УДК 519.95:519.872

ОТКРЫТЫЕ СЕТИ С МНОГОРЕЖИМНЫМИ СТРАТЕГИЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ И СИГНАЛАМИ

С.В. КРАВЧЕНКО
Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины», Республика Беларусь

Строится математическая модель функционирования диспетчерских служб энергетической системы с использованием теории массового обслуживания. Рассматривается открытая сеть массового обслуживания с простейшим входящим потоком, экспоненциальным обслуживанием в узлах и марковской маршрутизацией, в которую наряду с обычными заявками могут поступать сигналы и в которой заявка после обслуживания с некоторой вероятностью может трансформироваться в сигнал. Однолинейные узлы могут работать в нескольких режимах, время переключения с одного режима работы на другой имеет показательное распределение с параметром, зависящим от числа положительных заявок в узле и от номера режима. Переключение происходит только на соседние режимы работы. Устанавливается условие эргодичности и находится стационарное распределение в мультипликативной форме.

1. Введение. Задачей анализа в теории массового обслуживания является построение модели сложной технической системы в аналитическом виде. К таким системам относятся системы связи, системы технического обслуживания, транспортные системы, системы управления запасами, производственными ресурсами. Теория массового обслуживания находит применение в здравоохранении, физике, проектировании и создании ЭВМ, компьютерных сетей. Исследования в этой области являются актуальными, и фронт их постоянно расширяется. Для обеспечения эффективности усилий, связанных с исследованием современных сетей массового обслуживания, важно, чтобы соответствующие теоретические разработки были постоянно на уровне самых сложных практических задач и не выглядели бы сильно упрощенными на фоне реальных ситуаций.

В классической литературе по теории массового обслуживания предполагается, что (обычная) заявка после завершения обслуживания либо покидает сеть, либо переходит в другой узел в соответствии с марковской маршрутизацией. Однако в дополнение к стандартному движению заявок можно найти в практических задачах примеры сетей, в которых заявка перемещается по сети в зависимости от некоего внешнего события. Следуя этой логике, Е. Геленбе в 1993 г. ввел в рассмотрение сеть массового обслуживания, в которой кроме обычных положительных заявок циркулируют еще и сигналы [1]. Вслед за Геленбе многие авторы анализируют сети с сигналами. Так, Чао исследует сеть, в которой сигнал, поступающий в узел, через случайный промежуток времени заставляет заявку покинуть узел [2].

В настоящей работе также рассматривается сеть массового обслуживания с сигналами, действующими случайное время. Однако добавляется возможность для обслуживающего прибора работать в нескольких режимах. Время переключения с одного режима работы на другой имеет показательное распределение. Аналитические модели сетей с ненадежными приборами почти не рассматривались в литературе в силу сложности нахождения инвариантной меры. В статье исследуется открытая сеть с сигналами и многорежимной стратегией обслуживания при упрощающем предположении, состоящем в том, что интенсивности обслуживания не зависят от состояния узлов.

2. Постановка задачи. В рамках оперативного управления единым технологическим процессом производства, передачи и распространения электрической энергии возникает задача оптимизации и автоматизации работы диспетчерских служб. Остановимся на рассмотрении той стороны их деятельности, которая связана с выполнением требований надежности в подаче электрической энергии. Это предполагает следующие функции оперативно-диспетчерского управления: сохранность энергетического оборудования; бесперебойность энергоснабжения потребителей; надежность параллельной работы и «живучесть» энергосистем и энергообъединений.

Работа диспетчера заключается в приеме параметров о состоянии управляемой электрической сети и, в случае неисправностей в работе энергохозяйства, принятия решения о мерах по их устранению. При этом в случае нештатных ситуаций диспетчеру необходимо принимать во внимание следующую информацию: спецификацию оборудования, наличие в распоряжении специалистов, финансового и материального обеспечения. Кроме того, диспетчер информирует вышестоящую диспетчерскую службу о случившихся неполадках в системе передачи электрической энергии. При невозможности устранения неисправности объектов тем диспетчерским пунктом, в ведении которого они находятся, управление ходом работ принимает на себя вышестоящая диспетчерская служба.

С точки зрения математического моделирования системы оперативно-диспетчерского управления в аварийном режиме обладают двумя характерными особенностями: 1) наличие потока требований на выполнение планового или аварийного ремонта; 2) случайность моментов времени появления неисправностей. Поскольку указанные свойства присущи системам и сетям массового обслуживания, то естественно, что задачи управления экстренными ситуациями решаются с использованием моделей теории массового обслуживания.

Систему взаимосвязанных и взаимодействующих диспетчерских служб будем описывать открытой сетью массового обслуживания. Назовем заявками объекты, нуждающиеся в ремонтных работах. Весь поток дополнительной информации, влияющей на принятие решения о переадресации работ, будем считать сигналами. Многообразие функций, выполняемых диспетчером, отражено во многофункциональной стратегии обслуживания обслуживающих приборов в узлах сети.

3. Описание математической модели. Рассмотрим открытую сеть массового обслуживания, состоящую из N однолинейных узлов (являющихся диспетчерскими пунктами). В нее поступают два независимых стационарных пуассоновских потока: положительных заявок (неисправное оборудование, требующее ремонта) с параметром λ^+ и сигналов (дополнительная информация) с параметром λ^-. Каждая заявка входного потока заявок независимо от других заявок с вероятностью π_{0l}^+ направляется в l-ый узел, а каждый сигнал входного потока сигналов независимо от других с вероятностью π_{0l}^- направляется в l-ый узел ($l=\overline{1,N}$; $\sum_{l=1}^{N}\pi_{0l}^+=1$; $\sum_{l=1}^{N}\pi_{0l}^-=1$). Время обслуживания положительной заявки l-м узлом имеет показательное распределение с интенсивностью μ_l^+. После завершения обслуживания в l-м узле обслуженная положительная заявка перемещается в m-й узел как положительная заявка с вероятностью π_{lm}^+, как сигнал с вероятностью π_{lm}^- или покидает сеть с вероятностью $\pi_{l0}=1-\sum_{m=1}^{N}(\pi_{lm}^+ + \pi_{lm}^-)$. Каждый сигнал, поступающий в l-ый узел, действует случайное время, имеющее показательное распределение с интенсивностью $\mu_l^-(n_l)$, зависящей от числа сигналов в l-м узле. По завершении периода действия сигнал с вероятностью σ_{lm}^+ перемещает (положительную) заявку из узла l в узел m, оставляя ее положительной заявкой, а с вероятностью σ_{lm}^- перемещает (положительную) заявку из узла l в узел m, превращая ее в сигнал, с вероятностью $\sigma_{l0}=1-\sum_{m=1}^{N}(\sigma_{lm}^+ + \sigma_{lm}^-)$ уничтожает положительную заявку и пропадает; если в узле нет заявок, то сигнал исчезает. В l-м узле находится единственный прибор, который может работать в r_l+1 режимах. Состояние l-го узла характеризуется тройкой чисел (k_l, n_l, j_l), где k_i – число положительных заявок в l-м узле; n_i – число сигналов в l-м узле; j_l – номер режима, в котором работает прибор в l-м узле ($l=\overline{1,N}$; $j_l=\overline{0,r_l}$). Время работы прибора l-го узла в режиме j_l $(1 \le j_l \le r_l - 1)$ имеет показательное распределение, причем с интенсивностью $\varphi_l(k_l, j_l)$ (зависящей от числа положительных заявок k_i в узле и от номера режима j_l) прибор переходит в режим j_l-1, а с интенсивностью $\nu_l(k_l, j_l)$ (зависящей от числа заявок k_i в узле и от номера режима j_l) прибор переходит в режим j_l+1. Время пребывания в последнем r_l-м режиме имеет показательное распределение с параметром $\varphi_l(k_l, r_l)$, после чего прибор переходит в r_l-1-й режим. Во время переключения прибора с одного режима работы на другой число заявок и число сигналов в узле не изменяется.

Описанная сеть схематически представлена на рис. 1, где 1 – очередь заявок; 2 – очередь сигналов; 3 – обслуживающий прибор.

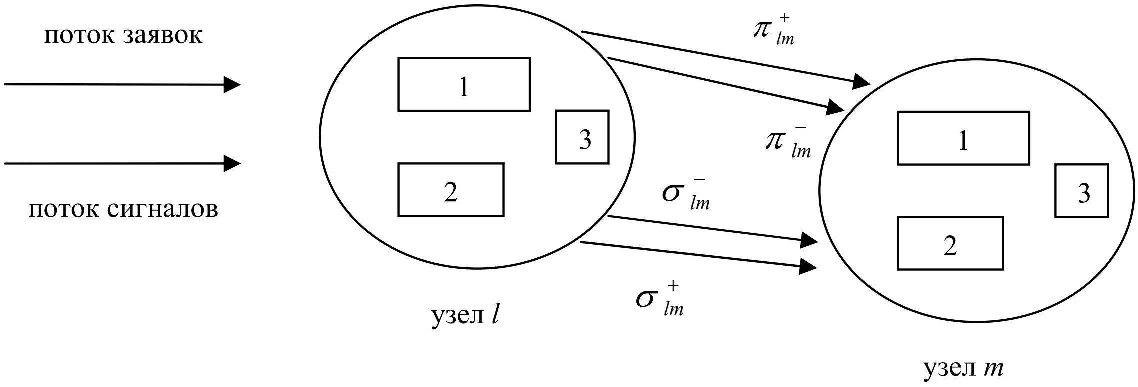

Рис. 1. Схема открытой сети массового обслуживания с многорежимной стратегией обслуживания и сигналами

Состояние сети в момент времени t будем характеризовать вектором $x(t) = (x_1(t),\ldots,x_N(t))$, где $x_l(t) = (k_l, n_l, j_l)$ – состояние l-го узла в момент времени t. В соответствии с вышесказанным здесь k_i – число заявок в l-м узле в момент времени t; n_i – число сигналов в l-м узле в момент времени t; j_l – номер режима работы прибора в l-м узле.

Основная цель работы – нахождение стационарного распределения марковского процесса $x(t)$.

4. Изолированный узел в фиктивной окружающей среде. Предположим, что все величины μ_l^+, $\mu_l^-(n_l)$, $\varphi_l(k_l, j_l)$, $\nu_l(k_l, j_l)$ строго положительны. Обозначим через α_l^+ среднюю интенсивность поступления положительных заявок в l-й узел, а через α_l^- среднюю интенсивность поступления сигналов в l-й узел. Эти интенсивности удовлетворяют следующей системе нелинейных уравнений трафика:

$$\alpha_l^+ = \lambda^+ \pi_{0l}^+ + \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k^+ (\mu_k^+ \pi_{kl}^+ + \alpha_k^- \sigma_{kl}^+)}{\alpha_k^- + \mu_k^+}, \qquad (1)$$

$$\alpha_l^- = \lambda^- \pi_{0l}^- + \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k^+ (\mu_k^+ \pi_{kl}^- + \alpha_k^- \sigma_{kl}^-)}{\alpha_k^- + \mu_k^+}. \qquad (2)$$

Из результата работы [3] следует, что система уравнений (1), (2) имеет единственное положительное решение. Везде далее будем подразумевать именно это положительное решение уравнений трафика (1)-(2).

Рассмотрим изолированный l-й узел в фиктивной окружающей среде, считая, что в него поступают два независимых пуассоновских потока: положительных заявок с параметром α_l^+ и сигналов с параметром α_l^-, где α_l^+ и α_l^- – положительное решение системы уравнений трафика (1), (2). Окружающая среда является фиктивной потому, что в самой сети потоки заявок на ее узлы не являются простейшими.

Легко проверить, что стационарные вероятности состояний изолированного узла в фиктивной окружающей среде имеют вид:

$$p_l(k_l,n_l,j_l)=C_l\left(\frac{\alpha_l^+}{\alpha_l^-+\mu_l^+}\right)^{k_l}\prod_{s=1}^{n_l}\frac{\alpha_l^-}{\mu_l^-(s)}\prod_{u=1}^{j_l}\frac{\nu_l(k_l,u-1)}{\varphi_l(k_l,u)}, \qquad (3)$$

где C_l находится из условия нормировки.

Для эргодичности изолированного узла достаточно выполнения условий:

$$\alpha_l^+<\alpha_l^-+\mu_l^+;\ \sum_{n_l=0}^{\infty}\prod_{s=1}^{n_l}\frac{\alpha_l^-}{\mu_l^-(s)}<\infty;\ \sup_{k_l,j_l}\nu_l(k_l,j_l)<\infty;$$

$$\nu_l(k_lj_l)<M\varphi_l(k_lj_l),\ M<1,\ \forall k_l,j_l. \qquad (4)$$

5. Основной результат. Пусть $q(x,y)$ – интенсивность перехода процесса $x(t)$ из состояния x в состояние y; $q(x)=\sum_{y\neq x}q(x,y)$ – интенсивность выхода процесса из состояния x; e_l – единичный вектор, у которого l-я координата равна 1. Очевидно, интенсивности перехода процесса $x(t)$ имеют вид:

$$q((k,n,j),(k+e_l,n,j))=\lambda^+\pi_{0l}^+,\ l=\overline{1,N}; \qquad (5)$$

$$q((k,n,j),(k,n+e_l,j))=\lambda^-\pi_{0l}^-,\ l=\overline{1,N}; \qquad (6)$$

$$q((k,n,j),(k-e_l,n-e_l,j))=\mu_l^-(n_l)\sigma_{l0}I_{\{k_l\neq0,n_l\neq0\}},\ l=\overline{1,N}; \qquad (7)$$

$$q((k,n,j),(k,n-e_l,j))=\mu_l^-(n_l)I_{\{n_l\neq0\}}(I_{\{k_l=0\}}+\sigma_{ll}^+I_{\{k_l\neq0\}}),\ l=\overline{1,N}; \qquad (8)$$

$$q((k,n,j),(k-e_l,n,j))=(\mu_l^+\pi_{l0}+\mu_l^-(n_l)\sigma_{ll}^-I_{\{n_l\neq0\}})I_{\{k_l\neq0\}},\ l=\overline{1,N}; \qquad (9)$$

$$q((k,n,j),(k-e_l+e_m,n,j))=\mu_l^+\pi_{lm}^+I_{\{k_l\neq0\}},\ l\neq m,\ l,m=\overline{1,N}; \qquad (10)$$

$$q((k,n,j),(k-e_l,n+e_m,j))=\mu_l^+\pi_{lm}^-I_{\{k_l\neq0\}},\ l,m=\overline{1,N}; \qquad (11)$$

$$q((k,n,j),(k-e_l+e_m,n-e_l,j))=\mu_l^-(n_l)\sigma_{lm}^+I_{\{k_l\neq0,n_l\neq0\}},\ l\neq m,\ l,m=\overline{1,N}; \qquad (12)$$

$$q((k,n,j),(k-e_l,n-e_l+e_m,j))=\mu_l^-(n_l)\sigma_{lm}^-I_{\{k_l\neq0,n_l\neq0\}},\ l\neq m,\ l,m=\overline{1,N}; \qquad (13)$$

$$q((k,n,j),(k,n,j+e_l))=\nu_l(k_l,j_l)I_{\{j_l\neq r_l\}},\ l=\overline{1,N}; \qquad (14)$$

$$q((k,n,j),(k,n,j-e_l))=\varphi_l(k_l,j_l)I_{\{j_l\neq0\}},\ l=\overline{1,N}; \qquad (15)$$

и $q(x,y)=0$ для всех иных состояний y.

Интенсивность выхода получается сложением этих интенсивностей:

$$q(k,n,j)=\lambda^++\lambda^-+\sum_{l=1}^{N}\mu_l^-(n_l)I_{\{n_l\neq0\}}+\sum_{l=1}^{N}\mu_l^+(1-\pi_{ll}^+)I_{\{k_l\neq0\}}+\sum_{l=1}^{N}\varphi_l(k_l,j_l)I_{\{j_l\neq0\}}+$$

$$+\sum_{l=1}^{N}\nu_l(k_l,j_l)I_{\{j_l\neq r_l\}}. \qquad (16)$$

Пусть $P^{+}=(\pi_{ij}^{+})$, $P^{-}=(\pi_{ij}^{-})$, $Q^{+}=(\sigma_{ij}^{+})$, $Q^{-}=(\sigma_{ij}^{-})$, $P=P^{+}+P^{-}$, $Q=Q^{+}+Q^{-}$. Основной результат выражает следующая теорема.

Теорема. *Если для всех* $l=\overline{1,N}$ *выполняются условия* (4) *и матрицы* P *и* Q *неприводимы, то марковский процесс* $x(t)$ *эргодичен, а его финальное стационарное распределение имеет форму произведения*

$$p(k,n,j,)=\prod_{l=1}^{N} p_l(k_l,n_l,j_l)\,, \tag{17}$$

где $p_l(k_l,n_l j_l)$ – стационарное распределение изолированного l-го узла в фиктивной окружающей среде, определяемое с помощью соотношений (3).

Доказательство. Для доказательства того, что $p(k,n,j)$, определенные в (17), образуют стационарное распределение марковского процесса $x(t)$, достаточно [4, 5] подобрать функцию

$$q^{R}:\ (X,X)\ \backslash\ \{(x,x),\ x\in X\}\ \to\ [0,\infty)\,,$$

которая бы удовлетворяла соотношениям:

$$p(x)q^{R}(x,y)=p(y)q(y,x) \tag{18}$$

и

$$q^{R}(x)=\sum_{y\neq x}q^{R}(x,y)=\sum_{y\neq x}q(x,y)=q(x)\,. \tag{19}$$

Если такие $q^{R}(x,y)$ удастся найти, то окажется, что $q^{R}(x,y)$ будут являться инфинитезимальными характеристиками перехода для обращенной во времени цепи Маркова $x(-t)$, а $p(x)$ – стационарными вероятностями для $x(t)$ и $x(-t)$. Положим

$$q^{R}((k,n,j),(k-e_l,n,j))=\frac{\alpha_l^{-}+\mu_l^{+}}{\alpha_l^{+}}\lambda^{+}\pi_{0l}^{+}I_{\{k_l\neq 0\}}\,,\ l=\overline{1,N}\,; \tag{20}$$

$$q^{R}((k,n,j),(k,n-e_l,j))=\frac{\mu_l^{-}(n_l)}{\alpha_l^{-}}\lambda^{-}\pi_{0l}^{-}I_{\{n_l\neq 0\}}\,,\ l=\overline{1,N}\,; \tag{21}$$

$$q^{R}((k,n,j),(k+e_l,n+e_l,j))=\frac{\alpha_l^{+}\alpha_l^{-}}{\alpha_l^{-}+\mu_l^{+}}\sigma_{l0}\,,\ l=\overline{1,N}\,; \tag{22}$$

$$q^{R}((k,n,j),(k,n+e_l,j))=\alpha_l^{-}(I_{\{k_l=0\}}+\sigma_{ll}^{+}I_{\{k_l\neq 0\}})\,,\ l=\overline{1,N}\,; \tag{23}$$

$$q^{R}((k,n,j),(k+e_l,n,j))=\frac{\alpha_l^{+}}{\alpha_l^{-}+\mu_l^{+}}(\mu_l^{+}\pi_{l0}+\mu_l^{-}(n_l)\sigma_{ll}^{-}I_{\{n_l\neq 0\}})\,,\ l=\overline{1,N}\,; \tag{24}$$

$$q^{R}((k,n,j),(k+e_l-e_m,n,j))=\frac{\alpha_l^{+}(\alpha_m^{-}+\mu_m^{+})}{\alpha_m^{+}(\alpha_l^{-}+\mu_l^{+})}\mu_l^{+}\pi_{lm}^{+}I_{\{k_m\neq 0\}}\,,\ l\neq m\,,\ l,m=\overline{1,N}\,; \tag{25}$$

$$q^R((k,n,j),(k+e_l,n-e_m,j)) = \frac{\alpha_l^+ \mu_m^-(n_m)}{\alpha_m^-(\alpha_l^- + \mu_l^+)} \mu_l^+ \pi_{lm}^- I_{\{n_m \neq 0\}}, \; l,m = \overline{1,N}; \tag{26}$$

$$q^R((k,n,j),(k+e_l-e_m,n-e_l,j)) = \frac{\alpha_l^+ (\alpha_m^- + \mu_m^+)\alpha_l^-}{\alpha_m^+(\alpha_l^- + \mu_l^+)} \sigma_{lm}^+ I_{\{k_m \neq 0\}}, \; l \neq m, \; l,m = \overline{1,N}; \tag{27}$$

$$q^R((k,n,j),(k+e_l,n+e_l-e_m,j)) = \frac{\alpha_l^+ \alpha_l^- \mu_m^-(n_m)}{\alpha_m^-(\alpha_l^- + \mu_l^+)} \sigma_{lm}^- I_{\{n_m \neq 0\}}, \; l \neq m, \; l,m = \overline{1,N}; \tag{28}$$

$$q^R((k,n,j),(k,n,j-e_l)) = \varphi_l(k_l,j_l) I_{\{j_l \neq 0\}}, \; l = \overline{1,N}; \tag{29}$$

$$q^R((k,n,j),(k,n,j+e_l)) = \nu_l(k_l,j_l) I_{\{j_l \neq r_l\}}, \; l = \overline{1,N}; \tag{30}$$

для всех остальных состояний y положим $q^R(x,y)=0$. Для функции q^R соотношение (18) действительно выполняется, что легко проверяется подстановкой в него равенств (5)-(15) и (20)-(30) и использования (3). Остается доказать (19). Складывая (20)-(30) (и учитывая уравнения трафика (1)-(2)), получим, что $q^R(x)=q(x)$ для всех состояний $x \in X$. Эргодичность марковского процесса $x(t)$ доказывается с помощью эргодической теоремы Фостера [6].

6. Обсуждение результатов. Целью данной работы явилась разработка математической модели функционирования диспетчерских служб энергетической системы, что потребовало рассмотрения новой сети массового обслуживания. Рассмотренная модель является более общим случаем по сравнению с сетью в [3]. Найденные в статье условие эргодичности и стационарное распределение состояний сети позволяют рассчитать необходимые количественные оценки для системы диспетчерских служб (например, вероятность появления очереди на ремонт, период времени от момента аварии до ее устранения, наличие незанятых ремонтных бригад и т. п.). Построенная математическая модель является основой для имитационного моделирования функционирования оперативно-диспетчерского управления.

Возможным обобщением результатов, полученных в настоящей статье, является случай, когда в узлах сети интенсивность обслуживания прибором зависит от состояния узла.

В заключение автор выражает благодарность профессору Ю.В. Малинковскому за постановку задачи и помощь в работе.

Список литературы

1. Gelenbe E. G-networks with triggered customer movement //Journal of Applied Probability. – 1993. Vol. 30. – pp. 742-748.
2. Chao Xiuli. A note on queueing networks with signals and random triggering times //Probability in the Engineering and Informational Sciences. – 1994. – Vol. 8. – pp.213-219.
3. Bocharov P.P. On Queueing Networks with Signals. Applied stochastic models and information processes: Memorial seminar dedicated to the 60th birthday of Vladimir Kalashnikov. Петрозаводск, 8-13 сентября 2002г. – Петрозаводск, 2002. – С. 27-30.

4. Henderson W., Pearce C.E., Pollet P.K., Taylor P.G. Connecting Internally Balanced Quasireversible Markov Processes //Adv.Appl. Probability. – 1992. – V.24, No.4. – P. 934-959.
5. Miayzawa M., Taylor P.G. A Geometric Product-Form Distribution for a Queueing Network with Non-Standard Batch Arrivals and Batch Transfers //Adv.Appl. Probability. – 1997. – V.29, No.2. –P. 523-544.
6. Foster F.G. On Stochastic Matrices Associated with Certain Queueing Process //Ann.Math.Statist. – 1953. – V.24, No.2. – P. 355-360.

Получено 20.11.2002 г.