15.21^3 \cdot 2(0.713 - 0.5) = 98.18; \quad b = \frac{-98.18}{82.55} = -1.19;$$

$$a_1 = 15.21 - 1.19 = 14.02; \quad a_0 = 82.55 - 1.19 \cdot 15.21 = 64.45.$$

Следовательно, значащая часть нормированной ПХ аппроксимируется неминимально-фазовой передаточной функцией

$$W(s) = \frac{-1.19s + 1}{64.45s^2 + 14.02s + 1} = \frac{\tau s + 1}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1},$$

где $\tau = -1.19$ с; $T = 8.03$ с и $\xi = 0.873$. По формулам табл. поз. 35

$$h_a(\tilde{t}) = 1 - 2.31e^{-0.109t} \sin(0.061t + 0.447).$$

Значения $h_a(\tilde{t})$, вычисленные по этому выражению, занесены в табл. 3.3, и характеристика изображена на рис. 3.1 кривой $h_2(t)$. Точность аппроксимации $\delta = 4\%$.

Следует выбрать вторую аппроксимирующую передаточную функцию, так как она даёт несколько большую точность на конечном участке характеристики.

Таблица № 3.1

Значения подынтегральных функций

λ	$1 - 2\lambda + \frac{\lambda^2}{2}$						
0,02	0,960	0,68	-0,129	1,34	-0,782	2,00	-1,000
0,04	0,921	0,70	-0,155	1,36	-0,795	2,02	-1,000
0,06	0,882	0,72	-0,181	1,38	-0,808	2,04	-0,999
0,08	0,843	0,74	-0,206	1,40	-0,820	2,06	-0,998
0,10	0,805	0,76	-0,231	1,42	-0,832	2,08	-0,997
0,12	0,767	0,78	-0,256	1,44	-0,843	2,10	-0,995
0,14	0,730	0,80	-0,280	1,46	-0,854	2,12	-0,993
0,16	0,693	0,82	-0,304	1,48	-0,865	2,14	-0,990
0,18	0,656	0,84	-0,327	1,50	-0,875	2,16	-0,987
0,20	0,620	0,86	-0,350	1,52	-0,885	2,18	-0,984
0,22	0,584	0,88	-0,373	1,54	-0,894	2,20	-0,980
0,24	0,549	0,90	-0,395	1,56	-0,903	2,22	-0,976
0,26	0,514	0,92	-0,417	1,58	-0,912	2,24	-0,971
0,28	0,479	0,94	-0,438	1,60	-0,920	2,26	-0,966
0,30	0,445	0,96	-0,459	1,62	-0,928	2,28	-0,961
0,32	0,411	0,98	-0,480	1,64	-0,935	2,30	-0,955
0,34	0,378	1,00	-0,500	1,66	-0,942	2,32	-0,949
0,36	0,345	1,02	-0,520	1,68	-0,949	2,34	-0,942
0,38	0,312	1,04	-0,539	1,70	-0,955	2,36	-0,935
0,40	0,280	1,06	-0,558	1,72	-0,961	2,38	-0,928
0,42	0,248	1,08	-0,577	1,74	-0,966	2,40	-0,920
0,44	0,217	1,10	-0,595	1,76	-0,971	2,42	-0,912
0,46	0,186	1,12	-0,613	1,78	-0,976	2,44	-0,903
0,48	0,152	1,14	-0,630	1,80	-0,980	2,46	-0,894
0,50	0,125	1,16	-0,647	1,82	-0,984	2,48	-0,885
0,52	0,095	1,18	-0,664	1,84	-0,987	2,50	-0,875
0,54	0,066	1,20	-0,680	1,86	-0,990	2,52	-0,865
0,56	0,037	1,22	-0,696	1,88	-0,993	2,54	-0,854
0,58	0,008	1,24	-0,711	1,90	-0,995	2,56	-0,843
0,60	-0,020	1,26	-0,726	1,92	-0,997	2,58	-0,832
0,62	-0,048	1,28	-0,741	1,94	-0,998	2,60	-0,820
0,64	-0,075	1,30	-0,755	1,96	-0,999		
0,66	-0,102	1,32	-0,769	1,98	-1,000		

Таблица № 3.2

Аппроксимация переходной характеристики методом площадей

\tilde{t}	$h(i)$	$\lambda(i)$	$[1 - h(i)] \cdot [1 - \lambda(i)]$	$[1 - h(i)] \cdot \left[1 - 2\lambda(i) + \frac{\lambda^2(i)}{2}\right]$
0	0	0	1,000	1,000
2	0,030	0,131	0,843	0,690
4	0,080	0,263	0,678	0,489
G	0,145	0,394	0,518	0,239
8	0,215	0,526	0,372	0,040
10	0,300	0,657	0,240	-0,062
12	0,385	0,788	0,130	-0,172
14	0,480	0,920	0,042	-0,205
16	0,565	1,051	-0,022	-0,239
18	0,640	1,183	-0,066	-0,245
20	0,710	1,314	-0,091	-0,219
22	0,780	1,445	-0,098	-0,187
24	0,840	1,577	-0,092	-0,147
26	0,880	1,708	-0,085	-0,115
28	0,920	1,840	-0,067	-0,079
30	0,955	1,971	-0,044	-0,045
32	0,980	2,102	-0,022	-0,020
34	0,990	2,234	-0,012	-0,010
36	1,000	2,365	0	0

Таблица № 3.3

Оценка точности аппроксимации переходной характеристики

\tilde{t}, c	$h(\tilde{t})$	При $b = 0$		При $b \neq 0$	
		$h_a(\tilde{t})$	$h(\tilde{t}) - h_a(\tilde{t})$	$h_a(\tilde{t})$	$h(\tilde{t}) - h_a(\tilde{t})$
0	0	0,012		0,002	
5	0,115	0,098	0,017	0,085	0,030
10	0,300	0,312	—	0,324	—
15	0,520	0,526	-0,006	0,560	-0,040
20	0,710	0,702	-0,008	0,740	-0,030
25	0,860	0,828	0,032	0,859	0,001
30	0,955	0,911	0,044	0,933	0,022
35	0,998	0,960	0,038	0,973	0,025

Интерполяционный метод. Этот метод позволяет определять по нормированной переходной характеристике устойчивого звена (элемента) постоянные времени T_1 и T_2 передаточной функции

$$W = \frac{k \cdot e^{-\delta s}}{(T_1 S + 1) \cdot (T_2 S + 1)}. \quad (3.14)$$

Сначала по рассматриваемой характеристике находят время, при котором ордината $h(t_7) = 0.7$. Затем вычисляют время $t_4 = 1/3t_7$, находят зна-

чение переходной характеристики $h(t_4) = h_4$ и по номограмме (рис. 3.2) определяют величины z^2 , h_8 и h_{20} , соответствующие найденному значению h_4 . Затем определяются постоянные времени по формулам:

$$T_1 = \frac{t_7}{2.4}(1+z) \quad \text{и} \quad T_2 = \frac{t_7}{2.4}(1-z). \quad (3.18)$$

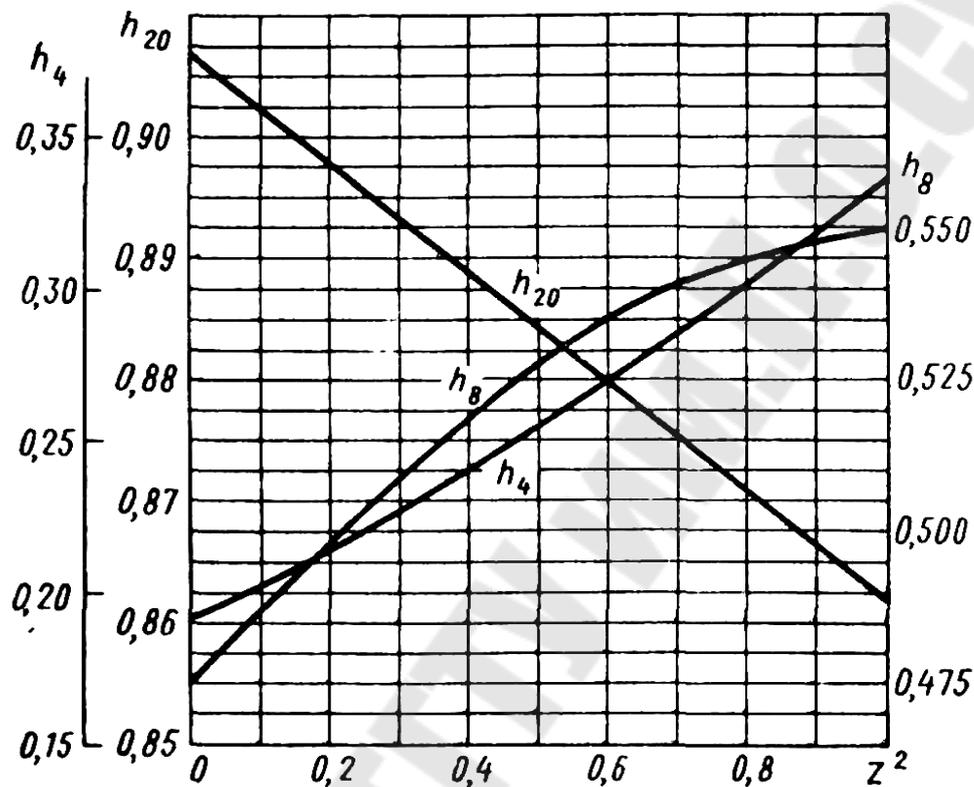


Рис. 3.2. Номограмма интерполяционного метода аппроксимации переходных характеристик

Величины h_8 и h_{20} используют для проверки аппроксимации путем их сравнения с ординатами переходной характеристики соответственно при $t_8 = 2t_4$ и $t_{20} = 5t_4$. Допустимая погрешность не должна превышать 3–6%. Может оказаться, что h_4 меньше того минимального значения, которое имеется на номограмме рис.3.2. Это означает, что рассматриваемая переходная характеристика не может быть аппроксимирована передаточной функцией (3.14). Тогда следует обратиться к другому методу, например, к методу площадей.

4. АНАЛИЗ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

На каждом практическом занятии решаются примеры из области анализа систем автоматического управления (САУ). Разбор заданий сопровождается сообщением необходимого минимума теоретических сведений. Индивидуальные задания выдаются преподавателем, ведущим практические занятия по курсу “Теория автоматических систем тракторов и специальных машин”. Рассмотрим состав и примеры типовых заданий.

1. Описание структурной схемы САУ.
2. Определение передаточных функций системы по задающему и возмущающему воздействиям, а также для ошибок по этим воздействиям.
3. Анализ устойчивости САУ по критериям Найквиста, Гурвица, Михайлова. Определение запасов устойчивости.
4. Оценка качества управления (регулирования) по переходным характеристикам.

Ниже приведены структурная схема линейной непрерывной САУ и математические модели её элементов

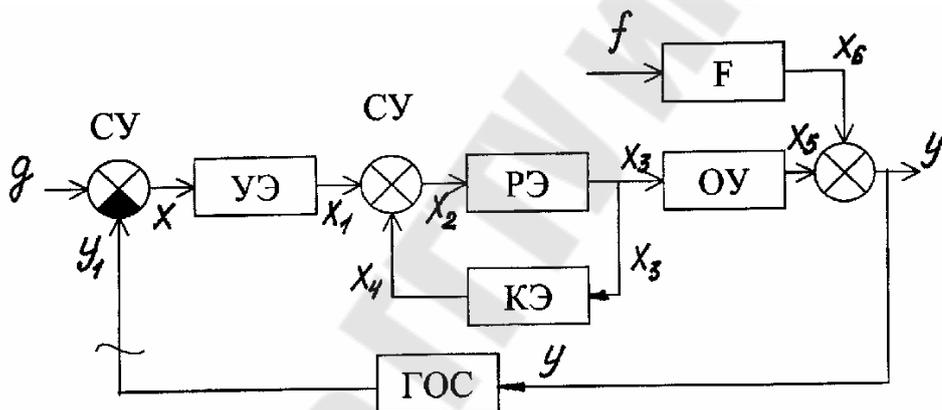


Рис. 4.1. Структурная схема САУ

Уравнения описывающие элементы САУ

Усилительный элемент	$X_1 = 2X$
Регулирующий элемент	$pX_3 + 2X_3 = X_2$
Корректирующий элемент	$pX_4 + X_4 = 2pX_3$
Объект управления	$2p^2X_5 + 2pX_5 + X_5 = 2X_3$
Главная обратная связь	$2Y_1 = Y$
Внешнее воздействие (F)	$pX_6 + 4X_6 = 0.5pF$

Примечание. Здесь p – оператор дифференцирования. Понятия САУ и САР (система автоматического регулирования) близки по содержанию, понятие САУ несколько шире, поскольку шире термин “управление”.

4.1. Формирование структурной схемы системы автоматического управления

Структурной схемой называется наглядное графическое изображение математической модели (аналог математического описания) системы.

При математическом описании САУ разбивают на отдельные звенья направленного действия, передающие воздействия только в одном направлении - со входа звена на его выход.

На структурной схеме каждое звено изображается прямоугольником, внутри которого записывается математическое описание звена. Связи между звеньями структурной схемы изображаются линиями со стрелками, соответствующими направлению прохождения сигналов. Над линиями ставятся обозначения сигналов.

Элементы, осуществляющие сложение и вычитание сигналов на структурной схеме, изображают в виде окружностей. Над стрелкой проставляется знак сигнала. Иногда окружность разбивают на сектора. Тогда сектор, к которому подходит вычитаемый сигнал, затушевывается.

Математическое описание звеньев составляют на основании законов той области знаний, к которой относится рассматриваемое звено. Если звено описывается линейным дифференциальным уравнением, то его называют линейным. Если звено описывается нелинейным уравнением, то его называют нелинейным. Системы, которые содержат только линейные звенья, являются линейными. Если система содержит хотя бы одно нелинейное звено, то она является нелинейной. Линейное описание звеньев и систем является приближенным и описывает их поведение в отклонениях от установившегося режима.

Пример № 6

По уравнениям описывающим элементы САУ, определяем передаточные функции звеньев САУ:

$$W_{\text{ус}}(S) = \frac{X_1(S)}{X(S)} = 2$$

$$W_{\text{пр}}(S) = \frac{X_3(S)}{X_2(S)} = \frac{1}{S + 2}$$

$$W_{\text{оу}}(S) = \frac{X_5(S)}{X_3(S)} = \frac{2}{2S^2 + 2S + 1}$$

$$W_{\text{кз}}(S) = \frac{X_4(S)}{X_3(S)} = \frac{2S}{S + 1}$$

$$W_{\text{гос}}(S) = \frac{Y_1(S)}{Y(S)} = \frac{1}{2}$$

$$W_f(S) = \frac{X_6(S)}{F(S)} = \frac{0.5S}{S + 4}$$

Изображаем структурную схему САУ.

4.2. Определение передаточных функций системы по задающему и возмущающему воздействиям, а также для ошибки регулирования

Передаточная функция замкнутой САР по задающему воздействию определяет связь между изменением регулируемой величины $Y(S)$ и изменением задающего воздействия $G(S)$:

$$W_{зв}(S) = \frac{Y(S)}{G(S)} = \frac{W_{\Pi}(S)}{1 \pm W_p(S)} = \frac{W_{\Pi}(S)}{1 \pm W_{\Pi}(S) \cdot W_{oc}(S)},$$

где $W_{\Pi}(S)$ - передаточная функция прямой цепи системы; $W_p(S)$ - передаточная функция разомкнутой системы; $W_{oc}(S)$ - передаточная функция обратной связи системы.

Обычно мысленно размыкают главную обратную связь перед сравнивающим устройством. На рис. 4.1 место размыкания показано волнистой чертой. Перед определением передаточных функций систему необходимо привести к одноконтурной, избавившись от перекрестных связей и заменив звенья, охваченные местными обратными связями и соединенные параллельно, на эквивалентные.

Предварительно заменим звено, охваченное местной обратной связью (рис.4.1), одним эквивалентным звеном. Передаточная функция звена или цепи, последовательно соединенных звеньев, охваченных обратной связью, определяется по формуле

$$W_{\ominus}(S) = \frac{W_{\Pi}(S)}{1 \pm W_p(S)} = \frac{W_{\Pi}(S)}{1 \pm W_{\Pi}(S) \cdot W_{oc}(S)},$$

знак «+» в знаменателе соответствует отрицательной обратной связи; знак «-» - соответствует положительной обратной связи.

Пример № 7. В соответствии со схемой изображенной на рис. 4.1 имеем:

$$W_{\ominus}(S) = \frac{1}{\frac{S+2}{1 - \frac{1}{S+2} \cdot \frac{2S}{S+1}}} = \frac{S+1}{S^2 + S + 2}.$$

Передаточную функцию прямой цепи $W_{\Pi}(S)$ системы найдём из произведения ПФ в прямой цепи:

$$\begin{aligned} W_{\Pi}(S) &= W_{вз}(S) \cdot W_{\ominus}(S) \cdot W_{вы}(S) = 2 \cdot \frac{S+1}{S^2 + S + 2} \cdot \frac{2}{2S^2 + 2S + 1} = \\ &= \frac{4S + 4}{2S^4 + 4S^3 + 7S^2 + 5S + 2}. \end{aligned}$$

Передаточную функцию разомкнутой системы $W_p(S)$ определим как произведение ПФ элементов, входящих в разомкнутую цепь:

$$W_p(S) = W_{II}(S) \cdot W_{ГОС}(S) = \frac{4S + 4}{2S^4 + 4S^3 + 7S^2 + 5S + 2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{2S + 2}{2S^4 + 4S^3 + 7S^2 + 5S + 2}.$$

Для рассматриваемого примера передаточная функция замкнутой САУ по задающему воздействию $G(S)$ имеет вид:

$$W_G(S) = \frac{Y(S)}{G(S)} = \frac{W_{II}(S)}{1 \pm W_p(S)} = \frac{\frac{4S + 4}{2S^4 + 4S^3 + 7S^2 + 5S + 2}}{1 + \frac{2S + 2}{2S^4 + 4S^3 + 7S^2 + 5S + 2}} =$$

$$= \frac{4S + 4}{1 + \frac{2S + 2}{2S^4 + 4S^3 + 7S^2 + 5S + 2}} = \frac{4S + 4}{2S^4 + 4S^3 + 7S^2 + 7S + 4}.$$

Передаточная функция замкнутой САУ по возмущающему воздействию определяет связь между изменением регулируемой величиной $Y(S)$ и изменением возмущающего воздействия $F(S)$:

$$W_F(S) = \frac{Y(S)}{F(S)} = \frac{W_F(S)}{1 + W_p(S)} = \frac{\frac{0,5S}{S + 4}}{1 + \frac{2S + 2}{2S^4 + 4S^3 + 7S^2 + 5S + 2}} =$$

$$= \frac{S^5 + 2S^4 + 3,5S^3 + 2,5S^2 + S}{2S^5 + 12S^4 + 23S^3 + 35S^2 + 32S + 16}.$$

где $W_F(S)$ - передаточная функция цепи звеньев от места приложения возмущающего воздействия до регулируемой величины.

Передаточная функция САУ для ошибки по задающему воздействию определяет связь между изменением сигнала ошибки $E(S)$ и изменением задающего воздействия $G(S)$:

$$W_{GE}(S) = \frac{E(S)}{Y(S)} = \frac{1}{1 + W_p(S)} = \frac{1}{1 + \frac{2S + 2}{2S^4 + 4S^3 + 7S^2 + 5S + 2}} =$$

$$= \frac{2S^4 + 4S^3 + 7S^2 + 5S + 2}{2S^4 + 4S^3 + 7S^2 + 7S + 4}.$$

Передаточная функция САУ для ошибки по возмущающему воздействию определяет взаимосвязь между изменением сигнала ошибки $E(S)$ и изменением возмущающего воздействия F :

$$W_{FE}(S) = \frac{E_F(S)}{F(S)} = \frac{W_F(S)}{1 + W_P(S)} = -W_F(S).$$

$$W_{FE}(S) = -\frac{S^5 + 2S^4 + 3.5S^3 + 2.5S^2 + S}{2S^5 + 12S^4 + 23S^3 + 35S^2 + 32S + 16}.$$

Примечание. Для системы без местной обратной связи приводить систему к одноконтурной нет необходимости, поскольку она уже является одноконтурной.

4.3 Анализ устойчивости систем автоматического регулирования

Устойчивость - это свойство САУ возвращаться в исходный или близкий к нему установившийся режим после снятия воздействия, вызвавшего выход из установившегося режима.

Выходная величина устойчивой системы остается ограниченной в условиях действия на систему ограниченных по величине воздействий.

Неустойчивая система является неработоспособной, поэтому проверка устойчивости является обязательным этапом анализа системы.

Условием устойчивости линейной системы является отрицательность действительной части корней характеристического уравнения системы. При нулевых корнях система находится на границе устойчивости. Поскольку решение уравнений высокого порядка сопряжено с определенными трудностями, то анализ устойчивости линейных систем проводится по алгебраическим и частотным критериям. Наиболее часто на практике используют алгебраический критерий Гурвица, а также частотные критерии Михайлова и Найквиста.

4.3.1. Анализ устойчивости систем автоматического регулирования по критерию Гурвица

Передаточная функция разомкнутой САУ в общем случае имеет вид:

$$W(S) = \frac{b_0 S^{m-1} + \dots + b_{m-1} S + b_m}{a_0 S^n + a_1 S^{n-1} + \dots + a_{n-1} S + a_n} = \frac{R(S)}{Q(S)}.$$

Полином $D(S) = R(S) + Q(S)$, представляющий сумму числителя и знаменателя ПФ, называется характеристическим полиномом системы, определяющим характер свободного движения системы. Уравнение $D(S) = 0$ называется характеристическим уравнением системы.

По критерию Гурвица устойчивость САУ проверяется следующим образом. Из коэффициентов характеристического уравнения

$$a_0 S^n + a_1 S^{n-1} + \dots + a_{n-1} S + a_n = 0$$

составляется определитель Гурвица, формируемый следующим образом. По главной диагонали матрицы последовательно записываются n коэффициентов характеристического уравнения, начиная с a_1 . Сверху от элементов главной диагонали в каждом столбце записываются коэффициенты характеристического уравнения с последовательно возрастающими, а снизу с последовательно убывающими индексами. На месте коэффициентов с индексами большими n или меньшими 0 записываются нули. Полученный определитель содержит n строк и n столбцов:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_n & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Далее составляются диагональные миноры определителя Гурвица:

$$\Delta_1 = a_1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \text{ и т.д.}$$

Критерий Гурвица формулируется следующим образом.

Для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы при $a_0 > 0$ все диагональные миноры определителя Гурвица были положительными.

Таким образом, характеристических уравнений первой и второй степеней условия устойчивости сводятся к требованию положительности всех коэффициентов. Для уравнений третьей и четвертой степеней, помимо положительности всех коэффициентов характеристического уравнения, необходима положительность определителя Δ_{n-1} .

$$a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_3 > 0.$$

Например, условие устойчивости, для систем с характеристическим уравнением третьего порядка имеет вид:

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_3 a_0.$$

Условия устойчивости для систем с характеристическим уравнением четвертого порядка:

$$a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_3 > 0; \quad a_4 > 0;$$

$$\Delta_3 = a_3(a_1a_2 - a_3a_0) - a_4a_1^2.$$

Пример № 8. Определим устойчивость САР для нашего случая. Для этого можно воспользоваться любой из полученных ранее передаточных функций системы, из которых следует, что характеристическое уравнение системы:

$$D(S) = R(S) + Q(S) = 2S^4 + 4S^3 + 7S^2 + 7S + 4 = 0.$$

Для анализа устойчивости воспользуемся основными условиями устойчивости. Так как $a_0 = 2 > 0$, найдём значения диагональных миноров. Составим определитель Гурвица.

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

Определим значения диагональных миноров

$$\Delta_1 = 4 > 0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot 7 - 2 \cdot 7 = 14 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 34 > 0$$

$$\Delta_4 = \Delta_3 \cdot a_4 = 4 \cdot 34 = 136 > 0.$$

Полученный результат показывает, что замкнутая система устойчива.

Пример № 9. Составить условие устойчивости одноконтурной системы, состоящей из трех апериодических звеньев, два из которых соединены последовательно и охвачены третьим звеном в виде обратной связи.

Решение

Передаточная функция разомкнутой системы.

$$W(S) = \frac{k}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)},$$

откуда характеристическое уравнение $a_3S^3 + a_2S^2 + a_1S + a_0 = 0$,

где $a_3 = T_1T_2T_3$; $a_2 = T_2(T_1 + T_3)$; $a_1 = T_1 + T_2 + T_3$; $a_0 = 1 + k$.

Имеем характеристическое уравнение третьей степени и все его коэффициенты положительные. Для устойчивости должно удовлетворяться еще одно условие - произведение средних коэффициентов характеристического уравнения должно быть больше произведения крайних, т.е. $a_1a_2 > a_3a_0$.

В данном случае это неравенство может быть приведено к виду:

$$k < (T_1 + T_2 + T_3) \cdot \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} \right) - 1.$$

Обозначим $T_2 = c_2 T_1$ и $T_3 = c_3 T_1$. Тогда условие устойчивости.

$$k < (1 + c_2 + c_3) \cdot \left(1 + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} \right) - 1.$$

Таким образом, устойчивость (замкнутой) системы зависит даже не от абсолютных значений постоянных времени, а лишь от соотношения между ними.

Пример № 10

Определить граничное значение передаточного коэффициента разомкнутой САР с передаточной функцией.

$$W = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2^2 s^2 + 2\xi T_2 s + 1)},$$

где $T_1 = 0.1$ с; $T_2 = 0.02$ с; $\xi = 0.4$.

Решение

Составим характеристическое уравнение замкнутой САР

$$T_1 T_2^2 s^3 + T_2 (T_2 + 2\xi T_1) s^2 + (T_1 + 2\xi T_2) s + (1 + k) = 0.$$

Уравнение третьего порядка, все его коэффициенты положительные. Для устойчивости необходимо и достаточно удовлетворить неравенство $a_1 a_2 > a_3 a_0$, которое в данном случае имеет вид

$$(T_2 + 2\xi T_1)(T_1 + 2\xi T_2) > T_1 T_2 (1 + k).$$

Превратим это неравенство в равенство и определим, что

$$k_{cp} = \frac{2\xi(T_1^2 + T_2^2 + 2\xi T_1 T_2)}{T_1 T_2} = 4,8$$

передаточный коэффициент k всегда положительная величина.

Поэтому, если условия устойчивости удовлетворяются при $k < 0$, то они удовлетворяются и при всех возможных значениях k . В подобных случаях принимают (условно), что $k_{cp} = \infty$. Если k не входит в условие устойчивости, то и в этом случае принимают $k_{cp} = \infty$.

Пример № 11

Определить граничное значение передаточного коэффициента разомкнутой САР с передаточной функцией.

$$W = \frac{k(\tau s + 1)}{s^2(Ts + 1)}.$$

Решение

Составим характеристическое уравнение замкнутой САР

$$Ts^3 + s^2 + k\tau s + k = 0$$

и условие её устойчивости

$k\tau > kT$ или $\tau > T$.

Коэффициент k не входит в условие устойчивости. Замкнутая система устойчива при всех возможных значениях k и $k_{cp} = \infty$

В условно устойчивых САР не одно, а два граничных значения передаточного коэффициента разомкнутой цепи. Ими являются наибольшее и наименьшее значение k , при которых САР оказывается на границе устойчивости.

Пример № 12. Выяснить, при каких значениях k будет устойчива САР, если передаточная функция её разомкнутой цепи

$$W = \frac{k(\tau s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s - 1)}$$

где $T_1 = 0.2$ с; $T_2 = 0.25$ с; $T_3 = 0.5$ с; $\tau = 0.1$ с

Решение

Составим характеристическое уравнение для замкнутой САР:

$$T_1 T_2 T_3 s^3 + (T_1 T_3 + T_2 T_3 - T_1 T_2) s^2 + (T_3 - T_1 - T_2 + k\tau) s + (k - 1) = 0$$

$$0.025 s^3 + 0.175 s^2 + (0.1k + 0.05) s + (k - 1) = 0$$

по критерию Гурвица для устойчивости замкнутой САР необходимо и достаточно удовлетворить два неравенства:

$$k > 1 \text{ и } 0.175(0.1k + 0.05) > 0.025(k - 1).$$

Из этих двух неравенств определим требования к значению передаточного коэффициента: $k > 1$ и $k < 4.5$.

Итак, замкнутая САР устойчива, если $1 < k < 4.5$.

4.3.2. Анализ устойчивости по критерию Михайлова

Этот критерий устойчивости был предложен ученым А. В. Михайловым. Он позволяет судить об устойчивости замкнутой САР на основе поведения кривой, представляющей собой годограф вектора характеристического полинома, который получают из характеристического уравнения

$$D(j\omega) = a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0$$

системы путем подстановки $S = j\omega$, где $j = \sqrt{-1}$, $j^2 = -1$, $j^3 = -j$, $j^4 = 1$.

Выделяем в уравнении вещественную $U(\omega)$ и мнимую $jV(\omega)$ части:

$$D(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega).$$

Критерий Михайлова формулируется так: чтобы замкнутая САУ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы кривая Михайлова при изменении частоты ω от 0 до ∞ , начинаясь при $\omega = 0$ на вещественной

положительной полуоси, обходила против часовой стрелки последовательно n квадрантов, уходя в бесконечность в последнем квадранте. Здесь n — порядок характеристического уравнения.

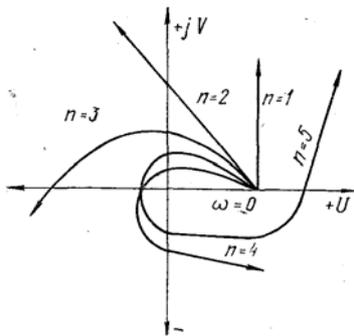


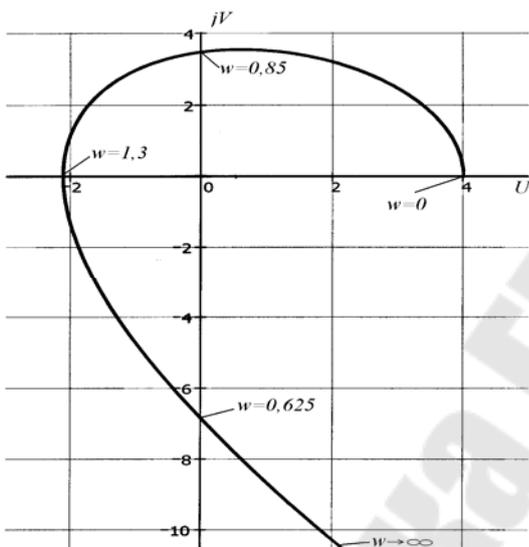
Рис. 4.2. “Кривые” Михайлова

На рис. 4.2 показаны типичные кривые Михайлова для устойчивых систем первого—пятого порядков с равным значением коэффициента a_n .

Признаком неустойчивости системы является нарушение числа и последовательности пройденных кривой Михайлова квадрантов плоскости $[U; jV]$.

Пример № 13. Определим устойчивость САР для данного случая.

В характеристическом уравнении для замкнутой САР вместо оператора S подставим значение $(j\omega)$ и получим:



$$D(j\omega) = 2(j\omega)^4 + 4(j\omega)^3 + 7(j\omega)^2 + 7(j\omega) + 4$$

Выделяем в полиноме вещественную и мнимую части.

$$U(\omega) = 2\omega^4 - 7\omega^2 + 4$$

$$V(\omega) = -4\omega^3 + 7\omega.$$

Рис. 4.3. Годограф Михайлова

Задавая различные значения частоте ω , находим координаты $U(\omega)$ и $V(\omega)$ точек годографа Михайлова. Рекомендуется начинать построение годографа с характерных точек, а именно: с точки при $\omega \rightarrow 0$, при $\omega \rightarrow \infty$, а затем с точек, в которых годограф пересекает оси координат.

При необходимости определяются другие точки, в частности, экстремумы годографа. Полученные значения заносятся в таблицу.

Вывод. Годограф Михайлова (рис. 4.3) начинается на вещественно положительной полуоси и при изменении ω от 0 до ∞ проходит против часовой стрелки 4 квадранта и в последнем уходит в бесконечность. Таким образом, рассматриваемая САР устойчива.

4.3.3. Анализ устойчивости по критерию Найквиста

Критерий устойчивости Найквиста основан на использовании амплитудно-фазовой частотной характеристики (АФЧХ) разомкнутой САР.

Для расчета частотных характеристик линейных звеньев и систем используют частотную передаточную функцию (ЧПФ).

Частотной передаточной функцией называется отношение изображения Фурье выходной величины Y к изображению Фурье входного воздействия X при нулевых начальных условиях.

Формально ЧПФ можно найти заменой в передаточной функции переменной S на переменную $j\omega$.

Частотная передаточная функция является комплексной функцией:

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

где $Y(j\omega)$ и $X(j\omega)$ - изображения Фурье для выходной и входной величины; $U(\omega)$ - вещественная часть ЧПФ; $V(\omega)$ - мнимая часть ЧПФ; $A(\omega)$ - модуль ЧПФ; $\varphi(\omega)$ - аргумент ЧПФ.

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}. \quad (4.1)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}. \quad (4.2)$$

В общем случае модуль $A(\omega)$ является амплитудной частотной характеристикой (АЧХ) звена или системы, а аргумент $\varphi(\omega)$ - фазовой частотной характеристикой (ФЧХ) звена или системы.

АЧХ и ФЧХ характеризуют реакцию системы или звена на гармоническое воздействие.

АЧХ называется зависимость отношения амплитуд выходного и входного гармонических сигналов от частоты в установившемся режиме.

ФЧХ называется зависимость разности фаз между выходным и входным сигналами от частоты в установившемся режиме.

АФЧХ характеризует зависимость отношения амплитуд и разности фаз от частоты одновременно.

Строится график АФЧХ в координатах $U(\omega)$ и $jV(\omega)$. Для этого рассчитываются $U(\omega)$ и $V(\omega)$ или $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до ∞ . Длина вектора, соединяющего начало координат с графиком АФЧХ, равна значению $A(\omega)$ при частоте ω , а угол поворота от оси U равен $\varphi(\omega)$ при частоте ω .

Формулировка критерия Найквиста

1. Если система в разомкнутом состоянии устойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы при изменении частоты от нуля до бесконечности не охватывала точку с координатами $(-1; j0)$.

2. Если система в разомкнутом состоянии, находится на границе устойчивости (является астатической), то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы, дополненная дугой бесконечно большого радиуса против часовой стрелки до действительной полуоси, не охватывала точку с координатами $(-1; j0)$.

3. Если система в разомкнутом состоянии неустойчива, то для устойчивости в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы охватывала точку с координатами $(-1; j0)$ в положительном направлении $n/2$ раз, где n - число корней характеристического уравнения с положительной действительной частью.

Пример № 14. Определим устойчивость САР, приведенной на рис. 4.1 .

Передаточная функция разомкнутой системы по задающему воздействию имеет вид

$$W_p(p) = \frac{2S + 2}{2S^4 + 4S^3 + 7S^2 + 5S + 2}$$

Решение

Находим частотную передаточную функцию, подставляя $j\omega$ вместо S :

$$W_p(j\omega) = \frac{2j\omega + 2}{2(j\omega)^4 + 4(j\omega)^3 + 7(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 2}$$

Так как $j = \sqrt{-1}$, $j^2 = -1$, $j^3 = -j$, $j^4 = 1$ и т.д. Получим

$$W_p(j\omega) = \frac{2j\omega + 2}{2\omega^4 - 4j\omega^3 - 7\omega^2 + 5j\omega + 2} = \frac{2j\omega + 2}{(2\omega^4 - 7\omega^2 + 2) - j(4\omega^3 - 5\omega)}$$

Для построения АФЧХ разомкнутой системы представим частотную передаточную функцию в виде:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega).$$

Чтобы представить ЧПФ в виде комплексного числа имеющего действительную $U(\omega)$ и мнимую $jV(\omega)$ части, умножим и разделим полученный результат на сопряжённое знаменателю комплексное выражение $(2\omega^4 - 7\omega^2 + 2) + j(4\omega^3 - 5\omega)$ и получим:

$$W_p(j\omega) = \frac{(2j\omega + 2)((2\omega^4 - 7\omega^2 + 2) + j(4\omega^3 - 5\omega))}{(2\omega^4 - 7\omega^2 + 2)^2 - j^2(4\omega^3 - 5\omega)^2}$$

После преобразования

$$W_p(j\omega) = \frac{j(4\omega^5 - 6\omega^3 - 6\omega) + (-4\omega^4 - 4\omega^2 + 4)}{4\omega^8 - 12\omega^6 + 17\omega^4 - 3\omega^2 + 4}$$

Вещественная часть частотной передаточной функции

$$U(\omega) = \frac{-4\omega^4 - 4\omega^2 + 4}{4\omega^8 - 12\omega^6 + 17\omega^4 - 3\omega^2 + 4}$$

Мнимая часть частотной передаточной функции

$$V(\omega) = j \frac{4\omega^5 - 6\omega^3 - 6\omega}{4\omega^8 - 12\omega^6 + 17\omega^4 - 3\omega^2 + 4}$$

Задавая различные значения частоты ω , определим координаты $U(\omega)$ и $V(\omega)$ точек годографа. Лучше начинать нахождение координат точек годографа с характерных точек, а именно: с точки при $\omega \rightarrow 0$, при $\omega \rightarrow \infty$, точек, в которых годограф пересекает оси координат, а затем найти координаты промежуточных точек годографа, при необходимости можно найти экстремумы годографа.

Определим координаты точек, которые являются местом пересечения годографа с осью абсцисс. Для этих точек координата по оси ординат равна нулю ($V(\omega) = 0$). То есть годограф пересекает ось $U(\omega)$, если числитель $V(\omega)$ равен нулю, а именно:

$$4\omega^5 - 6\omega^3 - 6\omega = 0$$

Решая это уравнение, найдем корни. Для решения используем только положительные значения. В нашем случае $\omega = 1.42$.

Подставляя найденное значение ω в выражение для $U(\omega)$, находим

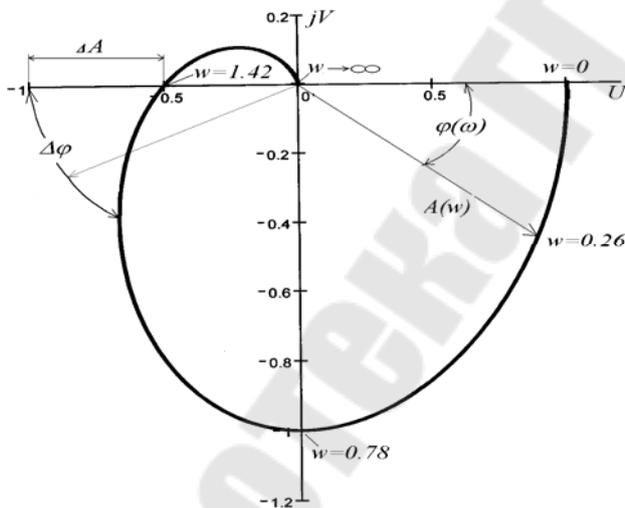


Рис. 4.4. АФЧХ разомкнутой системы

координату искомой точки на оси абсцисс $U(\omega)_{\omega=1.42} = -0.58$.

Таким же образом определяются координаты точек пересечения годографа с осью ординат. Полученные значения заносятся в таблицу.

Вывод: АФЧХ разомкнутой системы (рис. 4.4) не охватывает точку с координатами $(-1; j0)$, поэтому замкнутая система устойчива.

АФЧХ разомкнутой системы можно было бы построить, рассчитав значения $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$. Для упрощения расчетов $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ пользуются следующими соотношениями:

Модуль дробно-рационального выражения ЧПФ равен отношению модуля числителя к модулю знаменателя.

Модуль произведения равен произведению модулей.

Аргумент дробно-рационального выражения ЧПФ равен разности аргументов числителя и знаменателя.

Аргумент произведения равен сумме аргументов.

Для расчета модулей и аргументов используют выражения (4.1) и (4.2).

На рис. 4.4 показано построение одной точки АФЧХ для $\omega_1 = 0,26$ по значениям $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$.

При анализе устойчивости пользуются также логарифмическими амплитудными (ЛАЧХ) и фазовыми (ЛФЧХ) частотными характеристиками.

Пример № 15. Получить выражение для построения годографа Найквиста, если известна передаточная функция разомкнутой САР.

$$Wr(s) = \frac{0.2S + 8}{0.02S^3 + 0.2S^2 + 1.3S + 2}$$

Решение

Осуществим подстановку в выражении для ПФ S на $j\omega$.

$$Wr(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

Избавимся от j в знаменателе дробно-рациональной функции:

$$Wr(j\omega) = \frac{U_1 + jV_1}{U_2 + jV_2} \cdot \frac{(U_2 - jV_2)}{(U_2 - jV_2)} = \frac{U_1 + U_2 + V_1V_2}{U_2^2 + V_2^2} + j \frac{U_2V_1 - U_1V_2}{U_2^2 + V_2^2}$$

Определяем значения для компонент полученного выражения:

$$\begin{aligned} U_1(\omega) &= 8 & V_1(\omega) &= 0.2\omega \\ U_2(\omega) &= 2 - 0.2\omega^2 & V_2(\omega) &= 1.3j\omega - 0.02j\omega^3 \\ U_1U_2 &= 16 - 1.6\omega^2 & V_1V_2 &= 0.2\omega^2(1.3 - 0.02\omega^2) \\ U_2V_1 &= (2 - 0.2\omega^2)0.2\omega & U_1V_2 &= 8\omega(1.3 - 0.02\omega^2) \\ U_2^2 &= 4 - 0.4\omega^4 \\ V_2^2 &= \omega^2(1.3 - 0.02\omega^2)^2 = \omega^2(1.64 - 0.026\omega^2 + (0.02)^2\omega^4) \\ U_2^2 + V_2^2 &= 4 \cdot 10^{-4}\omega^6 - 0.066\omega^4 + 1.29\omega^2 + 4 \\ U_1U_2 + V_1V_2 &= 16 - 1.6\omega^2 + 0.26\omega^2 - 0.004\omega^4 \end{aligned}$$

$$U(\omega) = \frac{16 - 1.34\omega^2 - 0.004\omega^4}{4 \cdot 10^{-4} \omega^6 - 0.066\omega^4 + 1.29\omega^2 + 4}$$

$$V(\omega) = \frac{10.8\omega - 0.2\omega^3}{4 \cdot 10^{-4} \omega^6 - 0.066\omega^4 + 1.29\omega^2 + 4}$$

$$W(j\omega) = \frac{0.2(j\omega) + 8}{0.02(j\omega)^3 + 0.2(j\omega)^2 + 1.3(j\omega) + 2} = U(\omega) + jV(\omega)$$

В результате имеем искомое выражение для построения годографа Найквиста

$$W(j\omega) = \frac{0.2(j\omega) + 8}{0.02(j\omega)^3 + 0.2(j\omega)^2 + 1.3(j\omega) + 2} = U(\omega) + jV(\omega) =$$

$$= \frac{16 - 1.34\omega^2 - 0.004\omega^4}{4 \cdot 10^{-4} \omega^6 - 0.066\omega^4 + 1.29\omega^2 + 4} + j \frac{10.8\omega - 0.2\omega^3}{4 \cdot 10^{-4} \omega^6 - 0.066\omega^4 + 1.29\omega^2 + 4}.$$

Пример № 16. Выяснить устойчивость по Найквисту системы, если передаточная функция её разомкнутого контура

$$W(j\omega) = \frac{k(\tau s + 1)}{(T_1 s - 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)},$$

где $k = 50$; $\tau = 0,05$; $T_1 = 0,1$; $T_2 = 0,02$; $T_3 = 0,25$ с.

Решение

По передаточной функции W определим, что характеристический полином разомкнутой системы имеет один положительный корень.

$$s_1 = \frac{1}{T_1} = 10.$$

Для исследования устойчивости составим частотную передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(j\omega) = \frac{k(\tau j\omega + 1)}{(T_1 j\omega - 1)(T_2 j\omega + 1)(T_3 j\omega + 1)} = U + jV,$$

где

$$U = -\frac{50(1 + 0.0305\omega^2 + 0.000025\omega^4)}{1 + 0.0729\omega^2 + 0.000654\omega^4 + 0.00000025\omega^6}$$

$$V = \frac{50\omega(0.12 - 0.0006\omega^2)}{1 + 0.0729\omega^2 + 0.000654\omega^4 + 0.00000025\omega^6}.$$

По выражениям, определяющим U и V , заключаем:

а) при $\omega = 0$ $U = -50$ и $V = 0$;

б) при $0 \leq \omega < \infty$ $U < 0$;

в) при $\omega = \infty$ $U = V = 0$;

г) при $\omega_1 = \sqrt{\frac{0,12}{0,0006}} = \sqrt{200}$; и при $V = 0$; $U = -9,25$;

д) при $0 < \omega < \omega_1$ $V > 0$ и при $\omega_1 < \omega < \infty$ $V < 0$.

Полученные данные подсказывают форму АФЧХ разомкнутой системы. Вектор, помещённый в точку с координатами $(-1; j0)$ и перемещающийся своим концом по построенной кривой, поворачивается против часовой стрелки на угол, равный π . Следовательно, замкнутая система устойчива.

Пример № 17

Построить АФЧХ разомкнутой САР по её передаточной функции

$$W(S) = \frac{k(\tau S + 1)}{a_4 S^4 + a_3 S^3 + a_2 S^2 + a_1 S + 1}$$

где $k = 25$ $\tau = 0.15$ $a_4 = 0.0002$ $a_3 = 0.006$ $a_2 = 0.08$ $a_1 = 0.5$

Решение

Определяем частотную ПФ САР, выполнив замену $S = j\omega$

$$\bar{W}(j\omega) = \frac{k(j\tau\omega + 1)}{(1 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4) + j\omega(a_1 - a_3\omega^2)}$$

Выделим её действительную и мнимую части:

$$\bar{W}(j\omega) = \frac{k(j\tau\omega + 1)[1 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4] - j\omega(a_1 - a_3\omega^2)}{[1 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4] + j\omega(a_1 - a_3\omega^2)[1 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4] - j\omega(a_1 - a_3\omega^2)} = U(\omega) + jV(\omega),$$

где

$$U(\omega) = \frac{\kappa B_1(\omega)}{B(\omega)} \quad \text{и} \quad V(\omega) = \frac{\kappa B_2(\omega)}{B(\omega)};$$

$$B_1(\omega) = 1 + (\tau a_1 - a_2)\omega^2 + (a_4 - \tau a_3)\omega^4 = 1 - 5 \cdot 10^{-3} \cdot \omega^2 - 7 \cdot 10^{-4} \cdot \omega^4;$$

$$B_2(\omega) = \omega \cdot [(\tau - a_1) + (a_3 - \tau a_2) \cdot \omega^2 + \tau a_4 \omega^4] = -\omega(0,35 + 6 \cdot 10^{-3} \omega^2 - 3 \cdot 10^{-5} \omega^4);$$

$$B(\omega) = 1 + (a_1^2 - 2a_2)\omega^2 + (a_1^2 + 2a_4 - 2a_1a_3)\omega^4 + (a_3^2 - 2a_4a_2)\omega^6 + a_4^2\omega^8 = 1 + 0,09\omega^2 + 8 \cdot 10^{-4}\omega^4 + 4 \cdot 10^{-6}\omega^6 + 4 \cdot 10^{-8}\omega^8.$$

Определим значения U и V при предельных значениях ω :

$$U(0) = \frac{\kappa B_1(0)}{B(0)} = \kappa = 15; \quad V(0) = \frac{\kappa B_2(0)}{B(0)} = 0;$$

$$U(\infty) = \frac{\kappa B_1(\infty)}{B(\infty)} = 0; \quad V(\infty) = \frac{\kappa B_2(\infty)}{B(\infty)} = 0.$$

Составим условие пересечения АФЧХ оси ординат:

$$B_1 = 0, \text{ т.е. } 1 - 5 \cdot 10^{-3} \omega^2 - 7 \cdot 10^{-4} \omega^4 = 0.$$

Полученное биквадратное уравнение имеет один положительный действительный корень $\omega_1 = 5.86$. Следовательно, АФЧХ пересекает ось ординат при

$$\omega = \omega_1 \quad \text{и} \quad V(\omega_1) = \frac{\kappa B_2(\omega_1)}{B(\omega_1)} = -8,65.$$

Составим условие пересечения АФЧХ оси абсцисс:

$$B_2 = 0, \text{ т.е. } \omega(0,35 + 6 \cdot 10^{-3} \omega^2 - 3 \cdot 10^{-5} \omega^4) = 0.$$

Биквадратное уравнение

$$0,35 + 6 \cdot 10^{-3} \omega^2 - 3 \cdot 10^{-5} \omega^4 = 0$$

имеет один положительный действительный корень $\omega_2 = 15,7$.

Следовательно,

АФЧХ пересекает ось абсцисс при $\omega = \omega_2$ и

$$U(\omega_2) = \frac{\kappa B_1(\omega_2)}{B(\omega_2)} = -2,29.$$

Полученные данные и выражения для U и V позволяют сделать следующее заключение о расположении АФЧХ:

$$\omega = \infty : U = V = 0 \quad \omega = 0 : U = 15 \text{ и } V = 0;$$

$$0 < \omega < 5,86; U > 0 \text{ и } V < 0;$$

$$\omega = 5,86; U = 0 \text{ и } V = -8,65; \quad 5,86 < \omega < 15,7; U < 0 \text{ и } V < 0;$$

$$\omega = 15,7; U = -2,29 \text{ и } V = 0; \quad 15,7 < \omega < \infty; U < 0 \text{ и } V > 0.$$

На основании этих данных строится АФЧХ.

4.4. Определение запасов устойчивости систем автоматического управления

При оценке устойчивости систем одного факта устойчивости недостаточно. Необходимо также оценивать величину *запаса* устойчивости, т.е. степени удаленности характеристик САУ от границы устойчивости. Система, которая теоретически является устойчивой, но находится очень близко к границе устойчивости, при её реализации может оказаться неустойчивой вследствие неточности математического описания системы, использованного при оценке устойчивости, из-за допуска на параметры элементов в технической реализации системы и неточностей при наладке, из-за изменения параметров системы в процессе ее эксплуатации.

Основное распространение в качестве меры запаса устойчивости получили две величины - запас устойчивости по фазе $\Delta\varphi$ и запас устойчивости по амплитуде ΔA .

Запас устойчивости по фазе определяется величиной $\Delta\varphi$, до которой может возрасти запаздывание по фазе, чтобы система оказалась на границе устойчивости.

Запас устойчивости по амплитуде определяется величиной (ΔA) допустимого увеличения АЧХ, при котором система окажется на границе устойчивости. Таким образом, запас по амплитуде представляет собой запас по коэффициенту передачи разомкнутой системы по отношению к его критическому по устойчивости значению.

Величины $\Delta\varphi$ и ΔA показаны на рис. 4.4. Для определения $\Delta\varphi$ проводится дуга единичного радиуса до пересечения с АФЧХ. При проектировании САУ рекомендуется выбирать $\Delta\varphi \geq 30^\circ$ и $\Delta A \geq 0,7$. Для рассматриваемого примера САУ $\Delta\varphi \approx 35^\circ$, $\Delta A \approx 0,5$, что удовлетворяет рекомендуемой величине запаса устойчивости по фазе, но не имеет достаточного запаса устойчивости по амплитуде.

Пример № 18. Выяснить влияние постоянной времени τ дифференцирующего звена на устойчивость замкнутой системы.

$$W = \frac{k(\tau S + 1)}{S(T_1 S + 1)(T_2 S + 1)}, \quad \text{где } k = 50; T_1 = 0.4 \text{ с}; T_2 = 0.1 \text{ с}.$$

Решение

Составим характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$\begin{aligned} T_1 T_2 S^3 + (T_1 + T_2) S^2 + (1 + k\tau) S + k &= 0; \\ 0.04 S^3 + 0.5 S^2 + (1 + 50\tau) S + 50 &= 0 \end{aligned}$$

Решим это уравнение относительно τ :

$$\tau = -\frac{1}{50S} (0.04 S^3 + 0.5 S^2 + S + 50)$$

и выполним подстановку $S = j\omega$:

$$\tau(j\omega) = -\frac{1}{j\omega 50} (-j0.04\omega^3 - 0.5\omega^2 + j\omega + 50) = \vec{X} + j\vec{Y}$$

где $\vec{X} = 0.2(-1 + 0.04\omega^2)$; $\vec{Y} = \frac{1}{\omega}(1 - 0.01\omega^2)$.

Для построения кривой D-разбиения [2] (см. с.265) определим:

- а) при $\omega = 0$ $X = -0.02$; $Y = +\infty$;
- б) при $\omega_1 = 5$ $X = 0$; $Y = 0.15$;
- в) при $\omega_2 = 10$ $X = 0.06$; $Y = 0$;
- г) при $\omega = \infty$ $X = +\infty$; $Y = -\infty$.

Полученные данные позволяют построить кривую на участке 1 от $\omega = 0$ до $\omega = +\infty$. Построив зеркальное отображение этого участка кривой относительно оси абсцисс, получим второй ее участок (от $\omega = -\infty$ до $\omega = 0$). Двигаясь по кривой от $\omega = -\infty$ к $\omega = +\infty$, штрихуем ее слева.

Плоскость разделена на три области, из которых на устойчивость претендует область 3, так как штриховка направлена внутрь этой области. Проверим устойчивость системы при $\tau = 0.1$ - эта точка лежит в области 3. Характеристическое уравнение при этом значении τ

$$0.04 S^3 + 0.5 S^2 + 6 S + 50 = 0.$$

Критерий устойчивости Гурвица удовлетворяется: все коэффициенты характеристического уравнения положительные и выполняется неравенство

$$0.5 \cdot 6 = 3 > 0.04 \cdot 50 = 2.$$

Следовательно, область 3 есть область устойчивости САР. Таким образом, рассматриваемая САР устойчива при $\tau > 0.06$.

4.5. Анализ влияния малых параметров на устойчивость

Иногда один или несколько параметров САР оказываются малыми по сравнению с другими. Возникает желание этими малыми параметрами пренебречь (считать их равными нулю) и понизить порядок уравнения (передаточной функции) для упрощения расчетов. Если это не влияет на устойчивость, то САР является грубой в смысле А. А. Андропова. Однако может оказаться, что малые параметры влияют на устойчивость, и расчет по упрощенному уравнению приведет к неверным выводам. Такая САР является негрубой. Следовательно, в каждом случае необходимо выяснить, нужно ли учитывать малые параметры или ими можно пренебречь.

Характеристическое уравнение САР может быть приведено к виду (1):

$$\mu(c_0 S^N + c_1 S^{N-1} + \dots + c_{N-1} S + c_N) + a_0 S^n + a_1 S^{n-1} + \dots + a_{n-1} S + a_n = 0$$

где μ - малый параметр.

Малый параметр μ не влияет на устойчивость САР, и ее можно исследовать по вырожденному характеристическому уравнению:

$$a_0 S^n + a_1 S^{n-1} + \dots + a_{n-1} S + a_n = 0,$$

если $\frac{a_0}{c_0} > 0$ $N - n = 1$ и $\frac{c_1}{c_0} - \frac{a_1}{a_0} > 0$ при $N - n = 2$.

Если $N - n = 2$, то отбрасывать малый параметр μ нельзя и устойчивость САР необходимо исследовать по характеристическому уравнению.

Пример № 19. Исследовать на устойчивость САР, характеристическое уравнение которой

$$(T_1^2 S^2 + 2\xi T_1 S + 1)(T_2 S + 1)(\mu S + 1) + k = 0,$$

где $\xi = 0.8$; $T_1 = 0.9$ с; $\mu = 0.001$ с; $k = 15$

Решение. Приведем характеристическое уравнение к виду (1)

$$\mu[T_1^2 T_2 S^4 + T_1(2\xi T_2 + T_1)S^3 + (2\xi T_1 + T_2)S^2 + S] + [T_1^2 T_2 S^3 + T_1(2\xi T_2 + T_1)S^2 + (2\xi T_1 + T_2)S + (1 + k)] = 0.$$

В данном случае

$$N - n = 4 - 3 = 1 \text{ и } \frac{a_0}{c_0} = \frac{T_1^2 T_2}{T_1^2 T_2} = 1.$$

Следовательно, параметром μ можно пренебречь и исследовать устойчивость по вырожденному характеристическому уравнению

$$T_1^2 T_2 S^3 + T_1(2\xi T_2 + T_1)S^2 + (2\xi T_1 + T_2)S + (1 + k) = 0;$$

$$0,0729 S^3 + 0,94 S^2 + 1,53 S + 16 = 0.$$

По критерию Гурвица система устойчива, так как все коэффициенты этого уравнения положительные и выполняется условие $a_1 a_2 > a_3 a_0$, т. е.

$$0,94 \cdot 1,53 = 1,44 > 0,0729 \cdot 16 = 1,17.$$

4.6 Оценка качества управления в системе автоматического управления

Устойчивость САУ или САР является необходимым, но не достаточным условием практической полезности системы. Например, устойчивая система при обработке задающих и возмущающих воздействий может оказаться недостаточно точной или переходные процессы в ней совершаются слишком медленно. Иногда не обеспечивается необходимая плавность выхода системы и т. п. Следовательно, к САУ предъявляется еще ряд требований, который объединяются понятием качества процесса управления. Оценка качества САУ ведется по показателям качества или критериям качества, к которым относятся, в частности:

- 1) точность системы в установившемся состоянии;
- 2) качество переходного процесса (или показатели качества переходной характеристики).

Независимо от своего назначения САУ, должна осуществлять управление объектом с заданной точностью. Качество управления зависит от текущей величины ошибки $\varepsilon(t)$, равной разности между заданным $g(t)$ и фактически отработанным $y(t)$ значениями управляемой величины:

$$\varepsilon(t) = g(t) - y(t).$$

Возмущающие воздействия представляют собой случайные функции времени, поэтому оценка качества управления по мгновенным значениям ошибки $\varepsilon(t)$ на стадии анализа линейной математической модели САУ практически используется редко.

Единой объективной численной оценки качества управления пока не существует. Имеются лишь частные оценки отдельных наиболее характерных режимов: установившегося режима по его ошибке и переходного режима по различным показателям.

ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

Одной из оценок качества регулирования служит оценка качества переходной характеристики САУ относительно задающего воздействия. Показатели качества переходной характеристики называются прямыми. Чем лучше переходная характеристика (в смысле качественных показателей), тем лучше система будет обрабатывать произвольное (в т.ч. случайное) задающее воздействие.

Качество САУ по переходной характеристике оценивается обычно по следующим показателям (рис. 4.5): величине перерегулирования σ_{\max} ; статической ошибке $-\varepsilon$, времени переходного процесса $-t_p$, числу колебаний $-c$ (колебательность), степени затухания $-\psi$.

Величина перерегулирования определяется по выражению:

$$\sigma_{\max} = \frac{y_1 - y_0}{y_0} 100, \%,$$

где y_1 - амплитуда первого (максимального) отклонения управляемой величины; y_0 - амплитуда заданного значения управляемой величины (задающее воздействие).

Перерегулированием оценивают разность между максимальным значением y_1 , переходной характеристики и установившемся значением y_0 . Перерегулирование косвенно определяет также и запас устойчивости. Допустимое значение перерегулирования может быть определено на основании опыта эксплуатации подобных систем. В большинстве случаев считается, что запас устойчивости является достаточным, если величина перерегулирования не превышает 10...30%.

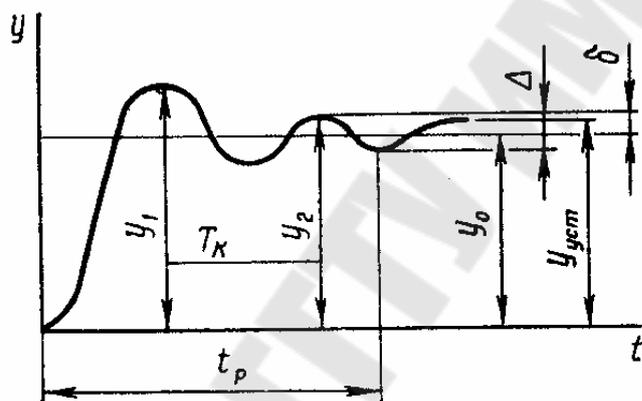


Рис. 4.5. Показатели качества переходной характеристики

Статическая ошибка определяется по выражению:

$$\varepsilon = \frac{y_{уст} - y_0}{y_0};$$

иногда принимают значение абсолютной статической ошибки

$$\delta = y_{уст} - y_0.$$

Время переходного процесса t_p характеризует быстродействие системы, под которым понимается промежуток времени от начала приложения воздействия до вхождения $y(t)$ в коридор $y_0 \pm \Delta$, где Δ - допустимая динамическая погрешность. Обычно принимают $\Delta = 0.01...0.05$ (иногда до 0.2), т. е. переходной процесс в САУ считают закончившимся, когда $y(t)$ отличается от своего установившегося значения не более чем на 1...5%. Обычно Δ выбирают равным 5%.

Период колебаний – время между двумя максимумами $y(t)$ (или ми-

нимумами) – T_k .

Колебательность или число колебаний за время переходного процесса определяется числом максимумов или числом минимумов за время t_p . Иногда колебательность оценивают отношением соседних максимумов переходной характеристики $c = y_1 / y_2$ где y_2 – амплитуда второго положительного отклонения.

Обычно $c = 1...2$ колебания, иногда 3...4. У некоторых систем колебания вовсе не допускаются. Если $1 \leq c \leq 2$, то запас устойчивости САУ считается достаточным.

Степень затухания определяется по выражению:

$$\psi = \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_0}$$

Всякая САУ кроме обработки задающего воздействия осуществляет и подавление возмущений. Поэтому качество регулирования оценивают также по переходной характеристике $y(t) = y_f(t)$ системы по возмущению. Особенность этой характеристики состоит в том, что ее установившееся значение должно быть весьма мало в статической системе и равно нулю в астатической системе. Понятие перерегулирования для характеристики $y_f(t)$ не имеет смысла и его оценивают непосредственно максимальным значением $y_f(t)_{\max}$.

Пример № 20

Определить показатели качества САУ приведенной на схеме (см. рис. 4.6). Передаточные функции (ПФ) звеньев САУ:

$$W_1(S) = \frac{k_1}{T_0^2 S^2 + T_1 S + 1}; \quad W_2(S) = \frac{k_2}{T_2 S + 1} \quad W_3(S) = k_3 \quad W_4(S) = \frac{k_4}{S} \quad W_5(S) = k_5$$

Значения параметров передаточных функций:

$$k_1 = 5.0 \quad k_2 = 1.2 \quad k_3 = 0.5 \quad k_4 = 4.5 \quad k_5 = 1.5$$

$$T_0 = 0.05 \quad T_1 = 0.125 \quad T_2 = 0.5$$

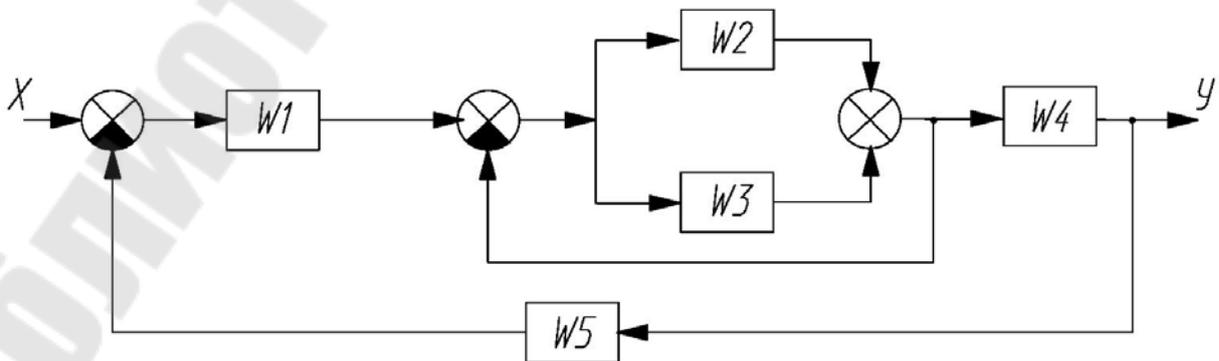


Рис. 4.6. Структурная схема САУ

Решение

Преобразуем соединения для получения эквивалентных ПФ.

$$W_{23}(S) = W_2(S) + W_3(S) \quad W_{23\varepsilon} = \frac{W_{23}(S)}{1 + W_{23}(S)} \quad W_{npц}(S) = W_1(S) \cdot W_{23\varepsilon}(S) \cdot W_4(S)$$

Определение ПФ разомкнутой САУ

$$W_p(S) = W_{npц}(S) \cdot W_5(S)$$

$$W_p(S) = \frac{b_1 S + b_0}{a_4 S^4 + a_3 S^3 + a_2 S^2 + a_1 S}$$

$$b_1 = T_2 k_1 k_3 k_4 k_5$$

$$b_1 = 8.438$$

$$b_0 = k_1 k_4 k_5 (k_2 + k_3)$$

$$b_0 = 57.375$$

$$a_4 = T_0^2 T_2 (k_3 + 1)$$

$$a_4 = 1.875 \times 10^{-3}$$

$$a_3 = T_1 T_2 (k_3 + 1) + T_0^2 (k_2 + k_3 + 1)$$

$$a_3 = 0.101$$

$$a_2 = T_2 (k_3 + 1) + T_1 (k_3 + k_2 + 1)$$

$$a_2 = 1.087$$

$$a_1 = k_3 + k_2 + 1$$

$$a_1 = 2.7$$

$$K_p = \frac{b_0}{a_1}$$

$$K_p = 21.25$$

$$\varepsilon = \frac{1}{K_p} \quad \varepsilon = 0.047 \quad \text{Ошибка регулирования } \varepsilon \text{ обратно пропорциональна}$$

коэффициенту добротности по скорости и составляет не более 4.7%.

Проверка устойчивости исходной САУ по критерию Гурвица

$$D(S) = a_4 S^4 + a_3 S^3 + a_2 S^2 + (a_1 + b_1) S + b_0$$

$$(a_1 + b_1) a_2 a_3 > a_4 (a_1 + b_1)^2 + a_3^2 b_0$$

$$(a_1 + b_1) a_2 a_3 = 1.217 \quad a_4 (a_1 + b_1)^2 + b_0 a_3^2 = 0.812$$

$$1.217 > 0.812$$

Вывод: Исходная замкнутая САУ устойчива, так как выполняются соотношения между коэффициентами характеристического полинома.

Определение ПФ замкнутой САУ

Выражение для ПФ замкнутой САУ получается при охвате разомкнутой цепи жесткой единичной отрицательной обратной связью или при расчете встречно-параллельного соединения, состоящего из $W_{npц}(S)$ и $W_5(S)$.

$$W_z(S) = \frac{W_p(S)}{1 + W_p(S)} \quad W_z(S) = \frac{W_{npц}(S)}{1 + W_{npц}(S) \cdot W_5(S)}$$

$$b_{1z} = T_2 k_1 k_3 k_4$$

$$b_{1z} = 5.625$$

$$\begin{aligned}
b_{0Z} &= k_1 k_4 (k_2 + k_3) & b_{0Z} &= 38.25 \\
a_{4Z} &= T_0^2 T_2 (k_3 + 1) & a_{4Z} &= 1.875 \times 10^{-3} \\
a_{3Z} &= T_1 T_2 (k_3 + 1) + T_0^2 (k_2 + k_3 + 1) & a_{3Z} &= 0.101 \\
a_{2Z} &= T_2 (k_3 + 1) + T_1 (k_3 + k_2 + 1) & a_{2Z} &= 1.087 \\
a_{1Z} &= k_3 + k_2 + 1 + T_2 k_1 k_3 k_4 k_5 & a_{1Z} &= 11.137 \\
a_{0Z} &= k_1 k_4 k_5 (k_2 + k_3) & a_{0Z} &= 57.375
\end{aligned}$$

$$W_Z(S) = \frac{b_{1Z}S + b_{0Z}}{a_{4Z}S^4 + a_{3Z}S^3 + a_{2Z}S^2 + a_{1Z}S + a_{0Z}}$$

Построение переходной характеристики (ПХ) исходной САР

$$\begin{aligned}
W_{Znorm}(S) &= \frac{(c_1S + 1) \cdot k}{d_4S^4 + d_3S^3 + d_2S^2 + d_1S + 1} \\
k &= \frac{b_{0Z}}{a_{0Z}} & k &= 0.667 & c_1 &= \frac{b_{1Z}}{b_{0Z}} & c_1 &= 0.147 & d_1 &= \frac{a_{1Z}}{a_{0Z}} & d_1 &= 0.194 \\
d_2 &= \frac{a_{2Z}}{a_{0Z}} & d_2 &= 0.019 & d_3 &= \frac{a_{3Z}}{a_{0Z}} & d_3 &= 1.752 \times 10^{-3} & d_4 &= \frac{a_{4Z}}{a_{0Z}} \\
d_4 &= 3.268 \times 10^{-5} \\
H(S) &= \frac{1}{S} \cdot W_{Znorm}(S) & H(S) &= k \cdot \frac{c_1S + 1}{S(d_4S^4 + d_3S^3 + d_2S^2 + d_1S + 1)} \\
R(S) &= c_1S + 1 & Q(S) &= d_4S^5 + d_3S^4 + d_2S^3 + d_1S^2 + S
\end{aligned}$$

Найдем корни уравнения $Q(S) = 0$

$$\begin{aligned}
S_1 &= 0 & S_2 &= -42.925 & S_3 &= -7.33 & S_4 &= -1.673 + 9.719j \\
S_5 &= -1.673 - 9.719j \\
T_1 &= \frac{-1}{S_2} & T_1 &= 0.023 & T_2 &= \frac{-1}{S_3} & T_2 &= 0.136 & \alpha &= 1.673 & \beta &= 9.719 \\
T &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} & T &= 0.101 & \xi &= \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} & \xi &= 0.17
\end{aligned}$$

Найдем корни уравнения $R(S) = 0$.

$$l = \left[\frac{1}{c_1} \right] \quad roots = polyroots(l) \quad l_1 = 0.147 \quad \tau = l_1$$

Определим ПХ, преобразовав по Лапласу выражение для $H(S)$ с помощью оператора, встроенного в MathCAD

$$H(S) = k \cdot \frac{\tau \cdot S + 1}{S(T_1 S + 1)(T_2 S + 1)(T^2 S^2 + 2\xi T S + 1)}$$

$$k = 0.667 \quad \tau = 0.147 \quad T_1 = 0.023 \quad T_2 = 0.136 \quad T^2 = 0.01 \quad 2\xi T = 0.034$$

$$\frac{(0.147S + 1) \cdot 0.667}{3.268 \cdot 10^{-5} S^5 + 1.752 \cdot 10^{-3} S^4 + 0.019 S^3 + 0.194 S^2 + S}$$

$$q_1(t) = 0.667 - 3.96 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-42.9 \cdot t) + 4.99 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-7.35 \cdot t)$$

$$q_2(t) = -0.68 \cdot \exp(-1.68 \cdot t) \cdot \cos(9.71 \cdot t) - 0.25 \cdot \exp(-1.68 \cdot t) \cdot \sin(9.71 \cdot t)$$

$$t = 0.0, 0.01, \dots, 6 \quad h(t) = q_1(t) + q_2(t)$$

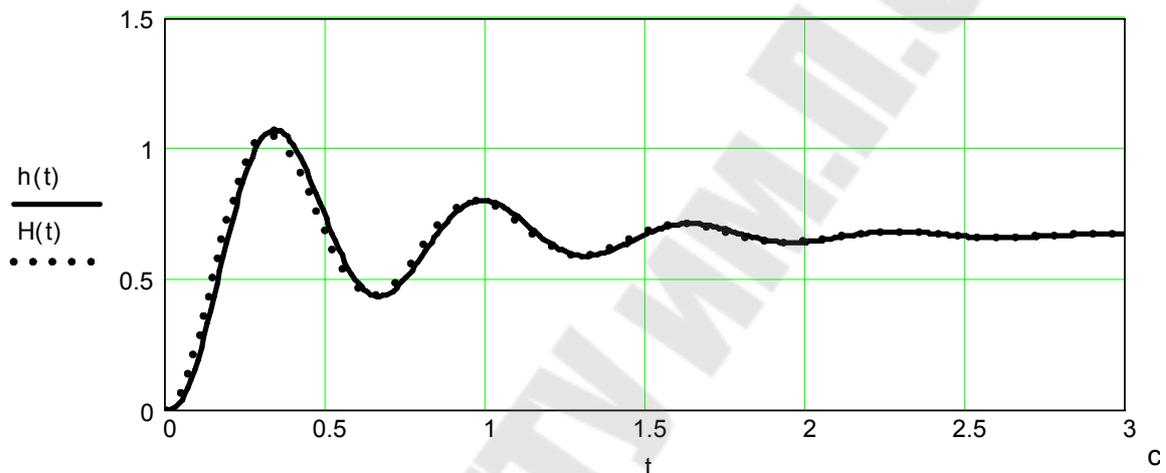


Рис. 4.7. Графики переходной характеристики САУ, построенные двумя способами.

Определение показателей качества по графику ПХ.

$$h(6) = 0.667 \quad h_{\max} = h(0.34) = 1.073$$

$$\Delta = \frac{h(1.95) - h(6)}{h(6)} \quad \Delta = -0.04 \quad \sigma_{\max} = \frac{h(0.34) - h(6)}{h(6)} \quad \sigma_{\max} = 0.608$$

Таким образом, по ПХ время регулирования равно 1.95 с., а перерегулирования составляет 60.8 %.

Пример № 21

Определить показатели качества, приведенной на рис 4.6 САУ, по доминирующей паре корней

Решение. Для уравнения $Q(S) = 0$.

$$H(t) = k \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{\beta T} \right) \cdot \exp(-\alpha \beta) \cdot \sin \left(\beta \cdot t + \arctg \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \right) \right]$$

$$\sigma_{\max} = \exp \left(-\pi \cdot \frac{\alpha}{\beta} \right) \quad \sigma_{\max} = 0.582 \quad A_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2} \quad t_p = \frac{3 + \ln(A_1)}{\alpha} \quad t_p = 1.802 \text{ c}$$

Таким образом, по доминирующей паре корней время регулирования составляет 1.802 с., а перерегулирование – 58.2%.

Пример № 22. Определить значение показателя колебательности для САУ, приведенной на рис. 4.6 двумя способами.

Решение

1. Расчет показателя колебательности по доминирующей паре корней

$$m = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad m = 2.991$$

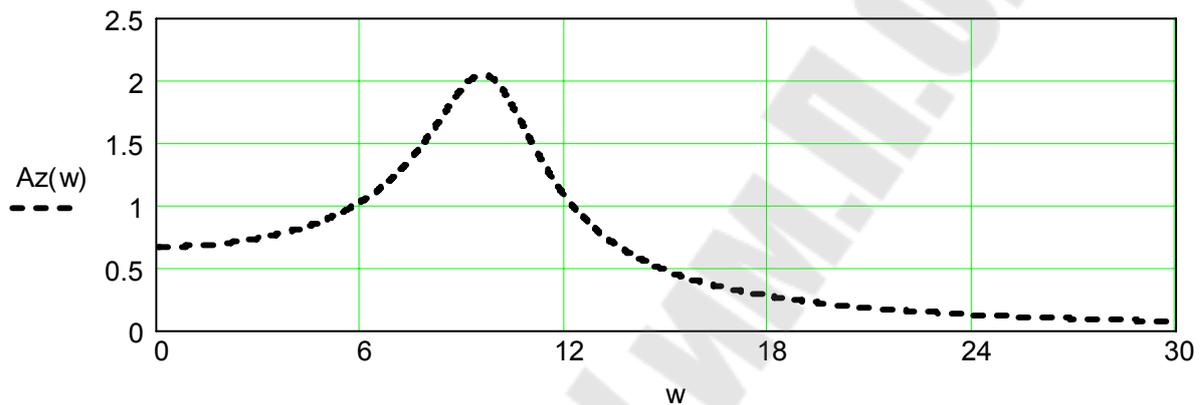


Рис. 4.8. Амплитудно-частотная характеристика САУ

2. Расчет показателя колебательности по АЧХ.

Из графика АЧХ, представленного на рис 4.9 следует, что

$$A_Z(0) = 0.667; \quad A_{Z \max} = A_Z(9.6) = 2.044; \quad M = \frac{A_{Z \max}}{A_Z(0)}; \quad M = 3.065.$$

Таким образом, расчеты и построения, выполненные в примерах №№19-21 для определения показателей качества переходного процесса показывают, что их точное определение (по ПХ см. рис 4.7 и по АЧХ см. рис 4.8) достаточно тесно коррелирует с определением по доминирующей паре корней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ксенович И.П., Тарасик В.П. Теория и проектирование автоматических систем: Учебник для студентов ВУЗов. – М.: Машиностроение, 1996. 480с.: ил.
2. Макаров И.М., Менский Б.М. Линейные автоматические системы (элементы теории, методы расчета и справочный материал). – М.: Машиностроение, 1982, - 504с., ил.
3. Анхимюк В.Л. Опейко О.Ф., Михеев Н.Н. Теория автоматического управления. – Мн.: Дизайн ПРО, 2000.- 352с.: ил.
4. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1975, 768с.
5. Бохан Н. И. и др. Средства автоматики и телемеханики. М.: Агропромиздат, 1992.
6. Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем. М., «Машиностроение», 1973, 606с.
7. Яшугин Е.Я. Теория линейных непрерывных систем автоматического управления в вопросах и ответах: Справ. пособие. Мн.: Выш.шк., 1986 – 224с.: ил.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ТАБЛИЦА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛАПЛАСА

Таблица П.1.1

№	Изображение	Оригинал
1	$\frac{1}{Ts+1}$	$\alpha \cdot e^{-\alpha t}$ где: $\alpha = \frac{1}{T}$
2	$\frac{1}{s(Ts+1)}$	$1 - e^{-\alpha t}$ где: $\alpha = \frac{1}{T}$;
3	$\frac{\tau s + 1}{s(Ts+1)}$	$1 + Ce^{-\alpha t}$, где $\alpha = \frac{1}{T}$; $C = \frac{\tau - T}{T}$;
4	$\frac{s}{(Ts+1)^2}$	$\alpha^2(1 - \alpha \cdot t)e^{-\alpha t}$, где $\alpha = \frac{1}{T}$;
5	$\frac{\tau s + 1}{(Ts+1)^2}$	$(C_1 + C_2 t)e^{-\alpha t}$ где $\alpha = \frac{1}{T}$; $C_1 = \frac{\tau}{T^2}$; $C_2 = \frac{(T - \tau)}{T^3}$;
6	$\frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$C(e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t})$ где: $\alpha_1 = \frac{1}{T_1}$; $\alpha_2 = \frac{1}{T_2}$; $C = \frac{1}{T_1 - T_2}$
7	$\frac{s}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}$ где: $\alpha_1 = \frac{1}{T_1}$; $\alpha_2 = \frac{1}{T_2}$; $C_1 = \frac{1}{T_1(T_2 - T_1)}$; $C_2 = \frac{1}{T_2(T_1 - T_2)}$

Продолжение табл. П.1.1

8	$\frac{\tau s + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}$ <p>где $\alpha_1 = \frac{1}{T_1}; \quad \alpha_2 = \frac{1}{T_2};$</p> $C_1 = \frac{T_1 - \tau}{T_1(T_1 - T_2)}; C_2 = \frac{\tau - T_2}{T_2(T_1 - T_2)}$
9	$\frac{1}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$1 + C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}$ <p>где: $\alpha_1 = \frac{1}{T_1}; \quad \alpha_2 = \frac{1}{T_2};$</p> $C_1 = \frac{T_1}{T_2 - T_1}; C_2 = \frac{T_2}{T_1 - T_2};$
10	$\frac{\tau s + 1}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$1 + C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}$ <p>где: $\alpha_1 = \frac{1}{T_1}; \quad \alpha_2 = \frac{1}{T_2};$</p> $C_1 = \frac{\tau - T_1}{T_1 - T_2}; C_2 = \frac{T_2 - \tau}{T_1 - T_2}$
11	$\frac{\tau_2^2 s^2 + \tau_1 s + 1}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$1 + C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}$ <p>где: $\alpha_1 = \frac{1}{T_1}; \quad \alpha_2 = \frac{1}{T_2};$</p> $C_1 = \frac{\tau_2^2 - \tau_1 T_1 + T_1^2}{T_1(T_2 - T_1)}; \quad C_2 = \frac{\tau_2^2 - \tau_1 T_2 + T_2^2}{T_2(T_1 - T_2)};$
12	$\frac{1}{T^2 s^2 + 1}$	$\frac{1}{T} \sin \alpha \cdot t, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{1}{T}$
13	$\frac{\tau s + 1}{T^2 s^2 + 1}$	$C \sin (\alpha t + \theta),$ <p>где $\alpha = \frac{1}{T}; \quad C = \frac{\sqrt{\tau^2 + T^2}}{T}$</p> $\theta = \arctg \frac{\tau}{T}$

Продолжение табл. П.1.1

14	$\frac{1}{s(T^2s^2 + 1)}$	$1 - \cos \alpha t, \quad \text{где } \alpha = \frac{1}{T}$
15	$\frac{\tau s + 1}{s(T^2s^2 + 1)}$	$1 + C \cos(\alpha t + \theta),$ где $\alpha = \frac{1}{T}; \quad C = -\frac{\sqrt{\tau^2 + T^2}}{T}$ $\theta = \text{arctg} \frac{\tau}{T}$
16	$\frac{\tau_2^2 s^2 + \tau_1 s + 1}{s(T^2s^2 + 1)}$	$1 + C \cos(\alpha t + \theta),$ где $\alpha = \frac{1}{T};$ $C = -\frac{1}{T^2} \sqrt{\tau_1^2 T^2 + (T^2 - \tau_2^2)^2}; \theta = \text{arctg} \frac{\tau_1 T}{T^2 - \tau_2^2}$
17	$\frac{s}{T^2s^2 + 1}$	$\frac{1}{T^2} \cos \alpha t, \quad \text{где } \alpha = \frac{1}{T};$
18	$\frac{1}{(T_1^2s^2 + 1)(T_2s + 1)}$	$C_1 \sin(\alpha_1 t - \theta_1) + C_2 e^{-\alpha_2 t}$ где $\alpha_1 = \frac{1}{T_1}; \quad \alpha_2 = \frac{1}{T_2};$ $C_1 = \frac{1}{\sqrt{T_1^2 + T_2^2}}; \quad \theta = \text{arctg} \frac{T_2}{T_1}$ $C_2 = \frac{T_2}{T_1^2 + T_2^2}$

Продолжение табл. П.1.1

19	$\frac{1}{s(T_1^2 s^2 + 1)(T_2 s + 1)}$	$1 + C \cos(\alpha_1 t + \theta) + C_2 e^{-\alpha_2 t},$ <p>где $\alpha_1 = \frac{1}{T}; \quad \alpha_2 = \frac{1}{T_2};$</p> $C_1 = -\frac{T_1}{\sqrt{T_1^2 + T_2^2}}; \quad C_2 = -\frac{T_2^2}{T_1^2 + T_2^2};$ $\theta = \arctg \frac{T_2}{T_1}$
20	$\frac{S}{(T_1^2 s^2 + 1)(T_2 s + 1)}$	$C_1 \cos(\alpha_1 t - \theta) + C_2 e^{-\alpha_2 t},$ <p>где $\alpha_1 = \frac{1}{T}; \quad \alpha_2 = \frac{1}{T_2};$</p> $C_1 = -\frac{T_1}{T_1 \sqrt{T_1^2 + T_2^2}}; \quad C_2 = -\frac{1}{T_1^2 + T_2^2};$ $\theta = \arctg \frac{T_2}{T_1}$
21	$\frac{1}{(T^2 s^2 + 1)^2}$	$\frac{1}{2T} \sin \alpha t - \frac{t}{2T^2} \cos \alpha t,$ <p>где $\alpha = \frac{1}{T}$</p>
22	$\frac{\tau s + 1}{(T^2 s^2 + 1)^2}$	$C_1 \sin \alpha t + C_2 t \cos(\alpha t + \theta),$ <p>где $\alpha = \frac{1}{T}; \quad C_1 = \frac{1}{2T};$</p> $C_2 = -\frac{\sqrt{\tau^2 + T^2}}{2T^3}; \quad \theta = \arctg \frac{\tau}{T}$
23	$\frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$	$C_1 e^{-a_1 t} + C_2 e^{-a_2 t} + C_3 e^{-a_3 t}$ <p>где: $a_1 = \frac{1}{T_1}; \quad a_2 = \frac{1}{T_2}; \quad a_3 = \frac{1}{T_3};$</p> $C_1 = \frac{T_1}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)};$ $C_2 = \frac{T_2}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)};$ $C_3 = \frac{T_3}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)}$

Продолжение табл. П.1.1

24	$\frac{\tau s + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$	$C_1 e^{-a_1 t} + C_2 e^{-a_2 t} + C_3 e^{-a_3 t}$ <p>где: $a_1 = \frac{1}{T_1}; \quad a_2 = \frac{1}{T_2}; \quad a_3 = \frac{1}{T_3};$</p> $C_1 = \frac{T_1 - \tau}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)};$ $C_2 = \frac{T_2 - \tau}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)};$ $C_3 = \frac{T_3 - \tau}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)}$
25	$\frac{\tau_2^2 s + \tau_1 s + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$	$C_1 e^{-a_1 t} + C_2 e^{-a_2 t} + C_3 e^{-a_3 t}$ <p>где: $a_1 = \frac{1}{T_1}; \quad a_2 = \frac{1}{T_2}; \quad a_3 = \frac{1}{T_3};$</p> $C_1 = \frac{\tau_2^2 - \tau_1 T_1 - T_1^2}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)T_1};$ $C_2 = \frac{\tau_2^2 - \tau_1 T_2 - T_2^2}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)T_2};$ $C_3 = \frac{\tau_2^2 - \tau_1 T_3 - T_3^2}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)T_3}$
26	$\frac{1}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$	$1 + C_1 e^{-a_1 t} + C_2 e^{-a_2 t} + C_3 e^{-a_3 t}$ <p>где: $a_1 = \frac{1}{T_1}; \quad a_2 = \frac{1}{T_2}; \quad a_3 = \frac{1}{T_3};$</p> $C_1 = \frac{T_1^2}{(T_2 - T_1)(T_1 - T_3)};$ $C_2 = \frac{T_2^2}{(T_1 - T_2)(T_2 - T_3)};$ $C_3 = \frac{T_3^2}{(T_1 - T_3)(T_3 - T_2)}$
27	$\frac{\tau s + 1}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$	$1 + C_1 e^{-a_1 t} + C_2 e^{-a_2 t} + C_3 e^{-a_3 t}$ <p>где: $a_1 = \frac{1}{T_1}; \quad a_2 = \frac{1}{T_2}; \quad a_3 = \frac{1}{T_3};$</p> $C_1 = \frac{(\tau - T_1)T_1}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)};$ $C_2 = \frac{(\tau - T_2)T_2}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)};$ $C_3 = \frac{(\tau - T_3)T_3}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)}$

Продолжение табл. П.1.1

28	$\frac{\tau s + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)^2}$	$C_1 e^{-a_1 t} + C_2 e^{-a_2 t} + (C_3 + C_4 t) e^{-a_3 t}$ <p>где: $a_1 = \frac{1}{T_1}; \quad a_2 = \frac{1}{T_2}; \quad a_3 = \frac{1}{T_3};$</p> $C_1 = \frac{T_1(T_1 - \tau)}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)^2};$ $C_2 = \frac{T_2(\tau - T_2)}{(T_1 - T_2)(T_2 - T_3)^2};$ $C_3 = \frac{\tau(T_3^2 - T_1 T_2) + T_3[2T_1 T_2 - (T_1 + T_2)T_3]}{(T_1 - T_3)^2(T_2 - T_3)^2};$ $C_4 = \frac{T_3 - \tau}{T_3(T_1 - T_3)(T_2 - T_3)};$
29	$\frac{1}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)^2}$	$1 + C_1 e^{-a_1 t} + C_2 e^{-a_2 t} + (C_3 + C_4 t) e^{-a_3 t}$ <p>где: $a_1 = \frac{1}{T_1}; \quad a_2 = \frac{1}{T_2}; \quad a_3 = \frac{1}{T_3};$</p> $C_1 = -\frac{T_1^3}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)^2};$ $C_2 = \frac{T_2^3}{(T_1 - T_2)(T_2 - T_3)^2};$ $C_3 = \frac{T_3^2(-3T_1 T_2 + 2T_1 T_3 + 2T_2 T_3 - T_3^2)}{(T_1 - T_3)^2(T_2 - T_3)^2};$ $C_4 = \frac{\tau - T_3}{(T_1 - T_3)(T_2 - T_3)}$
30	$\frac{1}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)}$ $\frac{1}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)}$	$1 + C_1 e^{-a_1 t} + C_2 e^{-a_2 t} + C_3 e^{-a_3 t} + C_4 e^{-a_4 t}$ <p>где: $a_1 = \frac{1}{T_1}; \quad a_2 = \frac{1}{T_2}; \quad a_3 = \frac{1}{T_3};$</p> $a_4 = \frac{1}{T_4};$ $C_1 = -\frac{T_1^3}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)(T_1 - T_4)};$ $C_2 = -\frac{T_2^3}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)(T_2 - T_4)};$ $C_3 = -\frac{T_3^3}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)(T_3 - T_4)};$ $C_4 = -\frac{T_4^3}{(T_4 - T_1)(T_4 - T_2)(T_4 - T_3)}$

Продолжение табл. П.1.1

31	$\frac{\tau s + 1}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)}$	$1 + C_1 e^{-a_1 t} + C_2 e^{-a_2 t} + C_3 e^{-a_3 t} + C_4 e^{-a_4 t}$ <p>где: $a_1 = \frac{1}{T_1}; \quad a_2 = \frac{1}{T_2}; \quad a_3 = \frac{1}{T_3};$ $a_4 = \frac{1}{T_4};$</p> $C_1 = \frac{(\tau - T_1) T_1^2}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)(T_1 - T_4)};$ $C_2 = \frac{(\tau - T_2) T_2^2}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)(T_2 - T_4)};$ $C_3 = \frac{(\tau - T_3) T_3^2}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)(T_3 - T_4)};$ $C_4 = \frac{(\tau - T_4) T_4^2}{(T_4 - T_1)(T_4 - T_2)(T_4 - T_3)}$
32	$\frac{1}{(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)},$ <p>где: $0 < \xi < 1$</p>	$C e^{-\gamma t} \sin(\lambda t),$ <p>где: $\gamma = \frac{\xi}{T}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T};$ $C = \frac{1}{\lambda T^2}$</p>
33	$\frac{\tau s + 1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1},$ <p>где: $0 < \xi < 1$</p>	$C e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \Theta),$ <p>где: $\gamma = \frac{\xi}{T}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T};$ $C = \frac{\sqrt{\tau^2 + (1 - 2\gamma\tau)T^2}}{\lambda T^3};$ $\Theta = \arctg \frac{\tau\lambda}{1 - \gamma\tau}$</p>
34	$\frac{1}{s(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)},$ <p>где: $0 < \xi < 1$</p>	$1 + C e^{-\lambda t} \sin(\lambda t + \Theta),$ <p>где: $\gamma = \frac{\xi}{T}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T};$ $C = -\frac{1}{\lambda T};$ $\Theta = \arctg \frac{\lambda}{\gamma}$</p>

Продолжение табл. П.1.1

<p>35</p>	$\frac{\tau + 1}{s(T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1)},$ <p>где: $0 < \xi < 1$</p>	$1 + Ce^{-\gamma t} \sin(\lambda t - \Theta),$ <p>где: $\gamma = \frac{\xi}{T}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T};$ $C = \frac{\sqrt{\tau^2 + (1 - 2\gamma\tau)T^2}}{\lambda T^2};$ $\Theta = \text{arctg} \frac{\lambda T^2}{\tau - \gamma T^2}$ </p>
<p>36</p>	$\frac{\tau + 1}{(T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$ <p>где: $0 < \xi < 1$</p>	$C_1 e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \Theta) + C_2 e^{-at},$ <p>где: $\gamma = \frac{\xi}{T_1}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T_1}; \quad a = \frac{1}{T_2};$ $C_1 = \frac{1}{\lambda T_1^2} \sqrt{\frac{T_1^2(1 - 2\gamma\tau) + \tau^2}{T_1^2(1 - 2\gamma T_2) + T_2^2}};$ $C_2 = \frac{T_2 - \tau}{T_1^2(1 - 2\gamma T_2) + T_2^2};$ $\Theta = -\text{arctg} \frac{\lambda T_2}{1 - \gamma T_2} + \text{arctg} \frac{\lambda \tau}{1 - \gamma \tau}$ </p>
<p>37</p>	$\frac{1}{s(T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$ <p>где: $0 < \xi < 1$</p>	$1 + C_1 e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \Theta) + C_2 e^{-at},$ <p>где: $\gamma = \frac{\xi}{T_1}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T_1}; \quad a = \frac{1}{T_2};$ $C_1 = -\frac{1}{\lambda \sqrt{T_1^2(1 - 2\gamma T_2) + T_2^2}};$ $C_2 = -\frac{T_2^2}{T_1^2(1 - 2\gamma T_2) + T_2^2};$ $\Theta = -\text{arctg} \frac{\lambda T_2}{1 - \gamma T_2} + \text{arctg} \frac{\lambda}{\gamma}$ </p>

<p>38</p>	$\frac{\tau s + 1}{s(T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$ <p>где: $0 < \xi < 1$</p>	$1 + C_1 e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \Theta) + C_2 e^{-at},$ <p>где: $\gamma = \frac{\xi}{T_1}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T_1}; \quad a = \frac{1}{T_2};$</p> $C_1 = -\frac{1}{\lambda T_1} \sqrt{\frac{T_1^2(1 - 2\gamma\tau) + \tau^2}{T_1^2(1 - 2\gamma T_2) + T_2^2}};$ $C_2 = \frac{T_2(\tau - T_2)}{T_1^2(1 - 2\gamma T_2) + T_2^2};$ $\Theta = -\operatorname{arctg} \frac{\lambda T_2}{1 - \gamma T_2} + \operatorname{arctg} \frac{\lambda T_1^2}{\gamma T_1^2 - \tau}$
<p>39</p>	$\frac{s}{(T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$ <p>где: $0 < \xi < 1$</p>	$C_1 e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \Theta) + C_2 e^{-at},$ <p>где: $\gamma = \frac{\xi}{T_1}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T_1}; \quad a = \frac{1}{T_2};$</p> $C_1 = -\frac{1}{\lambda T_1^2 \sqrt{T_1^2(1 - 2\gamma T_2) + T_2^2}};$ $C_2 = -\frac{1}{T_1^2(1 - 2\gamma T_2) + T_2^2};$ $\Theta = -\operatorname{arctg} \frac{\lambda T_2}{1 - \gamma T_2} - \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\gamma}$
<p>40</p>	$\frac{1}{(T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1)(T_2 s + 1)^2},$ <p>где: $0 < \xi < 1$</p>	$C_1 e^{-\gamma t} \sin(\lambda t - \Theta) + (C_2 + C_3 t) e^{-at},$ <p>где: $\gamma = \frac{\xi}{T_1}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T_1}; \quad a = \frac{1}{T_2};$</p> $C_1 = \frac{1}{\lambda R}; \quad \Theta = 2 \operatorname{arctg} \frac{\lambda T_2}{1 - \gamma T_2};$ $C_2 = \frac{1}{R^2} [2T_1^2 T_2 (1 - \gamma T_2)];$ $C_3 = \frac{1}{R}; \quad R = T_1^2 (1 - 2\gamma T_2) + T_2^2$

41	$\frac{1}{s(T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1)(T_2 s + 1)^2},$ <p>где: $0 < \xi < 1$</p>	$1 + C_1 e^{-\gamma t} \sin(\lambda t - \Theta) + (C_2 + C_3 t) e^{-at},$ <p>где: $\gamma = \frac{\xi}{T_1}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}; \quad a = \frac{1}{T_2};$</p> $C_1 = -\frac{T_1}{\lambda R};$ $C_2 = \frac{T_2^2(4\gamma T_1^2 T_2 - 3T_1^2 - T_2^2)}{R^2};$ $C_3 = -\frac{T_2}{R};$ $\Theta = 2 \operatorname{arctg} \frac{\lambda T_2}{1 - \lambda T_2} - \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\gamma};$ $R = T_1^2(1 - 2\gamma T_2) + T_2^2$
42	$\frac{1}{(T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)},$ <p>где: $0 < \xi < 1$</p>	$C_1 e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \Theta) + C_2 e^{-a_2 t} + C_3 e^{-a_3 t},$ <p>где: $\gamma = \frac{\xi}{T_1}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}; \quad a_2 = \frac{1}{T_2};$</p> $a_3 = \frac{1}{T_3};$ $C_1 = -\frac{1}{\lambda \sqrt{R_2 R_3}};$ $C_2 = \frac{T_2^2}{(T_2 - T_3) R_2}; \quad C_3 = \frac{T_3^2}{(T_3 - T_2) R_3};$ $R_2 = T_1^2(1 - 2\gamma T_2) + T_2^2;$ $R_3 = T_1^2(1 - 2\gamma T_3) + T_3^2;$ $\Theta = \operatorname{arctg} \frac{\lambda(T_1^2 - T_2 T_3)}{(T_2 + T_3) - \gamma(T_1^2 + T_2 T_3)} + \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\gamma}$
43	$\frac{\tau + 1}{(T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)},$ <p>где: $0 < \xi < 1$</p>	$C_1 e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \Theta) + C_2 e^{-a_2 t} + C_3 e^{-a_3 t},$ <p>где: $\gamma = \frac{\xi}{T_1}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}; \quad a_2 = \frac{1}{T_2};$</p> $a_3 = \frac{1}{T_3};$ $C_1 = -\frac{1}{\lambda T_1} \sqrt{\frac{\tau^2 - 2\gamma T_1^2 + T_1^2}{R_2 R_3}};$

		$C_2 = \frac{T_2 (T_2 - \tau)}{(T_2 - T_3)R_2}; \quad C_3 = \frac{T_3 (T_3 - \tau)}{(T_3 - T_2)R_3};$ $R_2 = T_1^2(1 - 2\gamma T_2) + T_2^2;$ $R_3 = T_1^2(1 - 2\gamma T_3) + T_3^2;$ $\Theta = \operatorname{arctg} \frac{\lambda(T_1^2 - T_2 T_3)}{(T_2 + T_3) - \gamma(T_1^2 + T_2 T_3)} + \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\gamma T_1}$
44	$\frac{1}{s(T_1^2 s + 2\xi T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)},$ <p>где: $0 < \xi < 1$</p>	$1 + C_1 e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \Theta) + C_2 e^{-a_2 t} + C_3 e^{-a_3 t},$ <p>где: $\gamma = \frac{\xi}{T_1}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T_1}; \quad a_2 = \frac{1}{T_2};$ $a_3 = \frac{1}{T_3};$</p> $C_1 = \frac{T_1}{\lambda \sqrt{R_2 R_3}};$ $C_2 = \frac{T_2^3}{(T_3 - T_2)R_2}; \quad C_3 = \frac{T_3^3}{(T_2 - T_3)R_3};$ $R_2 = T_1^2(1 - 2\gamma T_2) + T_2^2;$ $R_3 = T_1^2(1 - 2\gamma T_3) + T_3^2;$ $\Theta = \operatorname{arctg} \frac{\lambda(T_1^2 - T_2 T_3)}{(T_2 + T_3) - \gamma(T_1^2 + T_2 T_3)} + 2 \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\gamma}$
45	$\frac{s}{(T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)},$ <p>где: $0 < \xi < 1$</p>	$C_1 e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \Theta) + C_2 e^{-a_2 t} + C_3 e^{-a_3 t},$ <p>где: $\gamma = \frac{\xi}{T_1}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T_1}; \quad a_2 = \frac{1}{T_2};$ $a_3 = \frac{1}{T_3};$</p> $C_1 = \frac{1}{\lambda T_1 \sqrt{R_2 R_3}};$ $C_2 = \frac{T_2}{(T_3 - T_2)R_2}; \quad C_3 = \frac{T_3}{(T_2 - T_3)R_3};$ $R_2 = T_1^2(1 - 2\gamma T_2) + T_2^2;$ $R_3 = T_1^2(1 - 2\gamma T_3) + T_3^2;$ $\Theta = \operatorname{arctg} \frac{\lambda(T_1^2 - T_2 T_3)}{(T_2 + T_3) - \gamma(T_1^2 + T_2 T_3)}$

Продолжение табл. П.1.1

46	$\frac{1}{s(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)^2},$ <p>где: $0 < \xi < 1$</p>	$1 + Ce^{-\gamma t} [\lambda T \cos(\lambda t + 2\Theta) - \sin(\lambda t + \Theta) + \lambda t \cos(\lambda t + \Theta)],$ <p>где: $\gamma = \frac{\xi}{T}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T};$ $C = \frac{1}{2\lambda^3 T^3}; \quad \Theta = \text{arctg} \frac{\lambda}{\gamma}$</p>
47	$\frac{\tau s + 1}{s(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)^2},$ <p>где: $0 < \xi < 1$</p>	$1 + e^{-\gamma t} \{C \cos(\lambda t + \Theta) + C_1 [\sin(\lambda t - \Theta_1) - \lambda t \cos(\lambda t + \Theta)]\},$ <p>где: $\gamma = \frac{\xi}{T}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}; \quad C = \frac{1}{2\lambda^2 T^2};$ $C_1 = \frac{\sqrt{\tau^2 - 2\gamma\tau T^2 + T^2}}{2\lambda^3 T^4};$ $\Theta = 2\text{arctg} \frac{\lambda}{\gamma}; \quad \Theta_1 = \text{arctg} \frac{\lambda T^2}{\tau - \gamma T^2}$</p>
48	$\frac{1}{(T_1^2 s^2 + 2\xi_1 T_1 s + 1)(T_2^2 s^2 + 2\xi_2 T_2 s + 1)},$ <p>где: $0 < \xi_1 < 1;$ $0 < \xi_2 < 1$</p>	$C_1 e^{-\gamma_1 t} \sin(\lambda_1 t + \Theta_1) + C_2 e^{-\gamma_2 t} \sin(\lambda_2 t + \Theta_2),$ <p>где: $\gamma_1 = \frac{\xi_1}{T_1}; \quad \lambda_1 = \frac{\sqrt{1-\xi_1^2}}{T_1}; \quad \gamma_2 = \frac{\xi_2}{T_2};$ $\lambda_2 = \frac{\sqrt{1-\xi_2^2}}{T_2}; \quad C_1 = -\frac{1}{\lambda_1 \sqrt{R}};$ $C_2 = -\frac{1}{\lambda_2 \sqrt{R}};$</p> $R = (T_1^2 - T_2^2)^2 + 4(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_1 T_1^2 - \gamma_2 T_2^2) T_1^2 T_2^2$ $\Theta_1 = \text{arctg} \frac{\lambda_1 (T_1^2 - T_2^2)}{2\gamma_2 T_2^2 - \gamma_1 (T_1^2 + T_2^2)} + \text{arctg} \frac{\lambda_1}{\gamma_1};$ $\Theta_2 = \text{arctg} \frac{\lambda_2 (T_2^2 - T_1^2)}{2\gamma_1 T_1^2 - \gamma_2 (T_1^2 + T_2^2)} + \text{arctg} \frac{\lambda_2}{\gamma_2}$

Продолжение табл. П.1.1

<p>49</p>	$\frac{\tau + 1}{(T_1^2 s^2 + 2\xi_1 T_1 s + 1)(T_2^2 s^2 + 2\xi_2 T_2 s + 1)},$ <p>где: $0 < \xi_1 < 1;$ $0 < \xi_2 < 1$</p>	$C_1 e^{-\gamma_1 t} \sin(\lambda_1 t + \Theta_1) + C_2 e^{-\gamma_2 t} \sin(\lambda_2 t + \Theta_2),$ <p>где: $\gamma_1 = \frac{\xi_1}{T_1}; \quad \lambda_1 = \frac{\sqrt{1 - \xi_1^2}}{T_1};$ $\gamma_2 = \frac{\xi_2}{T_2}; \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{1 - \xi_2^2}}{T_2};$ $C_1 = \frac{1}{\lambda_1 T_1} \sqrt{\frac{\tau^2 + T_1^2 (1 - 2\gamma_1 \tau)}{R}};$ $C_2 = \frac{1}{\lambda_2 T_2} \sqrt{\frac{\tau^2 + T_2^2 (1 - 2\gamma_2 \tau)}{R}};$ $R = (T_1^2 - T_2^2)^2 + 4(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_1 T_1^2 - \gamma_2 T_2^2) T_1^2 T_2^2$ $\Theta_1 = \arctg \frac{\lambda_1 (T_1^2 - T_2^2)}{2\gamma_2 T_2^2 - \gamma_1 (T_1^2 + T_2^2)} - \arctg \frac{\lambda_1 T_1}{\tau - \gamma_1}$ $\Theta_2 = \arctg \frac{\lambda_2 (T_2^2 - T_1^2)}{2\gamma_1 T_1^2 - \gamma_2 (T_1^2 + T_2^2)} - \arctg \frac{\lambda_2 T_2}{\tau - \gamma_2}$</p>
<p>50</p>	$\frac{1}{s(T_1^2 s^2 + 2\xi_1 T_1 s + 1)(T_2^2 s^2 + 2\xi_2 T_2 s + 1)},$ <p>где: $0 < \xi_1 < 1;$ $0 < \xi_2 < 1$</p>	$1 + C_1 e^{-\gamma_1 t} \sin(\lambda_1 t + \Theta_1) + C_2 e^{-\gamma_2 t} \sin(\lambda_2 t + \Theta_2),$ <p>где: $\gamma_1 = \frac{\xi_1}{T_1}; \quad \lambda_1 = \frac{\sqrt{1 - \xi_1^2}}{T_1};$ $\gamma_2 = \frac{\xi_2}{T_2}; \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{1 - \xi_2^2}}{T_2};$ $C_1 = \frac{T_1}{\lambda_1 \sqrt{R}};$ $C_2 = \frac{T_2}{\lambda_2 \sqrt{R}};$ $R = (T_1^2 - T_2^2)^2 + 4(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_1 T_1^2 - \gamma_2 T_2^2)$ $\Theta_1 = \arctg \frac{\lambda_1 (T_1^2 - T_2^2)}{2\gamma_2 T_2^2 - \gamma_1 (T_1^2 + T_2^2)} + 2\arctg \frac{\lambda_1}{\gamma_1};$ $\Theta_2 = \arctg \frac{\lambda_2 (T_2^2 - T_1^2)}{2\gamma_1 T_1^2 - \gamma_2 (T_1^2 + T_2^2)} + 2\arctg \frac{\lambda_2}{\gamma_2}$</p>

<p>51</p>	$\frac{\tau + 1}{s(T_1^2 s^2 + 2\xi_1 T_1 s + 1)(T_2^2 s^2 + 2\xi_2 T_2 s + 1)},$ <p>где: $0 < \xi_1 < 1;$ $0 < \xi_2 < 1$</p>	$1 + C_1 e^{-\gamma_1 t} \sin(\lambda_1 t + \Theta_1) + C_2 e^{-\gamma_2 t} \sin(\lambda_2 t + \Theta_2),$ <p>где: $\gamma_1 = \frac{\xi_1}{T_1}; \quad \lambda_1 = \frac{\sqrt{1 - \xi_1^2}}{T_1};$ $\gamma_2 = \frac{\xi_2}{T_2}; \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{1 - \xi_2^2}}{T_2};$ $C_1 = -\frac{1}{\lambda_1} \sqrt{\frac{\tau^2 + T_1^2(1 - 2\gamma_1 \tau)}{R}};$ $C_2 = -\frac{1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{\tau^2 + T_2^2(1 - 2\gamma_2 \tau)}{R}};$ $R = (T_1^2 - T_2^2)^2 + 4(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_1 T_1^2 - \gamma_2 T_2^2) T_1^2 T_2^2$ $\Theta_1 = \arctg \frac{\lambda_1(T_1^2 - T_2^2)}{2\gamma_2 T_2^2 - \gamma_1(T_1^2 + T_2^2)} +$ $\quad + \arctg \frac{\lambda_1(\tau - 2\gamma_1 T_1^2)}{\gamma_1 \tau + (\lambda_1^2 - \gamma_1^2) T_1^2};$ $\Theta_2 = \arctg \frac{\lambda_2(T_2^2 - T_1^2)}{2\gamma_1 T_1^2 - \gamma_2(T_1^2 + T_2^2)} +$ $\quad + \arctg \frac{\lambda_2(\tau - 2\gamma_2 T_2^2)}{\gamma_2 \tau + (\lambda_2^2 - \gamma_2^2) T_2^2}$</p>
<p>52</p>	$\frac{s}{(T_1^2 s^2 + 2\xi_1 T_1 s + 1)(T_2^2 s^2 + 2\xi_2 T_2 s + 1)},$ <p>где: $0 < \xi_1 < 1;$ $0 < \xi_2 < 1$</p>	$C_1 e^{-\gamma_1 t} \sin(\lambda_1 t + \Theta_1) + C_2 e^{-\gamma_2 t} \sin(\lambda_2 t + \Theta_2),$ <p>где: $\gamma_1 = \frac{\xi_1}{T_1}; \quad \lambda_1 = \frac{\sqrt{1 - \xi_1^2}}{T_1}; \quad \gamma_2 = \frac{\xi_2}{T_2};$ $\lambda_2 = \frac{\sqrt{1 - \xi_2^2}}{T_2};$ $C_1 = \frac{1}{\lambda_1 T_1 \sqrt{R}};$ $C_2 = \frac{1}{\lambda_2 T_2 \sqrt{R}};$ $R = (T_1^2 - T_2^2)^2 + 4(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_1 T_1^2 - \gamma_2 T_2^2) T_1^2 T_2^2$ $\Theta_1 = \arctg \frac{\lambda_1(T_1^2 - T_2^2)}{2\gamma_2 T_2^2 - \gamma_1(T_1^2 + T_2^2)};$ $\Theta_2 = \arctg \frac{\lambda_2(T_2^2 - T_1^2)}{2\gamma_1 T_1^2 - \gamma_2(T_1^2 + T_2^2)}$</p>

Продолжение табл. П.1.1

53	$\frac{\tau s + 1}{(T_1^2 s^2 + 1)(T_2 s + 1)}$	$C_1 \sin(a_1 t + \Theta) + C_2 e^{-a_2 t};$ <p>где: $a_1 = \frac{1}{T_1}; \quad a_2 = \frac{1}{T_2};$</p> $C_1 = \frac{1}{T_1} \sqrt{\frac{\tau^2 + T_1^2}{T_1^2 + T_2^2}};$ $C_2 = \frac{T_2 - \tau}{T_1^2 + T_2^2};$ $\Theta = -\operatorname{arctg} \frac{T_2}{T_1} + \operatorname{arctg} \frac{\tau}{T_1}$
54	$\frac{\tau s + 1}{s(T_1^2 s^2 + 1)(T_2 s + 1)}$	$1 + C_1 \sin(a_1 t - \Theta) + C_2 e^{-a_2 t};$ <p>где: $a_1 = \frac{1}{T_1}; \quad a_2 = \frac{1}{T_2};$</p> $C_1 = \sqrt{\frac{T_1^2 + \tau^2}{T_1^2 + T_2^2}};$ $C_2 = \frac{T_2(\tau - T_2)}{T_1^2 + T_2^2};$ $\Theta = \operatorname{arctg} \frac{T_2}{T_1} + \operatorname{arctg} \frac{T_1}{\tau}$
55	$\frac{1}{(T_1^2 s^2 + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$	$C_1 \sin(a_1 t - \Theta) + C_2 e^{-a_2 t} + C_3 e^{-a_3 t}$ <p>где: $a_1 = \frac{1}{T_1}; \quad a_2 = \frac{1}{T_2}; \quad a_3 = \frac{1}{T_3};$</p> $C_1 = \frac{T_1}{\sqrt{(T_1^2 + T_2^2)(T_1^2 + T_3^2)}};$ $C_2 = \frac{T_2^2}{(T_2 - T_3)(T_1^2 + T_2^2)};$ $C_3 = \frac{T_3^2}{(T_3 - T_2)(T_1^2 + T_3^2)};$ $\Theta = \operatorname{arctg} \frac{T_1(T_2 + T_3)}{T_1^2 - T_2 T_3}$

<p>56</p>	$\frac{s}{(T_1^2 s^2 + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$	$C_1 \cos(a_1 t - \Theta) + C_2 e^{-a_2 t} + C_3 e^{-a_3 t}$ <p>где: $a_1 = \frac{1}{T_1}; \quad a_2 = \frac{1}{T_2}; \quad a_3 = \frac{1}{T_3};$</p> $C_1 = \frac{1}{\sqrt{(T_1^2 + T_2^2)(T_1^2 + T_3^2)}};$ $C_2 = \frac{T_2}{(T_3 - T_2)(T_1^2 + T_2^2)};$ $C_3 = \frac{T_3}{(T_2 - T_3)(T_1^2 + T_3^2)};$ $\Theta = \text{arctg} \frac{T_1(T_2 + T_3)}{T_1^2 - T_2 T_3}$
<p>57</p>	$\frac{1}{(T_1^2 s^2 + 1)(T_2^2 s^2 + 2\xi T_2 s + 1)},$ <p>где: $0 < \xi < 1;$</p>	$C_1 \sin(at - \Theta_1) + C_2 e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \Theta_2),$ <p>где: $a = \frac{1}{T_1}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T_2};$</p> $\gamma = \frac{\xi}{T_2};$ $C_1 = \frac{T_1}{\sqrt{R}};$ $C_2 = \frac{1}{\lambda \sqrt{R}};$ $R = (T_1^2 - T_2^2)^2 + 4\gamma^2 T_1^2 T_2^4;$ $\Theta_1 = \text{arctg} \frac{2\gamma T_1 T_2^2}{T_1^2 - T_2^2};$ $\Theta_2 = \text{arctg} \frac{\lambda(T_1^2 - T_2^2)}{\gamma(T_1^2 + T_2^2)} + \text{arctg} \frac{\lambda}{\gamma}$

Окончание табл. П.1.1

58	$\frac{1}{s(T_1^2 s^2 + 1)(T_2^2 s^2 + 2\xi T_2 s + 1)},$ <p>где: $0 < \xi < 1$;</p>	$1 + C_1 \cos(at - \Theta_1) + C_2 e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \Theta_2),$ <p>где: $a = \frac{1}{T_1}$; $\lambda = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T_2}$;</p> $\gamma = \frac{\xi}{T_2}$ $C_1 = -\frac{T_1^2}{\sqrt{(T_1^2 - T_2^2)^2 + 4\gamma^2 T_1^2 T_2^4}};$ $C_2 = -\frac{T_2}{\lambda \sqrt{(T_1^2 - T_2^2)^2 + 4\gamma^2 T_1^2 T_2^4}};$ $\Theta_1 = \text{arctg} \frac{2\gamma T_1 T_2^2}{T_1^2 - T_2^2};$ $\Theta_2 = \text{arctg} \frac{\lambda(T_1^2 - T_2^2)}{\gamma(T_1^2 + T_2^2)} + 2\text{arctg} \frac{\lambda}{\gamma}$
59	$\frac{s}{(T_1^2 s^2 + 1)(T_2^2 s^2 + 2\xi T_2 s + 1)},$ <p>где: $0 < \xi < 1$;</p>	$C_1 \cos(at - \Theta_1) + C_2 e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \Theta_2),$ <p>где: $a = \frac{1}{T_1}$; $\lambda = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T_2}$; $\gamma = \frac{\xi}{T_2}$;</p> $C_1 = \frac{1}{\sqrt{(T_1^2 - T_2^2)^2 + 4\gamma^2 T_1^2 T_2^4}};$ $C_2 = -\frac{1}{\lambda T_2 \sqrt{(T_1^2 - T_2^2)^2 + 4\gamma^2 T_1^2 T_2^4}};$ $\Theta_1 = \text{arctg} \frac{2\lambda T_1 T_2^2}{T_1^2 - T_2^2};$ $\Theta_2 = \text{arctg} \frac{\lambda(T_1^2 - T_2^2)}{\gamma(T_1^2 + T_2^2)}$

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ТРАКТОРОВ И СПЕЦИАЛЬНЫХ МАШИН

**Практикум
по одноименному курсу
для студентов специальности 1-36 12 01
«Проектирование и производство
сельскохозяйственной техники»
дневной и заочной форм обучения**

Автор-составитель: **Попов** Виктор Борисович

Подписано в печать 16.11.06.

Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.

Цифровая печать. Усл. печ. л. 3,72. Уч.-изд. л. 3,64.

Изд. № 144.

E-mail: ic@gstu.gomel.by

<http://www.gstu.gomel.by>

Отпечатано на МФУ XEROX WorkCentre 35 DADF

с макета оригинала авторского для внутреннего использования.

Учреждение образования «Гомельский государственный технический
университет имени П.О. Сухого».

246746, г. Гомель, пр. Октября, 48, т. 47-71-64.