Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Электроснабжение»

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ

КУРС ЛЕКЦИЙ
для студентов специальности 1-43 01 03 «Электроснабжение» дневной и заочной форм обучения

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2006

УДК 621.31:51(075.8)
ББК 65.305.142я73
М34

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом энергетического факультета ГГТУ им. П. О. Сухого (*протокол № 6 от 30.05.2005 г.*)

Авторы-составители: *Т. В. Алферова*, *О. М. Попова*

Рецензент: директор филиала РУП «Гомельэнерго» «Гомельские электрические сети» *А. И. Рябков*

Математические задачи электроэнергетики : курс лекций для студентов специ-
М34 альности 1-43 01 03 «Электроснабжение» днев. и заоч. форм обучения / авт.-сост.: Т. А. Алферова, О. М. Попова. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2006. – 65 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://gstu.local/lib. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 985-420-474-Х.

Данный курс лекций содержит шесть основных тем: общие сведения о системах электроснабжения; применение вероятностно-статистических методов в задачах электроснабжения; случайные величины в энергетике; законы распределения случайных величин.

Для студентов дневной и заочной форм обучения.

УДК 621.31:51(075.8)
ББК 65.305.142я73

ISBN 985-420-474-Х

ВВЕДЕНИЕ

Изучение дисциплины «Математические задачи электроэнергетики» имеет целью усвоение теоретических знаний и приобретение практических навыков, необходимых для самостоятельного проведения прикладных математических исследований в области получаемой в вузе специальности.

Основные задачи дисциплины при ее ориентации на специальность 1-42 01 03 «Электроснабжение» могут быть сформулированы, исходя из требований к функционированию систем электроснабжения – обеспечение бесперебойного снабжения потребителей электроэнергией установленного качества.

В данном курсе лекций приведены разделы, касающиеся теории вероятности и связаны с основными задачами, использующими понятия: случайные события, случайные величины, системы случайных величин, случайные функции и процессы.

Курс лекций составлен в соответствии с рабочей программой дисциплины «Математические задачи электроэнергетики» путем подбора и систематизации материала ряда литературных источников и предназначен для студентов специальности 1-43 01 03 «Электроснабжение» дневной и заочной формы обучения.

Для успешного усвоения материала кратко излагаются основные теоретические положения и приведены конкретные примеры.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СИСТЕМАХ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ

Под *электрической системой* понимается электрическая часть энергетической системы, т. е. совокупность элементов, вырабатывающих, преобразующих, передающих, распределяющих и потребляющих электрическую энергию.

При составлении математического описания надо учесть специфику электроэнергетической системы, заключающуюся в том, что электрическая система включает в себя силовые элементы – генераторы, трансформаторы, преобразователи, нагрузки и электрические сети (высокого напряжения, содержащие линии передач, среднего напряжения, распределительные с относительно низким напряжением).

Электрическая система содержит также элементы управления, изменяющие и регулирующие состояние системы или режим системы (так принято говорить при изложении вопросов энергетики). Для расчета режима системы необходим математический аппарат. Инженер может подобрать его готовым из огромного накопленного веками арсенала математических методов, может частично сконструировать сам. Но это возможно в том случае, если он ясно представляет себе физику работы энергосистемы, обусловленную физическими явлениями, одновременно происходящими во всех элементах системы. Взаимодействуя между собой элементы системы в любой момент связаны единством процессов производства, передачи, распределения и потребления электрической энергии. При этом под *процессами* понимают отдельные составляющие явления, отражающие некоторые связи между переменными величинами, которые отвечают явлениям, свойственным данному состоянию (или режиму) системы.

При изучении систем производства, передачи, распределения электрической энергии и управления ею необходимо рассматривать электрические и связанные с ними механические процессы. Приходится рассматривать процессы в первичных двигателях и процессы в двигателях нагрузки как единые электромеханические.

Работа системы прежде всего характеризуется значениями мощностей, (и соответственно энергий), вырабатываемых, преобразуемых, передаваемых и потребляемых всеми ее элементами. Чтобы дать математическое описание системы надо в виде математической модели представить все связи между переменными величинами процессов. Изучение этих процессов, включая и их математическую интерпретацию, направлено на обеспечение лучшей работы системы, основная задача которой – выработка энергии.

Энергия – это количественный показатель работы электрической системы. *Качество энергии* характеризуется главным образом величиной и частотой напряжения у потребителя. *Режим системы* – это ее состояние в любой момент времени или на некотором интервале времени. Режим системы определяется как указанными показателями, так и другими показателями. *Параметры режима* – показатели, зависящие от изменения режима. К параметрам режима относятся напряжения в различных точках системы, токи в ее элементах, углы расхождения векторов ЭДС и напряжений, активные и реактивные мощности и т. д.

При анализе и составлении математического описания различают три основных вида режимов электрических систем:

1) *нормальный* установившийся режим, применительно к которому проектируется электрическая система и определяются технико-экономические характеристики;

2) *послеаварийный* установившийся режим, наступающий после аварийного отключения какого-либо элемента или ряда элементов системы (в этом режиме система может работать с несколько ухудшенными технико-экономическими характеристиками); как нормальный, так и послеаварийный установившийся режимы характеризуются параметрами, не изменяющимися во времени. При этом связи между параметрами режима представляются алгебраическими уравнениями;

3) *переходный* режим, во время которого система переходит от одного состояния к другому. Для него характерно изменение всех его параметров во времени и описание его дифференциальными уравнениями.

Любой режим состоит из множества различных процессов.

Параметры режима электрической системы связаны между собой определенными соотношениями, в которые входят некоторые коэффициенты пропорциональности, зависящие от свойств элементов системы и от способов соединения их между собой. Например, ток на участке линии передачи

$$\overline{I} = (\overline{U}_1 - \overline{U}_2) / \dot{Z}_{л},$$

где $\overline{I}, \overline{U}_1, \overline{U}_2$ – параметры режима; $\dot{Z}_{л}$ – сопротивление данного участка линии.

Ток в ветви сложной системы в простейшей форме

$$\overline{I}_1 = \overline{E}_1\dot{Y}_{11} + \overline{E}_2\dot{Y}_{12} + ... + \overline{E}_k\dot{Y}_{1k},$$

где $\overline{I}$ и $\overline{E}_1, \overline{E}_2, ... \overline{E}_k$ – параметры режима; $\dot{Y}_{11}, \dot{Y}_{12}, ... \dot{Y}_{1k}$ – постоянные коэффициенты, называемые *параметрами системы*.

Параметры системы могут зависеть от изменений ее режима. В этом случае система называется *нелинейной*. Во многих практических задачах параметры системы приходится полагать постоянными, считая систему на каком-то исследуемом участке линейной. В математической интерпретации режима энергосистемы присутствует всегда и другой вид нелинейности – это нелинейность, обусловленная характером соотношений между параметрами ее режима. Например, потребляемая в сопротивлении R мощность связана квадратичной зависимостью с напряжением: $P = U^2 / R$. От нелинейностей этого вида нельзя избавиться, а поэтому их необходимо учитывать.

Схемы замещения являются также своего рода математическим инструментом инженера. Например, в зависимости от того, какая электрическая сеть и какие процессы практически интересуют инженера, он подбирает схему замещения изучаемой сети. Математический аппарат подбирается в соответствии с техническим содержанием задачи.

Для анализа установившегося режима электрической системы необходимо составление алгебраических уравнений связи. При этом можно использовать матричные методы, позволяющие компактно записывать задачу и отрабатывать ее решение.

При изучении переходных режимов уже нельзя обойтись только методами алгебры, которые пригодны для рассмотрения установившегося состояния. Процессы выражаются в форме дифференциальных уравнений, а расчет процессов сводится к решению этих уравнений, которые являются нелинейными трансцендентными уравнениями высоких порядков.

Переходные режимы делятся на нормальные (эксплуатационные) и аварийные. Появляются уравнения переходных процессов, которые отражают закономерные последовательные изменения параметров режима системы от момента возмущения до начала нового установившегося режима.

Текущая эксплуатация системы сопровождается нормальными переходными процессами. Они обусловлены изменениями нагрузки системы и реакцией на них регулирующих устройств. При нормальных переходных процессах отклонения параметров режима от их установившихся значений часто настолько невелики, что для описания системы можно применить линейные дифференциальные уравнения.

Аварийные переходные процессы могут возникнуть вследствие резких аварийных изменений режима, называемые большими возмущениями или воздействиями, приводящих к значительным отклонениям параметров режима от их исходного состояния.

При исследовании переходных режимов особое значение имеет проблема устойчивости электрических систем.

Рабочее состояние электрической системы, называемое ее установившимся режимом, должно обладать свойством устойчивости, т. е. способностью восстанавливать исходный установившийся режим или режим, практически близкий к нему после какого-либо его изменения. Степень устойчивости системы определяется некоторыми значениями величин – параметров режима, характеризующих предел устойчивости.

При анализе устойчивости электрических систем различают три ее вида.

Статическая устойчивость – способность системы восстанавливать исходное состояние после малого его отклонения (возмущения). Под *малым* понимается такое отклонение, при котором исследуемая электрическая система может изучаться на основе систем линейных дифференциальных уравнений с применением общих методов Ляпунова, способов малых колебаний, предусматривающих исследование характеристических уравнений и применение частотных характеристик.

Динамическая устойчивость – способность системы восстанавливать исходный режим или практически близкий к нему после большого возмущения (короткого замыкания, отключения линии и т. д.). При анализе динамической устойчивости для выявления изменений параметров режима (углов расхождения роторов генераторов, токов, напряжений и т. д.) необходимо составлять и интегрировать нелинейные, трансцендентные уравнения весьма высоких порядков.

Результирующая устойчивость – способность системы восстанавливать исходный режим или режим, практически близкий к нему после нарушения в течение некоторого времени синхронной работы (асинхронной работы части синхронных генераторов системы) с последующим ее восстановлением без отключения основных рабочих элементов системы.

Расчеты статической устойчивости объединяются с расчетами нормального установившегося режима, проводимыми итерационными методами. Вероятностный характер и неопределенность исходных данных, необходимых для расчета устойчивости, проявляются все заметнее по мере усложнения систем.

Неотложными задачами электроэнергетики являются проведение расчетов установившихся режимов систем, нахождение распределения в них потоков мощностей, токов и напряжений. Для решения этих задач применяются матричные записи уравнений с использованием теории графов и элементов топологии. Установившиеся режимы рассчитываются как при детерминированных, так и при вероятностных условиях.

Математические задачи электроэнергетики требуют овладения тремя разделами прикладной математики: I – методами решения сложных алгебраических уравнений при матричном их представлении; II – приемами изучения теории вероятности; III – анализом дифференциальных уравнений.

В энергетике очень важно при решении задач оптимизации, т. е. выборе оптимальных решений, использовать вероятностные характеристики случайных явлений. Так, например, надежность электроснабжения отдельных потребителей зависит от случайных событий. Она определяется аварийными повреждениями оборудования.

Схема питания потребителя может быть более надежной или малонадежной. Оптимальная схема будет соответствовать минимуму затрат. Чтобы его найти, следует оценить затраты не только на создание той или иной схемы электроснабжения, но и вероятный ущерб от перерыва электроснабжения для каждой из схем. Определение вероятного ущерба невозможно без использования методов теории вероятностей.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.1. Основные понятия

Теория вероятностей – это математическая наука, изучающая закономерности случайных событий, случайных величин и случайных функций. Рассмотрим значение термина «случайный» применительно к событиям, величинам и функциям.

Каждое событие, происходящее в окружающем мире, является результатом воздействия большого числа других событий, влияющих на возможность возникновения данного события. ***Случайным событием*** называется событие, которое может в данных конкретных условиях или произойти, или не произойти. В отличие от этого ***достоверным*** называется событие, которое обязательно произойдет, а ***невозможным*** – событие, которое не может произойти. Что дает основание считать то или иное событие случайным, достоверным или невозможным?

Только опыт или наблюдения за событиями могут привести к каким-либо выводам. Однако опыт или наблюдения должны быть при этом достаточно длительными, иначе суждение о том, что событие является случайным, достоверным или невозможным, может оказаться ошибочным. Только при достаточно большом количестве наблюдений за данным событием можно установить, является ли вообще данное событие случайным.

Естественно, возникает вопрос, существуют ли закономерности у случайных событий? Не являются ли понятия «закономерность» и «случайность» взаимно исключающими? Нет, эти понятия диалектически связаны между собой и не исключают друг друга. Если рассматривать достаточно большое число случаев, когда событие может произойти или не произойти, или производить большое число проб (испытаний), то у любого случайного события начнет проявляться определенная объективная закономерность.

Давно было замечено, что если многократно наблюдать то или иное случайное событие, то относительная частота его возникновения слабо колеблется относительно некоторой постоянной величины, причем, чем больше число наблюдаемых случаев, тем меньше размер этих колебаний. Устойчивость относительной частоты возникновения случайного события при значительном числе наблюдаемых случаев (испытаний) дает основание считать, что та величина, около которой колеблется относительная частота, характеризует объективную возможность осуществления данного случайного события. Эта величина в теории вероятностей называется вероятностью события. Таким образом, закономерность случайного события проявляется при достаточно большом числе наблюдений или испытаний.

Случайной величиной называется величина, принимающая в результате опыта то или иное значение; это значение неизвестно заранее. Между случайной величиной и случайным событием существует тесная связь. Все случайные величины подчинены тем или иным объективным закономерностям. Так, например, они могут иметь ограниченные области возможных значений; различные значения случайных величин могут иметь различные вероятности. Заметим, что к числу случайных величин относятся такие величины, как ошибки измерения, ошибки прогнозирования и т. п.

В энергетике случайные события имеют место также, как и во всех других отраслях деятельности человека. Энергетические системы объединяют большое число различных технических устройств, как генерирующих, так и передающих энергию; особенно велико число устройств, преобразующих энергию. Естественно, что условия работы большой совокупности даже однородных технических устройств резко отличаются друг от друга и носят, с точки зрения энергетической системы как целого, случайный характер. Так, например, то или иное устройство потребителей (электродвигатель, электровоз, электрическая лампа, электронагревательный прибор) случайно может быть или включенным, или отключенным от электрической сети, работать с той или иной степенью использования. В результате наложения друг на друга таких случайных событий получается та или иная величина спроса электрической мощности в энергосистеме, зависящая от совокупности случайных событий.

Только зная вероятностные характеристики таких случайных событий можно правильно определить суммарную величину спроса, величину необходимого резерва мощности и т. д.

Возможны два метода определения вероятности случайного события: классическое и статистическое.

Классическое определение, ***или подсчет вероятности***, применимо только в том случае, если изучаемые случайные события образуют так называемую полную группу попарно несовместимых и равновозможных событий. События, образующие такую группу, называются *случаями*. Это означает, что одно событие из совокупности случайных событий должно произойти обязательно, т. е. возникновение хотя бы одного из событий достоверно. Кроме того, два события из этой группы одновременно возникнуть не могут, и любое из событий данной группы имеет одинаковую вероятность. В этом случае вероятность считают равной отношению числа случаев, когда данное событие происходит, к общему числу возможных случаев. Как видно из данного определения, понятие классического определения вероятности может применяться редко.

Статистическое определение вероятности, как показывает само название, базируется на статистических материалах. Наблюдая какое-либо случайное событие или осуществляя соответствующие испытания, можно определить относительную частоту возникновения данного события. При достаточно большом числе наблюдений или испытаний относительная частота возникновения события колеблется около некоторой постоянной величины, называемой *статистической вероятностью* данного случайного события. Ее можно определить достаточно точно, если произвести большое число наблюдений или испытаний.

Под «событием» в теории вероятностей понимается всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Различные случайные события символически обозначаются большими буквами A, B, C; достоверное событие обозначается буквой U, а невозможное событие – буквой V.

2.2. Связи между событиями

Различные связи случайных событий и их символическое изображение даются ниже:

1) $A \supset B$. Событие A содержится в B, т. е. если событие A происходит, то обязательно происходит и событие B;

2) $A = B$. Событие A происходит, если происходит B, и наоборот. Это условие эквивалентно двум условиям: $A \supset B$ и $B \supset A$;

3) AB. События A и B происходят одновременно;

4) $A + B$. Происходит или событие A, или событие B, или оба одновременно (происходит хотя бы одно из событий A и B);

5) $A - B$. Событие A происходит, но при этом событие B не происходит;

6) $\overline{A}$ – событие противоположное A. Если A происходит, то $\overline{A}$ не происходит, и наоборот. При этом $A + \overline{A} = U$, т. е. одно из событий A и $\overline{A}$ обязательно происходит. Кроме того, $A \cdot \overline{A} = V$, т. е. одновременно A и $\overline{A}$ не могут происходить;

7) $AB = V$. События A и B несовместимы, т. е. одновременно произойти не могут. Отличие несовместимых событий от противоположных в том, что несовместимые события могут не происходить;

8) $A = B_1 + B_2 + B_3$ и $B_1B_2 = B_1B_3 = B_2B_3 = V$. Событие A подразделяется на частные случаи: B_1, B_2 и B_3, которые попарно несовместимы. Событие A может не происходить вообще;

9) $B_1 + B_2 + B_3 = U$ и $B_1B_2 = B_1B_3 = B_2B_3 = V$. Полная группа несовместимых событий. Одно из них обязательно происходит.

Наглядное графическое представление указанных связей между случайными событиями дает рис. 2.1.

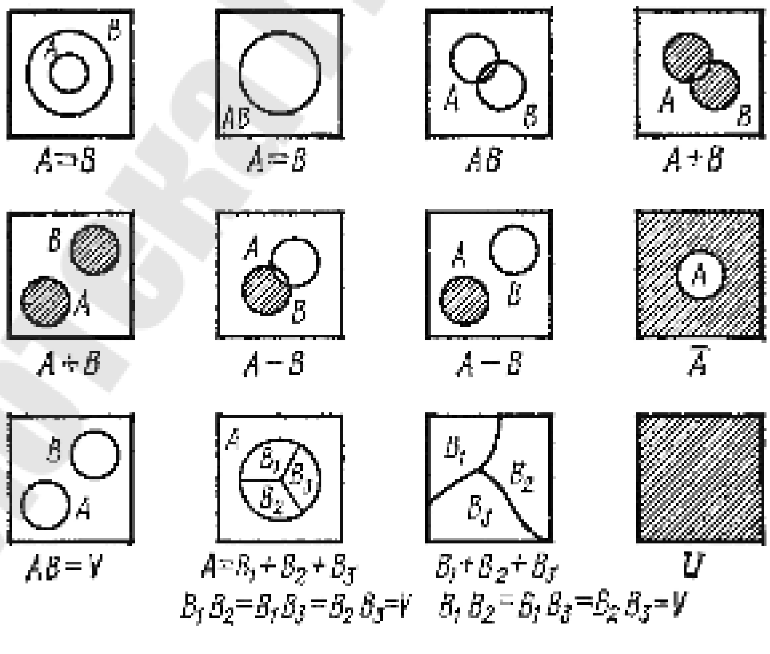

Рис. 2.1

На данном рисунке рассмотренным случаям соответствует квадрат с площадью, равной единице. На площадь этого квадрата произвольно ставится точка, что соответствует некоторому конкретному случаю. Если точка попадает в область *A*, то событие *A* происходит. Если она попадает вне области *A*, то событие *A* не происходит (площадь области *A* характеризует вероятность события *A*). Заштрихованная часть квадрата соответствует событию.

2.3. Вероятность события. Определение вероятности сложных событий в энергетике

Вероятность события есть численная мера степени объективной возможности этого события.

В дальнейшем будем обозначать вероятность события *A* через $P(A)$.

Два случайных события, например *A* и *B*, будут считаться *независимыми*, если наступление одного из них не влияет на вероятность наступления другого, и *зависимыми* – в обратном случае.

Обычно в энергетике приходится изучать вероятности не простых случайных событий, а сложных случайных событий, являющихся комбинациями ряда простых (элементарных). Определение вероятности сложного события через известные значения вероятности простых событий производится, исходя из так называемых законов вероятности сложных событий.

Для независимых случайных событий эти законы могут быть сформулированы следующим образом:

1) вероятность возникновения хотя бы одного из двух случайных независимых и несовместимых событий *A* и *B* равна сумме вероятностей этих событий. Возникновение одного из двух случайных событий *A* и *B* символически обозначается их суммой $A+B$:

$$P(A+B)=P(A)+P(B); \tag{2.1}$$

2) вероятность возникновения хотя бы одного из двух независимых и совместимых случайных событий *A* и *B* может быть записана как

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB); \tag{2.2}$$

3) вероятность одновременного возникновения двух несовместимых событий *A* и *B* равна нулю. Одновременное возникновение двух событий *A* и *B* символически обозначается их произведением *AB*. В данном случае

$$P(AB)=0; \tag{2.3}$$

4) вероятность одновременного возникновения двух независимых и совместимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A)P(B); \tag{2.4}$$

5) сумма вероятностей противоположных событий равна единице. Событие A, противоположное данному событию A, всегда происходит, если не происходит событие A, и всегда не происходит, если событие A происходит, т. е.

$$P(\overline{A}) + P(A) = 1. \tag{2.5}$$

Вероятность противоположного события

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{2.6}$$

Рассмотрим применение указанных законов в энергетике. Аварийные повреждения оборудования являются случайными событиями. При большом числе агрегатов электростанций и элементов сети повреждение одних устройств может сочетаться с повреждением других устройств. Возникает задача определения вероятности одновременного повреждения двух, трех и более устройств (агрегатов) или элементов сети. В ряде случаев необходимо также определять вероятность того, что никаких повреждений в энергосистеме нет, т. к. эта величина характеризует надежность работы всего оборудования. Эти задачи возникают обычно при необходимости выбора оптимального решения, связанного с обеспечением надежности работы энергосистемы (выбор оптимального резерва мощности), или надежности питания отдельных потребителей (выбор оптимальной схемы электроснабжения потребителя), или устойчивости энергосистемы (выбор оптимального уровня устойчивости). Во всех этих случаях отдельные повреждения рассматриваются как независимые и совместимые случайные события. Вероятность каждого из них может быть определена как статистическая вероятность на основе длительного наблюдения над аварийностью данного или однотипного оборудования.

Рассмотрим вероятности зависимых случайных событий. Пусть события A и B являются зависимыми, т. е. вероятность одного из этих событий изменяется, если происходит другое событие. Для оценки этого вводится понятие условной вероятности.

Условной вероятностью события A по B называется вероятность события A, если происходит событие B. Она обозначается через $P(A/B)$.

Основные законы для взаимозависимых случайных событий формулируются следующим образом:

1) условная вероятность события A по B при их совместимости и взаимозависимости равна отношению вероятности одновременного наступления событий A и B к вероятности события B:

$$P(A/B) = P(AB)/P(B), \qquad (2.7)$$

причем $P(AB)$ в этом случае не равно $P(A) \times P(B)$;

2) вероятность одновременного наступления двух взаимозависимых и совместимых событий, как это следует из (2.7), равна произведению условной вероятности первого события по второму на вероятность второго события:

$$P(AB) = P(A/B)P(B). \qquad (2.8)$$

Взаимозависимыми событиями в энергетике являются, например, повреждения отдельных фаз линии передачи. При повреждении одной фазы линии передачи в сети с незаземленной нейтралью напряжения других фаз возрастают в $\sqrt{3}$ раз, что увеличивает вероятность повреждения других фаз. Но даже в сети с заземленной нейтралью, где повышение напряжения на других фазах не происходит, ионизация воздуха, обусловленная коротким замыканием на одной фазе, способствует перекрытию других фаз. Если исходное повреждение одной фазы является независимым случайным событием, то одновременное повреждение фаз в том же месте является зависимым случайным событием.

2.4. Формула Бернулли и общие случаи определения вероятности повреждения оборудования

При большом числе однотипных агрегатов в электрической системе вероятности повреждения различного числа агрегатов могут быть определены по биномиальной формуле вероятности для схемы независимых испытаний (схема Бернулли).

Во многих практических случаях при многократных независимых испытаниях могут быть только два исхода: случайное событие A произойдет или не произойдет. Пусть вероятность того, что в каждом из этих независимых испытаний событие A произойдет, равна p, где p – статистическая вероятность. Тогда вероятность противоположного события (событие A не происходит)

$$q = 1 - p.$$

Зная p или q, можно определить вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A, например, повреждение агрегата, случится m раз. Обозначим эту вероятность через P_n^m. Она равна произведению числа комбинаций из n по m на вероятность события в степени m и на противоположную вероятность в степени $(n-m)$:

$$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}. \qquad (2.9)$$

Выражение (2.9) называют *формулой биномиального распределения.* Очевидно, что

$$\sum_{m=0}^{n} P_n^m = 1, \qquad (2.10)$$

т. к. эта сумма охватывает все возможные события (m варьируется от 0 до n).

Формулу (2.9) можно получить также, рассуждая следующим образом. Рассмотрим выражение $(q+p)^n$. Оно, очевидно, равно единице, так как $(q+p)=1$. Разлагая n-ю степень бинома $(q+p)$ в ряд по известному закону, получим

$$(q+p)^n = q^n + nq^{n-1}p + C_2^n q^{n-2} p^2 + ... + p^n = 1. \qquad (2.11)$$

Нетрудно понять смысл членов разложения. Первый член q^n соответствует вероятности того, что в n испытаниях событие A не произойдет ни разу, т. е. равен P_n^0, второй член – вероятности того, что в n испытаниях событие A произойдет только один раз, т. е. равен P_n^1. Действительно, вероятность того, что событие произойдет при каком-то одном определенном испытании, будет pq^{n-1}, а вероятность того, что событие произойдет при каком-то любом одном испытании, в n раз больше и т. п. Член разложения $(m+1)$-й, соответствующий вероятности того, что событие происходит m раз, равен $C_n^m p^m q^{n-m}$, т. е. P_n^m.

Используя выражение (2.9) можно записать общие случаи определения вероятностей повреждения оборудования.

Примем следующие условности:

n – общее число однотипных элементов в группе;

p – вероятность повреждения любого элемента;

$q = 1 - p$ – вероятность противоположного состояния;

m – количество поврежденных элементов.

1) повреждено m элементов из n

$$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m};$$

2) повреждено элементов от m_1 до m_2 из n

$$P_n^{m_1 \le m \le m_2} = \sum_{m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m};$$

3) повреждено не более k элементов из n

$$P_n^{0 < m \le k} = \sum_{0}^{k} C_n^m p^m q^{n-m};$$

4) повреждено более k элементов из n

$$P_n^{m > k} = \sum_{k+1}^{n} C_n^m p^m q^{n-m};$$

5) m элементов находятся в рабочем состоянии из n

$$P_n^m = C_n^m p^{n-m} q^m;$$

6) все элементы находятся в рабочем состоянии ($m = 0$)

$$P_n^0 = C_n^0 p^0 q^{n-0} = q^n.$$

3. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

3.1. Случайные величины в энергетике

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем неизвестно заранее, какое именно.

К случайным величинам в энергетике относятся такие важные параметры режима, как спрос электрической мощности и энергии, отклонения частоты и напряжения в электрических сетях от номинальных значений, располагаемая мощность электростанций, мощность агрегатов в аварийном ремонте, длительности безаварийной работы и аварийного ремонта отдельных агрегатов, напор на гидростанциях и т. д. Знание закономерностей изменения этих случайных величин необходимо как при проектировании, так и при эксплуатации энергетических систем. Основой для их изучения является статистический материал и методы теории вероятностей.

Прежде чем рассматривать случайные величины в энергетике, остановимся на методах описания их закономерностей. Случайные величины можно разделить на два класса: дискретные и непрерывные. Случайные величины, принимающие только отделенные друг от друга значения, которые можно заранее перечислить, называются *прерывными* или *дискретными случайными величинами.*

Существуют случайные величины другого типа. Возможные значения таких случайных величин не отделены друг от друга; они непрерывно заполняют некоторый промежуток, который иногда имеет резко выраженные границы, а чаще – границы неопределенные, расплывчатые.

Такие случайные величины, возможные значения которых непрерывно заполняют некоторый промежуток, называются *непрерывными случайными величинами.*

Значения непрерывных случайных величин могут изменяться непрерывно, т. е. даже в ограниченных интервалах такие величины могут иметь бесконечно большое число значений.

Примеры прерывных случайных величин:

1) число появлений герба при трех бросаниях монеты (возможные значения 0, 1, 2, 3);

2) частота появления герба в том же опыте (возможные значения $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$);

3) число отказавших элементов в приборе, состоящем из пяти элементов (возможные значения 0, 1, 2, 3, 4, 5);

4) число агрегатов, вышедших аварийно из работы.

Эти числа в ограниченном интервале являются конечными.

Примеры непрерывных случайных величин:

1) абсцисса (ордината) точки попадания в окружность, радиуса R;

2) ошибка прогнозирования суммарного спроса мощности;

3) время безотказной работы элементов системы электроснабжения.

3.2. Статистический ряд, многоугольник распределения вероятности

Рассмотрим прерывную случайную величину X с возможными значениями $x_1, x_2, ..., x_n$. Каждое из этих значений возможно, но не достоверно, и величина X может принять каждое из них с некоторой вероятностью. В результате опыта величина X примет одно из этих значений, т. е. произойдет одно из полной группы несовместных событий:

$$\left.\begin{array}{l} X = x_1, \\ X = x_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ X = x_n. \end{array}\right\}. \qquad (3.1)$$

Обозначим вероятности этих событий буквами p с соответствующими индексами:

$$P(X = x_1) = p_1;\ P(X = x_2) = p_2;\ ...;\ P(X = x_n) = p_n,$$

т. е. распределение вероятностей различных значений может быть задано таблицей распределения, в которой в верхней строке указываются все значения, принимаемые данной дискретной случайной величиной, а в нижней – вероятности соответствующих ей значений.

Так как несовместные события (3.1) образуют полную группу, то

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

т. е. сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины равна единице.

Распределение вероятностей непрерывных случайных величин нельзя представить в виде таблицы, так как число значений таких случайных величин бесконечно даже в ограниченном интервале. Кроме того, вероятность получить какое-либо определенное значение равна нулю.

Случайная величина будет полностью описана с вероятностной точки зрения, если мы зададим это распределение, т. е. в точности укажем, какой вероятностью обладает каждое из событий. Этим мы установим так называемый закон распределения случайной величины.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Про случайную величину мы будем говорить, что она подчинена данному закону распределения.

Установим форму, в которой может быть задан закон распределения прерывной случайной величины *X.* Простейшей формой задания этого закона является таблица, в которой перечислены возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности:

x_i	x_1	x_2	. . .	x_n
p_i	p_1	p_2	. . .	p_n

Такую таблицу мы будем называть *рядом распределения* случайной величины *X*.

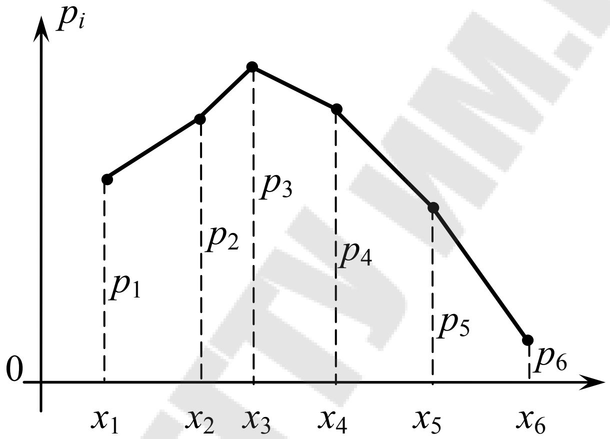

Рис. 3.1

Чтобы придать ряду распределения более наглядный вид, часто прибегают к его графическому изображению: по оси абсцисс откладываются возможные значения случайной величины, а по оси ординат – вероятности этих значений. Для наглядности полученные точки соединяются отрезками прямых. Такая фигура называется *многоугольником распределения* (рис. 3.1). Многоугольник распределения, также как и ряд распределения, полностью характеризует случайную величину. Он является одной из форм закона распределения.

Иногда удобной оказывается так называемая «механическая» интерпретация ряда распределения. Представим себе, что некоторая масса, равная единице, распределена по оси абсцисс так, что в *n* отдельных точках $x_1, x_2, ..., x_n$ сосредоточены соответственно массы $p_1, p_2, ..., p_n$. Тогда ряд распределения интерпретируется как система материальных точек с какими-то массами, расположенных на оси абсцисс.

3.3. Функция и плотность распределения вероятности

Для непрерывной случайной величины составить таблицу, в которой были бы перечислены все возможные значения такой случайной величины, невозможно. Кроме того, как мы увидим в дальнейшем, каждое отдельное значение непрерывной случайной величины обычно не обладает никакой отличной от нуля вероятностью. Следовательно, для непрерывной случайной величины не существует ряда распределения в том смысле, в каком он существует для прерывной величины. Однако различные области возможных значений случайной величины все же не являются одинаково вероятными, и для непрерывной величины существует «распределение вероятностей», хотя и не в том смысле, как для прерывной.

Для количественной характеристики этого распределения вероятностей удобно воспользоваться не вероятностью события $X = x$, а вероятностью события $X < x$, где x – некоторая текущая переменная. Вероятность этого события, очевидно, зависит от x, есть некоторая функция от x. Эта функция называется *функцией распределения* случайной величины X и обозначается $F(x)$:

$$F(x) = P(X < x). \tag{3.2}$$

Функцию распределения $F(x)$ иногда называют также *интегральной функцией распределения или интегральным законом распределения.*

Функция распределения – самая универсальная характеристика случайной величины. Она существует для всех случайных величин: как прерывных, так и непрерывных. Функция распределения полностью характеризует случайную величину с вероятностной точки зрения, т. е. является одной из форм закона распределения.

Сформулируем некоторые общие свойства функции распределения.

1. Функция распределения $F(x)$ есть неубывающая функция своего аргумента, т. е. при $x_2 > x_1$ $F(x_2) \geq F(x_1)$.

2. На минус бесконечности функция распределения равна нулю:

$$F(-\infty) = 0.$$

3. На плюс бесконечности функция распределения равна единице:

$$F(+\infty) = 1.$$

График функции распределения $F(x)$ в общем случае представляет собой график неубывающей функции (рис. 3.2), значения которой начинаются от 0 и доходят до 1, причем в отдельных точках функция может иметь скачки (разрывы).

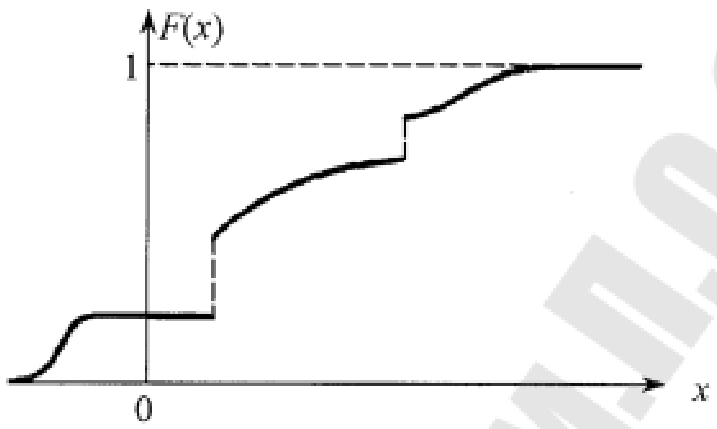

Рис. 3.2

Зная ряд распределения прерывной случайной величины можно легко построить функцию распределения этой величины. Действительно,

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i),$$

где неравенство $x_i < x$ под знаком суммы указывает, что суммирование распространяется на все те значения x_i которые меньше x.

Когда текущая переменная x проходит через какое-нибудь из возможных значений прерывной величины X, функция распределения меняется скачкообразно, причем величина скачка равна вероятности этого значения.

Функция распределения любой прерывной случайной величины всегда есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, и равны вероятностям этих значений. Сумма всех скачков функции $F(x)$ равна единице.

Введем обозначение:

$$f(x) = F'(x). \tag{3.3}$$

Функция $f(x)$ – производная функции распределения – характеризует как бы плотность, с которой распределяются значения случайной величины в данной точке. Эта функция называется *плотностью распределения* (иначе, «плотностью вероятности») непрерывной случайной величины *X*.

3.4. Числовые характеристики случайных величин

Характеристики, назначение которых – выразить в сжатой форме наиболее существенные особенности распределения, называются ***числовыми характеристиками*** случайной величины.

В теории вероятностей и математической статистике применяется большое количество различных числовых характеристик, имеющих различное назначение и различные области применения.

Среди числовых характеристик случайных величин нужно прежде всего отметить те, которые характеризуют положение случайной величины на числовой оси, т. е. указывают некоторое среднее, ориентировочное значение, около которого группируются все возможные значения случайной величины.

Из характеристик положения в теории вероятностей важнейшую роль играет *математическое ожидание* случайной величины, которое иногда называют просто *средним значением* случайной величины.

Рассмотрим дискретную случайную величину *X*, имеющую возможные значения $x_1, x_2, ..., x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n$. Нам требуется охарактеризовать каким-то числом положение значений случайной величины на оси абсцисс с учетом того, что эти значения имеют различные вероятности. Для этой цели естественно воспользоваться так называемым «средним взвешенным» из значений x_i, причем каждое значение x_i при осреднении должно учитываться с «весом», пропорциональным вероятности этого значения. Таким образом, мы вычислим среднее значение случайной величины *X*, которое мы обозначим

$$M[X] = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i},$$

или, учитывая, что $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$,

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i . \qquad (3.4)$$

Это среднее взвешенное значение и называется математическим ожиданием случайной величины. Таким образом, мы ввели в рассмотрение одно из важнейших понятий теории вероятностей – понятие математического ожидания.

Математическим ожиданием случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на вероятности этих значений.

Заметим, что в вышеприведенной формулировке определение математического ожидания справедливо, строго говоря, только для дискретных случайных величин. Ниже будет дано обобщение этого понятия на случай непрерывных величин.

Формула (3.4) для математического ожидания соответствует случаю дискретной случайной величины. Для непрерывной величины X математическое ожидание, естественно, выражается уже не суммой, а интегралом:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \tag{3.5}$$

где $f(x)$ – плотность распределения величины X.

Формула (3.5) получается из формулы (3.4), если в ней заменить отдельные значения x_i непрерывно изменяющимся параметром x, соответствующие вероятности p_i – элементом вероятности $f(x)dx$, конечную сумму – интегралом.

Кроме характеристик положения – средних, типичных значений случайной величины, – употребляется еще ряд характеристик, каждая из которых описывает то или иное свойство распределения. В качестве таких характеристик чаще всего применяются так называемые *моменты.*

Чаще всего применяются на практике моменты двух видов: начальные и центральные.

Начальным моментом s-го порядка прерывной случайной величины X называется сумма вида:

$$\alpha_s[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i^s p_i . \tag{3.6}$$

Для непрерывной случайной величины X начальным моментом s-го порядка называется интеграл

$$\alpha_s[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x) dx. \tag{3.7}$$

Нетрудно убедиться, что введенная характеристика положения – математическое ожидание – представляет собой не что иное, как *первый начальный момент* случайной величины *X*.

Общее определение начального момента *s*-го порядка, справедливое как для прерывных, так и для непрерывных величин:

$$\alpha_s[X] = M[X^s], \tag{3.8}$$

т. е. *начальным моментом s-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание s-й степени этой случайной величины.*

Введем новое понятие «центрированной случайной величины».

Пусть имеется случайная величина *X* с математическим ожиданием m_x. *Центрированной случайной величиной*, соответствующей величине *X*, называется отклонение случайной величины *X* от ее математического ожидания:

$$\overset{\circ}{X} = X - M[X]. \tag{3.9}$$

Условимся в дальнейшем везде обозначать центрированную случайную величину, соответствующую данной случайной величине, той же буквой со значком $^\circ$ наверху.

Моменты центрированной случайной величины носят название *центральных моментов.*

Таким образом, *центральным моментом порядка s* случайной величины *X* называется математическое ожидание *s*-й степени соответствующей центрированной случайной величины:

$$\mu_s[X] = M[\overset{\circ}{X}{}^s] = M[(X - M[X])^s]. \tag{3.10}$$

Для прерывной случайной величины *s*-й центральный момент выражается суммой

$$\mu_s = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M[X])^s p_i\,, \tag{3.11}$$

а для непрерывной – интегралом

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^s f(x) dx\,. \tag{3.12}$$

Для любой случайной величины *центральный момент первого порядка равен нулю*:

$$\mu_1 = M[\overset{\circ}{X}] = M[X - M[X]] = 0, \tag{3.13}$$

т. к. математическое ожидание центрированной случайной величины всегда равно нулю.

Из всех моментов в качестве характеристик случайной величины чаще всего применяются первый начальный момент (математическое ожидание) $M[X] = a_1$ и второй центральный момент μ_2.

Второй центральный момент называется *дисперсией* случайной величины. Ввиду крайней важности этой характеристики среди других моментов введем для нее специальное обозначение $D[X]$:

$$\mu_2 = D[X].$$

Согласно определению центрального момента

$$D[X] = M[\overset{\circ}{X}{}^2], \tag{3.14}$$

т. е. *дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной величины.*

Заменяя в выражении (3.14) величину $\overset{\circ}{X}$ ее выражением, имеем также:

$$D[X] = M[(X - M[X])^2]. \tag{3.15}$$

Для непосредственного вычисления дисперсии служат формулы:

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M[X])^2 p_i, \tag{3.16}$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^2 f(x)dx, \tag{3.17}$$

соответственно для прерывных и непрерывных величин.

Дисперсия случайной величины есть характеристика рассеивания, разбросанности значений случайной величины около ее математического ожидания. Само слово «дисперсия» означает «рассеивание».

Если обратиться к механической интерпретации распределения, то дисперсия представляет собой не что иное, как момент инерции заданного распределения масс относительно центра тяжести (математического ожидания).

Дисперсия случайной величины имеет размерность квадрата случайной величины; для наглядной характеристики рассеивания удобнее пользоваться величиной, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины. Для этого из дисперсии извлекают квадратный корень. Полученная величина называется *средним квадратическим отклонением* (иначе – «стандартом») случайной величины *X*. Среднее квадратическое отклонение будем обозначать $\sigma[X]$:

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}. \tag{3.18}$$

На практике часто применяется формула, выражающая дисперсию случайной величины через ее второй начальный момент, которая в новых обозначениях будет иметь вид:

$$D[X] = \alpha_2 - (M[X])^2. \tag{3.19}$$

Математическое ожидание (м. о.) $M[X]$ и дисперсия $D[X]$ (или среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$) – наиболее часто применяемые характеристики случайной величины.

В теории вероятностей доказывается ряд теорем, связанных с м. о. случайных величин, которые приводятся без доказательств:

1) м. о. постоянной величины *C* равно этой величине, т. е. $M[C] = C$, т. к. вероятность постоянной величины равна единице;

2) м. о. произведения случайной величины на постоянную *C* равно произведению постоянной величины *C* на м. о. случайной величины:

$$M[C\eta] = CM[X]; \tag{3.20}$$

3) м. о. суммы случайных величин равно сумме м. о. каждой из величин в отдельности:

$$M[\alpha + \beta] = M[\alpha] + M[\beta]; \tag{3.21}$$

4) м. о. произведения независимых случайных величин равно произведению м. о. каждой из величин:

$$M[\alpha\beta] = M[\alpha]M[\beta]. \tag{3.22}$$

В теории вероятностей доказывается ряд теорем, связанных с дисперсией случайных величин, которые приводятся без доказательств:

1. Дисперсия постоянной величины C равна нулю:

$$D[C] = 0. \quad (3.23)$$

2. Дисперсия произведения постоянной величины C на случайную величину η равна произведению квадрата постоянной величины C на дисперсию случайной величины η:

$$D[C\eta] = C^2 D[\eta]. \quad (3.24)$$

3. Дисперсия суммы постоянной C и случайной η величин равна дисперсии случайной величины:

$$D[C + X] = D[X]. \quad (3.25)$$

4. Дисперсия суммы независимых случайных величин ε и η) равна сумме дисперсий этих величин:

$$D[\varepsilon + \eta] = D[\varepsilon] + D[\eta]. \quad (3.26)$$

5. Дисперсия среднеарифметического от ряда n случайных величин с одинаковой дисперсией в n раз меньше дисперсии каждой из этих величин в отдельности:

$$D\left[\frac{\eta_1 + \eta_2 + ... + \eta_n}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\left(D[\eta_1] + D[\eta_2] + ... + D[\eta_n]\right) = \frac{D[\eta_i]}{n}.$$

3.5. Законы распределения вероятностей случайных величин

В энергетике широко применяют случайные величины со следующими распределениями вероятностей: равномерное, простейшее нормальное, общее нормальное, биномиальное, по закону Пуассона. Нормальное распределение, как простейшее, так и общее, используют при нахождении вероятностей ошибок прогнозирования нагрузки потребителей энергосистемы, отклонения нагрузки энергосистемы и отдельных ее узлов от средних значений и т. п. Биномиальное распределение и распределение по закону Пуассона применяют при определении вероятностей различных значений аварийных снижений мощности в энергосистеме и аварийного выхода различного числа агрегатов в группе однотипных и т. д. Равномерное распределение служит основой метода статистических испытаний (метод Монте-Карло), применяющегося при определении резерва мощности, отказа в срабатывании автоматики и т. п.

Из-за отсутствия соответствующих статистических материалов не всегда можно задать таблицы распределения вероятностей для дискретных случайных величин или функции распределения и плотности распределения вероятностей для непрерывных случайных величин. Однако и не для всех практических задач требуется знать вероятностные характеристики случайной величины. Во многих случаях достаточно знать основные числовые характеристики, случайных величин, к числу которых относятся математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение и моменты случайной величины.

Случайная величина может приобретать различные значения, поэтому важно знать ее среднее значение. Однако, если известна совокупность значений случайной величины, то простое среднее значение, определяемое как сумма возможных значений, разделенная на их число, еще не характеризует действительных условий. Ведь различные значения случайной величины могут иметь различные вероятности, и поэтому более вероятные значения будут чаще встречаться на практике и в большей мере определять истинное среднее значение случайной величины. Поэтому для оценки среднего (в вероятностном смысле) значения случайной величины вводится понятие математического ожидания, представляющего собой действительно среднее значение случайной величины.

3.5.1. Определение вероятности, подчиняющейся нормальному закону распределения

Простейшее нормальное распределение непрерывной случайной величины

Плотность вероятности для простейшего нормального распределения $f(x) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-x^2/2}$.

Графически плотность вероятности простейшего нормального распределения изображается кривой, симметричной относительно оси ординат с максимальным значением $1/\sqrt{2\pi}$ при $x = 0$ (рис. 3.3). Функция распределения

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx.$$

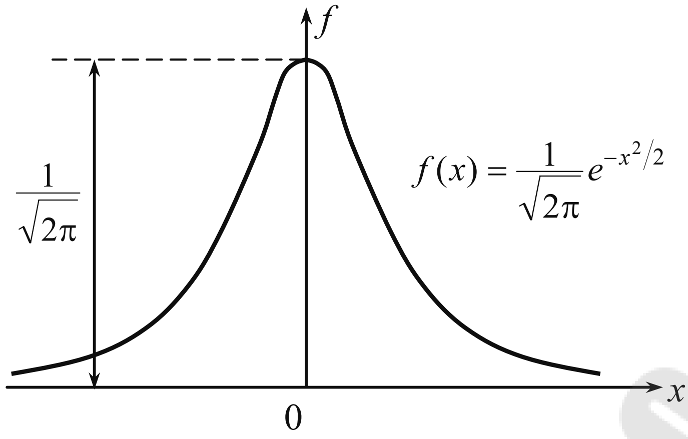

Рис. 3.3

Вероятность попадания случайной величины в интервал (x_1, x_2)

$$P(x_1 \le \eta < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{2}\Phi(x_2) - \frac{1}{2}\Phi(x_1),$$

где $\Phi(x)$ – интеграл вероятности.

Вероятность попадания в интервал $\pm\alpha$ от нулевого значения

$$P(-\alpha \le \eta < \alpha) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\alpha} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{2}\Phi(\alpha).$$

Общее нормальное распределение непрерывной случайной величины

Плотность вероятности для такого распределения

$$f(x) = (1\sqrt{2\pi}) e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)},$$

где σ и a – постоянные величины.

Кривая плотности вероятности представлена на рис. 3.4.

Наибольшее значение плотности соответствует значению $x = a$ и равно $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$. С изменением параметра σ максимальное значение плотности вероятности изменяется обратно пропорционально величине σ. Функция распределения

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} dx,$$

а, следовательно, вероятность

$$P(x_1 \le \eta < x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}\, dx\,. \qquad (3.27)$$

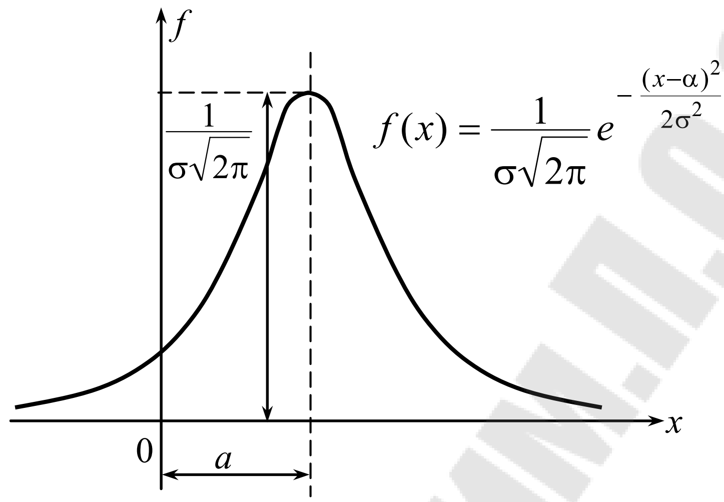

Рис. 3.4

Если в (3.27) заменить переменную *x* на *z* так, чтобы $z = (x-a)/\sigma$, то

$$P(x_1 \le \eta < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x_1-a}{\sigma}}^{\frac{x_2-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right).$$

Аналогично, функция распределения

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Таким образом, можно определять функцию распределения и вероятность попадания в заданный интервал для непрерывной случайной величины, имеющей общее нормальное распределение, пользуясь интегралом вероятностей, как и в случае простейшего нормального распределения. При этом в пределах интеграла значения *x* заменяются на $(x-a)/\sigma$.

3.5.2. Определение вероятности, подчиняющейся равномерному закону распределения

Равномерное распределение

Величина, имеющая неизменную плотность вероятности, называется равномерно распределенной непрерывной случайной величиной. При этом функция распределения изменяется по линейному закону. Если непрерывная случайная величина равномерно распределена только в интервале (a, b), то вероятность попадания в этот интервал равна единице:

$$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

Так как в данном случае плотность вероятности $f(x)$ – величина постоянная, то ее можно вынести за знак интеграла:

$$f(x)\int_a^b dx = f(x)(b-a) = 1.$$

Следовательно, для равномерного распределения

$$f(x) = 1/(b-a);$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_a^x \frac{1}{b-a}dx = \frac{x-a}{b-a}.$$

Величина плотности распределения вероятности является обратной по отношению к величине интервала. Чем больше интервал, тем меньше плотность распределения вероятности. Вероятность попадания случайной величины в интервал (c, d)

$$P(c \le \eta < d) = \int_c^d f(x)dx = \frac{d-c}{b-a}.$$

Таким образом, вероятность попадания в какой-либо внутренний интервал равна отношению величины этого интервала к величине всего интервала распределения.

3.5.3. Определение вероятности, подчиняющейся биномиальному закону распределения

Биномиальное распределение дискретной случайной величины

Это распределение соответствует схеме независимых испытаний с двумя исходами. Пусть происходит n испытаний, в каждом из которых случайное событие A может произойти с вероятностью p или не произойти с вероятностью $q = 1 - p$. Определим вероятность P_n^m того, что событие произойдет в m случаях из числа n.

Найдем вероятность того, что событие A произойдет в m первых испытаниях, но не произойдет в последующих $n - m$ испытаниях. По закону умножения вероятностей она равна $p^m q^{n-m}$. Но это только один из случаев, когда событие A происходит m раз. Необязательно, чтобы оно произошло в m первых испытаниях. Если оно произойдет в любых других по порядку испытаниях, то вероятность его будет по-прежнему равна $p^m q^{n-m}$.

Возможное число комбинаций всех испытаний, если событие A происходит в m случаях, очевидно, равно $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, поэтому искомая вероятность $P(m) = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} = p^m q^{n-m}$.

Это выражение называется *формулой биноминального закона распределения вероятностей.* Очевидно, что сумма $\sum_{m=0}^{n} P_n^m = 1$, т. к. она охватывает все случаи.

Рассматривая число возникновения события A при n испытаниях как случайную дискретную величину m, запишем формулу для вероятности дискретной величины

$$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m} \frac{n!}{m!(n-m)!} = p^m q^{n-m},$$

где m может принимать целочисленные значения от 0 до n.

3.5.4. Определение вероятности по закону Пуассона

Распределение дискретной случайной величины, принимающей целочисленные значения от 0 до ∞ и распределенной по Пуассону

Вероятность того, что дискретная случайная величина, распределенная по Пуассону, примет значение m, определяется по формуле

$$P_m = \lambda^m e^{\frac{\lambda}{m!}}. \qquad (3.28)$$

При этом вероятности значений случайной величины, распределенной по Пуассону, составляют ряд:

$$P(0) = e^{-\lambda};\ P(1) = \lambda e^{-\lambda};\ P(2) = 0{,}5\lambda^2 e^{-\lambda},$$

где λ – постоянная величина.

При малых значениях p или q вероятности различных значений случайной величины по биномиальному распределению близки к аналогичным вероятностям распределения по Пуассону. В частности, при определении вероятностей аварийного снижения мощности в энергосистеме, если p или q мало, а число агрегатов велико, может быть использована формула вероятности (3.28). Однако расчет вероятностей по Пуассону проще, т. к. имеются готовые таблицы таких вероятностей. Во многих случаях при малых значениях p или q биномиальное распределение заменяют распределением по Пуассону. В связи с изложенным, закон распределения по Пуассону часто называют *законом редких явлений*. Полученные результаты сведем в таблицу 3.1.

Таблица 3.1

<table>
<tr><th>Вид распределения</th><th>Функция распределения вероятности</th><th>Плотность вероятности</th><th>Вероятность попадания в интервал (x_1, x_2)</th></tr>
<tr><td>Равномерное в интервале (a, b)</td><td>$\frac{x-a}{b-a}$</td><td>$\frac{1}{b-a}$</td><td>$\frac{x_2-x_1}{b-a}$</td></tr>
<tr><td>Простейшее нормальное</td><td>$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}dx =$
$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(x)$</td><td>$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$</td><td>$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}}dx =$
$= \frac{1}{2}\Phi(x_2) - \frac{1}{2}\Phi(x_1)$</td></tr>
</table>

Окончание табл. 3.1

Вид распределения	Функция распределения вероятности	Плотность вероятности	Вероятность попадания в интервал (x_1, x_2)
Общее нормальное	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2}}dz = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi(\frac{x-a}{\sigma})$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{x_1-a}{\sigma}}^{\frac{x_2-a}{\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2}}dz = \frac{1}{2}\Phi(\frac{x_2-a}{\sigma}) - \frac{1}{2}\Phi(\frac{x_1-a}{\sigma})$
Биномиальное	$\sum_{m=0}^{m} C_n^m p^m q^{n-m}$	–	–
По Пуассону	$\sum_{m=0}^{m}\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	–	–

3.5.5. Числовые характеристики случайных величин при различных законах распределения вероятности

В соответствии с определениями числовых характеристик случайных величин для различных законов, распределения могут быть сведены в таблицу 3.2.

Таблица интеграла вероятностей (табл. 3.3) подсчитывается по формуле

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

причем $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Таблица 3.2

Вид распределения	Математическое ожидание $M(\eta)$	Дисперсия $D(\eta)$	Стандартное отклонение $\delta(\eta)$
Равномерное в интервале (a, b)	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$
Простейшее нормальное	0	1	1
Общее нормальное с параметрами a и σ	a	σ^2	σ

Окончание табл. 3.2

Вид распределения	**Математическое ожидание $M(\eta)$**	**Дисперсия $D(\eta)$**	**Стандартное отклонение $\delta(\eta)$**
Биномиальное:			
m	np	npq	$\sqrt{npq}$
$\frac{m}{n}$	p	$\frac{pq}{n}$	$\sqrt{\frac{pq}{n}}$
По Пуассону	λ	λ	$\sqrt{\lambda}$

Таблица 3.3

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,95	0,6579	1,90	0,9426
0,05	0,0399	1,00	0,6827	1,95	0,9488
0,10	0,0797	1,05	0,7063	2,00	0,9545
0,15	0,1192	1,10	0,7287	2,10	0,9643
0,20	0,1585	1,15	0,7499	2,20	0,9722
0,25	0,1974	1,20	0,7699	2,30	0,9786
0,30	0,2358	1,25	0,7887	2,40	0,9836
0,35	0,2737	1,30	0,8064	2,50	0,9876
0,40	0,3108	1,35	0,8230	2,60	0,9907
0,45	0,3473	1,40	0,8385	2,70	0,9931
0,50	0,3829	1,45	0,8529	2,80	0,9949
0,55	0,4177	1,50	0,8664	2,90	0,9963
0,60	0,4515	1,55	0,8789	3,00	0,9973
0,65	0,4843	1,60	0,8904	3,50	0,9995
0,70	0,5161	1,65	0,9011	4,00	0,9999
0,75	0,5467	1,70	0,9109	–	–
0,80	0,5763	1,75	0,9199	–	–
0,85	0,6047	1,80	0,9281	–	–
0,90	0,6319	1,85	0,9357	–	–

4. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

4.1. Понятие о системе случайных величин

В практических применениях теории вероятностей очень часто приходится сталкиваться с задачами, в которых результат опыта описывается не одной случайной величиной, а двумя или более случайными величинами, образующими комплекс или систему. Условимся систему нескольких случайных величин $X, Y, ..., W$ обозначать $(X, Y, ..., W)$.

Свойства системы нескольких случайных величин не исчерпываются свойствами отдельных величин, ее составляющих: помимо этого, они включают также взаимные связи (зависимости) между случайными величинами.

При рассмотрении вопросов, связанных с системами случайных величин, удобно пользоваться геометрической интерпретацией системы. Например, систему двух случайных величин (X, Y) можно изображать случайной точкой на плоскости с координатами X и Y (рис. 4.1). Аналогично система трех случайных величин может быть изображена случайной точкой в трехмерном пространстве. Часто бывает удобно говорить о системе *n*, случайных величин как о «случайной точке в пространстве *n* измерений». Несмотря на то, что последняя интерпретация не обладает непосредственной наглядностью, пользование ею дает некоторый выигрыш в смысле общности терминологии и упрощения записей.

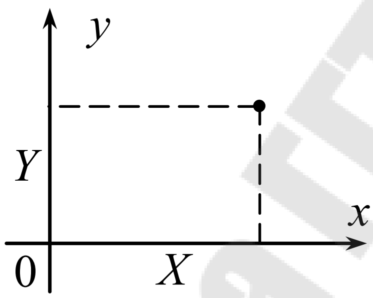

Рис. 4.1

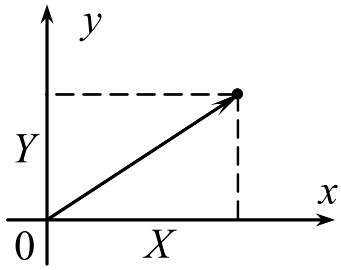

Рис. 4.2

Часто вместо образа случайной точки для геометрической интерпретации системы случайных величин пользуются образом случайного вектора. Систему двух случайных величин при этом рассматривают как случайный вектор на плоскости *x*O*y*, составляющие которого по осям представляют собой случайные величины *X*, *Y* (рис. 4.2). Система трех случайных величин изображается случайным вектором в трехмерном пространстве, система *n* случайных величин – случайным вектором в пространстве *n* измерений. При этом теория систем случайных величин рассматривается как теория случайных векторов.

4.2. Функция распределения системы двух случайных величин

Функцией распределения системы двух случайных величин (X, Y) называется вероятность совместного выполнения двух неравенств $X < x$ и $Y < y$:

$$F(x, y) = P\big((X < x)(Y < y)\big). \tag{4.1}$$

Если пользоваться для геометрической интерпретации системы образом случайной точки, то функция распределения $F(x, y)$ есть не что иное, как вероятность попадания случайной точки (X, Y) в бесконечный квадрант с вершиной в точке (x, y), лежащий левее и ниже ее (рис. 4.3).

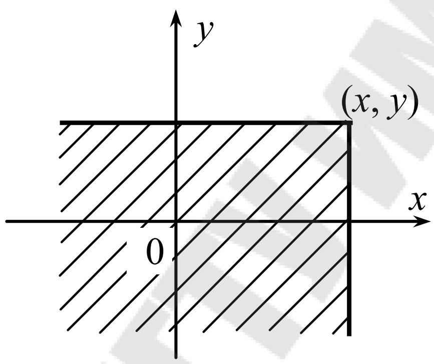

Рис. 4.3

Ранее были приведены основные свойства функции распределения $F(x)$ для одной случайной величины. Сформулируем свойства для функции распределения системы случайных величин.

1. Функция распределения $F(x,$ у) есть неубывающая функция обоих своих аргументов, т. е.

при $x_2 > x_1$ $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$;

при $y_2 > y_1$ $F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$.

2. Повсюду на $-\infty$ функция распределения равна нулю:

$$F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0.$$

3. При одном из аргументов, равном $+\infty$ функция распределения системы превращается в функцию распределения случайной величины, соответствующей другому аргументу:

$$F(x, +\infty) = F_1(x), \;\; F(+\infty, y) = F_2(y),$$

где $F_1(x), F_2(y)$ – соответственно функции распределения случайных величин X и Y.

4. Если оба аргумента равны $+\infty$, функция распределения системы равна единице:

$$F(+\infty, +\infty) = 1.$$

При рассмотрении законов распределения отдельных случайных величин приведено выражение для вероятности попадания случайной величины в пределы заданного участка. Эту вероятность выразили как через функцию распределения, так и через плотность распределения.

Аналогичным вопросом для системы двух случайных величин является вопрос о вероятности попадания случайной точки (X, Y) в пределы заданной области D на плоскости xOy (рис. 4.4).

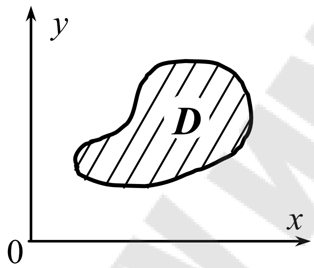

Рис. 4.4

Условимся событие, состоящее в попадании случайной точки (X, Y) в область D, обозначать символом $(X, Y) \subset D$.

Вероятность попадания случайной точки в заданную область выражается наиболее просто в том случае, когда эта область представляет собой прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям.

Выразим через функцию распределения системы вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник R, ограниченный абсциссами α и β и ординатами γ и δ (рис. 4.5).

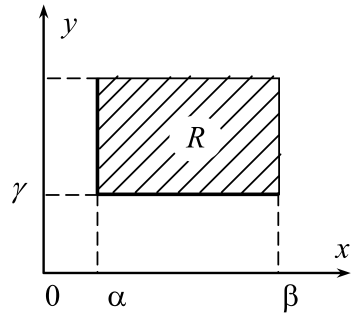

Рис. 4.5

При этом следует условиться, куда мы будем относить границы прямоугольника. Условимся включать в прямоугольник R его нижнюю и левую границы и не включать верхнюю и правую. Тогда событие $(X, Y) \subset R$ будет равносильно произведению двух событий: $\alpha \leq X < \beta$ и $\gamma \leq X < \delta$. Выразим вероятность этого события через функцию распределения системы. Для этого рассмотрим на плоскости xOy четыре бесконечных квадранта с вершинами в точках (β, δ); (α, δ); (β, γ) и (α, γ) (рис. 4.6).

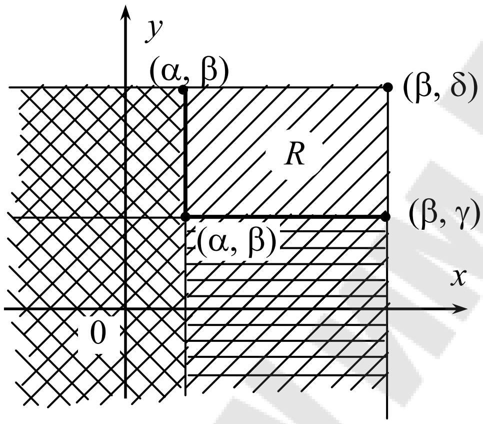

Рис. 4.6

Очевидно, вероятность попадания в прямоугольник R равна вероятности попадания в квадрант (β, δ) минус вероятность попадания в квадрант (α, δ), минус вероятность попадания в квадрант (β, γ), плюс вероятность попадания в квадрант (α, γ) (т. к. мы дважды вычли вероятность попадания в этот квадрант). Отсюда получаем формулу, выражающую вероятность попадания в прямоугольник через функцию распределения системы:

$$P\big((X, Y) \subset R\big) = F(\beta, \delta) - F(\alpha, \delta) - F(\beta, \gamma) + F(\alpha, \gamma). \qquad (4.2)$$

В дальнейшем, когда будет введено понятие плотности распределения системы, мы выведем формулу для вероятности попадания случайной точки в область произвольной формы.

4.3. Плотность распределения системы двух случайных величин

Функция распределения существует для систем любых случайных величин, как прерывных, так и непрерывных. Основное практическое значение имеют системы непрерывных случайных величин.

Распределение системы непрерывных величин обычно характеризуют не функцией распределения, а плотностью распределения.

Предположим, что функция $F(x, y)$ не только непрерывна, но и дифференцируема; тогда вторую смешанную частную производную функции $F(x, y)$ по x и y, обозначим $f(x, y)$:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = F''_{xy}(x, y). \tag{4.3}$$

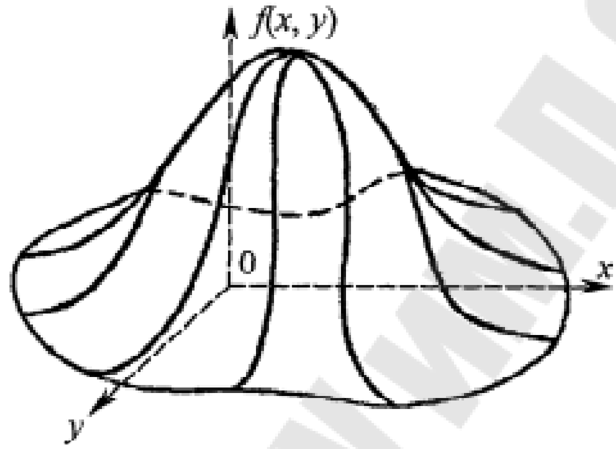

Рис. 4.7

Функция $f(x, y)$ называется плотностью распределения системы.

Если воспользоваться «механической» интерпретацией распределения системы как распределения единичной массы по плоскости xOy, то функция $f(x, y)$ представляет собой плотность распределения массы в точке (x, y).

Геометрически функцию $f(x, y)$ можно изобразить некоторой поверхностью. Эта поверхность аналогична кривой распределения для одной случайной величины и называется поверхностью распределения (рис. 4.7).

4.4. Числовые характеристики системы двух случайных величин

Ранее рассматривались числовые характеристики одной случайной величины X – начальные и центральные моменты различных порядков. Из этих характеристик важнейшими являются две: математическое ожидание m_x и дисперсия D_x.

Аналогичные числовые характеристики – начальные и центральные моменты различных порядков – можно ввести и для системы двух случайных величин.

Начальным моментом порядка *k*, *s* системы (*X*, *Y*) называется математическое ожидание произведения X^k на Y^s:

$$\alpha_{k,s} = M\left[X^k Y^s\right]. \qquad (4.4)$$

Центральным моментом порядка *k*, *s* системы (*X*, *Y*) называется математическое ожидание произведения *k*-й и *s*-й степени соответствующих центрированных величин:

$$\mu_{k,s} = M\left[\overset{\circ}{X}{}^k \overset{\circ}{Y}{}^s\right], \qquad (4.5)$$

где $\overset{\circ}{X} = X - m_x$, $\overset{\circ}{Y} = Y - m_y$.

Выпишем формулы, служащие для непосредственного подсчета моментов. Для прерывных случайных величин

$$\alpha_{k,s} = \sum_i \sum_j x_i^k y_j^s p_{ij}, \qquad (4.6)$$

$$\mu_{k,s} = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)^k (y_j - m_y)^s p_{ij}, \qquad (4.7)$$

где $p_{ij} = P\big((X = x_i)(Y = y_j)\big)$ – вероятность того, что система (*X*, *Y*) примет значения (x_i, y_j), а суммирование распространяется по всем возможным значениям случайных величин *X*, *Y*.

Для непрерывных случайных величин:

$$\alpha_{k,s} = \int_{-\infty}^{\infty}\int x^k y^s f(x, y)dxdy, \qquad (4.8)$$

$$\mu_{k,s} = \int_{-\infty}^{\infty}\int (x - m_x)^k (y - m_y)^s f(x, y)dxdy, \qquad (4.9)$$

где $f(x, y)$ – плотность распределения системы.

Помимо чисел *k* и *s*, характеризующих порядок момента по отношению к отдельным величинам, рассматривается еще суммарный порядок момента $k + s$, равный сумме показателей степеней при *X* и *Y*. Соответственно суммарному порядку моменты классифицируются на первые, вторые и т. д. На практике обычно применяются только первые и вторые моменты.

Первые начальные моменты представляют собой уже известные нам *математические ожидания* величин X и Y, входящих в систему:

$$m_x = \alpha_{1,0} = M[X^1 Y^0] = M[X],$$

$$m_y = \alpha_{0,1} = M[X^0 Y^1] = M[Y].$$

Совокупность математических ожиданий m_x, m_y представляет собой *характеристику положения* системы. Геометрически это координаты средней точки на плоскости, вокруг которой происходит рассеивание точки (X, Y).

Кроме первых начальных моментов на практике широко применяются еще *вторые центральные моменты* системы. Два из них представляют собой уже известные нам *дисперсии* величин X и Y:

$$D_x = \mu_{2,0} = M\left[\overset{\circ}{X}{}^2 \overset{\circ}{Y}{}^0\right] = M\left[\overset{\circ}{X}{}^2\right] = D[X],$$

$$D_y = \mu_{0,2} = M\left[\overset{\circ}{X}{}^0 \overset{\circ}{Y}{}^2\right] = M\left[\overset{\circ}{Y}{}^2\right] = D[Y],$$

характеризующие *рассеивание* случайной точки в направлении осей Ox и Oy.

Особую роль как характеристика системы играет *второй смешанный центральный момент*:

$$\mu_{1,1} = M\left[\overset{\circ}{X} \overset{\circ}{Y}\right],$$

т. е. математическое ожидание произведения центрированных величин.

Ввиду того, что этот момент играет важную роль в теории систем случайных величин, введем для него особое обозначение:

$$K_{xy} = M\left[\overset{\circ}{X} \overset{\circ}{Y}\right] = M\left[(X - m_x)(Y - m_y)\right]. \qquad (4.10)$$

Характеристика K_{xy} называется *корреляционным моментом* (иначе – «моментом связи») случайных величин X, Y.

Для прерывных случайных величин корреляционный момент выражается формулой

$$K_{xy} = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)(y_i - m_y) p_{ij}, \qquad (4.11)$$

а для непрерывных – формулой

$$K_{x,y} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int (x-m_x)(y-m_y)f(x,y)dxdy. \qquad (4.12)$$

Корреляционный момент есть характеристика системы случайных величин, описывающая, помимо рассеивания величин X и Y, еще и связь между ними. Для независимых случайных величин корреляционный момент равен нулю.

Если корреляционный момент двух случайных величин отличен от нуля, это есть признак наличия зависимости между ними.

Корреляционный момент характеризует не только зависимость величин, но и их рассеивание. Действительно, если, например, одна из величин (X, Y) весьма мало отклоняется от своего математического ожидания (почти не случайна), то корреляционный момент будет мал, какой бы тесной зависимостью ни были связаны величины (X, Y). Поэтому для характеристики связи между величинами (X, Y) в чистом виде переходят от момента K_{xy} к безразмерной характеристике

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \qquad (4.13)$$

где σ_x, σ_y – средние квадратические отклонения величин X, Y.

Эта характеристика называется *коэффициентом корреляции* величин X и Y. Очевидно, коэффициент корреляции обращается в нуль одновременно с корреляционным моментом; следовательно, *для независимых случайных величин коэффициент корреляции равен нулю.*

Случайные величины, для которых корреляционный момент (а значит, и коэффициент корреляции) равен нулю, называются *некоррелированными* (иногда – «несвязанными»).

Выясним, эквивалентно ли понятие некоррелированности случайных величин понятию независимости. Две независимые случайные величины всегда являются некоррелированными. Выясним: справедливо ли обратное положение, вытекает ли из некоррелированности величин их независимость? Оказывается – нет. Можно построить примеры таких случайных величин, которые являются некоррелированными, но зависимыми. Равенство нулю коэффициента корреляции – необходимое, но не достаточное условие независимости случайных величин. Из независимости случайных величин вытекает их некоррелированность; напротив, из некоррелированности величин еще не следует их независимость. Условие независимости случайных величин – более жесткое, чем условие некоррелированности.

Коэффициент корреляции характеризует не всякую зависимость, а только так называемую линейную зависимость. Линейная вероятностная зависимость случайных величин заключается в том, что при возрастании одной случайной величины другая имеет тенденцию возрастать (или же убывать) по линейному закону. Эта тенденция к линейной зависимости может быть более или менее ярко выраженной, более или менее приближаться к функциональной, т. е. самой тесной линейной зависимости. Коэффициент корреляции характеризует степень тесноты линейной зависимости между случайными величинами. Если случайные величины X и Y связаны точной линейной функциональной зависимостью:

$$Y = aX + b,$$

то $r_{xy} = \pm 1$, причем знак «плюс» или «минус» берется в зависимости от того, положителен или отрицателен коэффициент a. В общем случае, когда величины X и Y связаны произвольной вероятностной зависимостью, коэффициент корреляции может иметь значение в пределах:

$$-1 < r_{xy} < 1.$$

В случае $r_{xy} > 1$ говорят о положительной корреляции величин X и Y, в случае $r_{xy} < 1$ – об отрицательной корреляции. Положительная корреляция между случайными величинами означает, что при возрастании одной из них другая имеет тенденцию в среднем возрастать; отрицательная корреляция означает, что при возрастании одной из случайных величин другая имеет тенденцию в среднем убывать.

5. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

5.1. Понятие о случайной функции

До сих пор основным предметом исследования были случайные величины.

На практике часто приходится иметь дело со случайными величинами, непрерывно изменяющимися в процессе опыта.

Случайные величины, изменяющиеся в процессе опыта, мы будем в отличие от обычных случайных величин называть случайными функциями.

Изучением подобных случайных явлений, в которых случайность проявляется в форме процесса, занимается специальная отрасль теории вероятностей – теория случайных функций. Эту науку можно образно назвать «динамикой случайных явлений».

Теория случайных функций – раздел теорий вероятностей, развивавшийся в основном в 40-е – 60-е годы прошлого столетия. В настоящее время эта теория развивается и совершенствуется весьма быстрыми темпами. Это связано с непосредственными требованиями практики, в частности, с необходимостью решения ряда технических задач.

Известно, что за последнее время в технике все большее распространение получают системы с автоматизированным управлением. Соответственно все большие требования предъявляются к теоретической базе этого вида техники – к теории автоматического управления. Развитие этой теории невозможно без анализа ошибок, неизбежно сопровождающих процессы управления, которые всегда протекают в условиях непрерывно воздействующих случайных возмущений (так называемых «помех»). Эти возмущения по своей природе являются случайными функциями. Для того чтобы рационально выбрать конструктивные параметры системы управления, необходимо изучить ее реакцию на непрерывно воздействующие случайные возмущения, а единственным аппаратом, пригодным для такого исследования, является аппарат теории случайных функций.

Первым из основных понятий, с которыми нам придется иметь дело, является понятие случайной функции.

Случайной функцией называется функция, которая в результате опыта может принять тот или иной конкретный вид, неизвестно заранее – какой именно.

Конкретный вид, принимаемый случайной функцией в результате опыта, называется *реализацией случайной функции*. Если над случайной функцией произвести группу опытов, то мы получим группу или «семейство» реализаций этой функции.

Приведем несколько примеров случайных функций.

Примерами случайных функций в энергетике, связанными с метеорологическими условиями, могут быть: изменение располагаемой мощности и энергии гидростанций, зависящие от приточности рек; изменения суммарного спроса мощности и энергии в энергосистемах, зависящие как от изменения температуры наружного воздуха, так и от других факторов; отклонение напряжений в узлах нагрузок, зависящие от различных потребителей, так и от режима системы и времени.

Число примеров случайных функций, встречающихся в технике, можно было бы неограниченно увеличивать. Действительно, в любом случае, когда мы имеем дело с непрерывно работающей системой (системой измерения, управления, регулирования), при анализе точности работы этой системы нам приходится учитывать наличие случайных воздействий (помех). Как сами помехи, так и вызванная ими реакция системы представляют собой случайные функции времени.

До сих пор мы говорили только о случайных функциях, аргументом которых является время t. В ряде задач практики встречаются случайные функции, зависящие не от времени, а от других аргументов. Например, характеристики прочности неоднородного стержня могут рассматриваться как случайные функции абсциссы сечения x. Температура воздуха в различных слоях атмосферы может рассматриваться как случайная функция высоты H.

На практике встречаются также случайные функции, зависящие не от одного аргумента, а от нескольких. Например, аэрологические данные, характеризующие состояние атмосферы (температура, давление, ветер), представляют собой в общем случае случайные функции четырех аргументов: трех координат x, y, z и времени t.

Будем рассматривать только случайные функции одного аргумента. Так как этим аргументом чаще всего является время, будем обозначать его буквой t. Кроме того, условимся, как правило, обозначать случайные функции большими буквами $(X(t), Y(t), ...)$ в отличие от неслучайных функций $(x(t), y(t), ...)$.

Рассмотрим некоторую случайную функцию $X(t)$. Предположим, что над ней произведено n независимых опытов, в результате которых получено n реализаций (рис. 5.1). Обозначим их соответственно номеру опыта $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$.

Каждая реализация, очевидно, есть обычная (неслучайная), функция. Таким образом, в результате каждого опыта случайная функция $X(t)$ превращается в обычную, неслучайную функцию.

Зафиксируем теперь некоторое значение аргумента t и посмотрим, во что превратится при этом случайная функция $X(t)$. Очевидно, она превратится в *случайную величину* в обычном смысле слова. Условимся называть эту случайную величину *сечением случайной функции*, соответствующим данному t. Если провести «сечение» семейства реализаций при данном t (рис. 5.1), мы получим n значений, принятых случайной величиной $X(t)$ в n опытах.

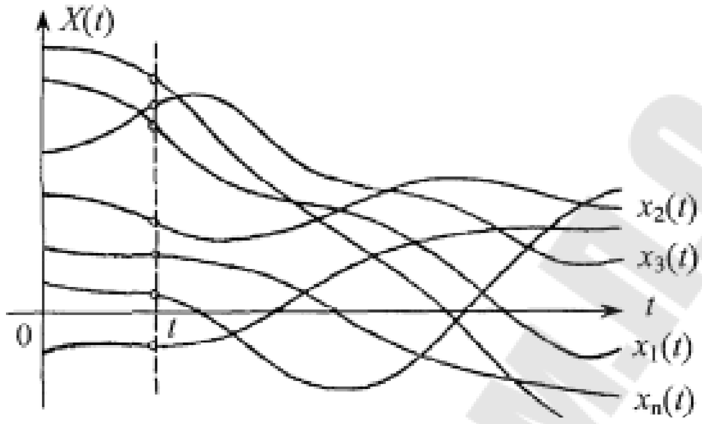

Рис. 5.1

Мы видим, что случайная функция совмещает в себе черты случайной величины и функции. Если зафиксировать значение аргумента, она превращается в обычную случайную величину; в результате каждого опыта она превращается в обычную (неслучайную) функцию.

5.2. Характеристики случайных функций

Большое значение в теории вероятностей имеют основные числовые характеристики случайных величин, математическое ожидание и дисперсия – для одной случайной величины, математические ожидания и корреляционная матрица – для системы случайных величин.

Для случайных функций также вводятся простейшие основные характеристики, аналогичные числовым характеристикам случайных величин, и устанавливаются правила действий с этими характеристиками.

В отличие от числовых характеристик случайных величин, представляющих собой определенные *числа*, характеристики случайных функций представляют собой в общем случае не числа, а *функции*.

Математическое ожидание случайной функции $X(t)$ определяется следующим образом. Рассмотрим сечение случайной функции $X(t)$ при фиксированном t. В этом сечении мы имеем обычную случайную величину; определим ее математическое ожидание. Очевидно, в общем случае оно зависит от t, т. е. представляет собой некоторую функцию t:

$$m_x(t) = M[X(t)]. \quad (5.1)$$

Таким образом, *математическим ожиданием случайной функции X(t) называется неслучайная функция* $m_x(t)$, *которая при каждом значении аргумента t равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайной функции*.

По смыслу математическое ожидание случайной функции есть некоторая *средняя функция*, около которой различным образом варьируются конкретные реализации случайной функции.

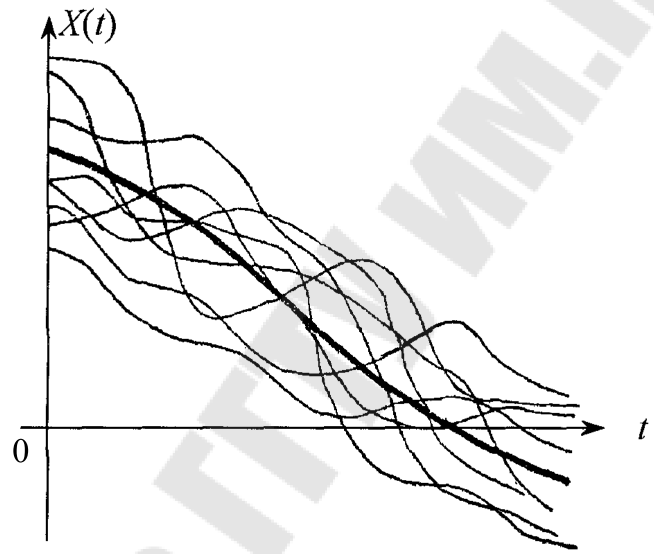

Рис. 5.2

На рис. 5.2 тонкими линиями показаны реализации случайной функции, жирной линией – ее математическое ожидание.

Аналогичным образом определяется дисперсия случайной функции. *Дисперсией случайной функции* $X(t)$ *называется неслучайная функция* $D_x(t)$, *значение которой для каждого t равно дисперсии соответствующего сечения случайной функции*:

$$D_x(t) = D[X(t)]. \quad (5.2)$$

Дисперсия случайной функции при каждом t характеризует разброс возможных реализации случайной функции относительно среднего, иными словами, «степень случайности» случайной функции.

Очевидно, $D_x(t)$ есть неотрицательная функция. Извлекая из нее квадратный корень, получим функцию $\sigma_x(t)$ – среднее квадратическое отклонение случайной функции:

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}\,. \tag{5.3}$$

Математическое ожидание и дисперсия представляют собой весьма важные характеристики случайной функции; однако для описания основных особенностей случайной функции этих характеристик недостаточно. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим две случайные функции $X_1(t)$ и $X_2(t)$, наглядно изображенные семействами реализаций на рис. 5.3 и рис. 5.4.

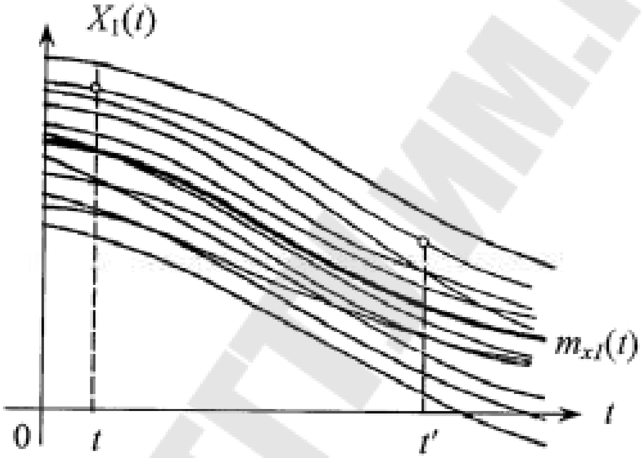

Рис. 5.3

У случайных функций $X_1(t)$ и $X_2(t)$ примерно одинаковые математические ожидания и дисперсии; однако характер этих случайных функций резко различен. Для случайной функции $X_1(t)$ (рис. 5.3) характерно плавное, постепенное изменение. Если, например, в точке t случайная функция $X_1(t)$ приняла значение, заметно превышающее среднее, то весьма вероятно, что и в точке t' она также примет значение больше среднего. Для случайной функции $X_1(t)$ характерна ярко выраженная зависимость между ее значениями при различных t. Напротив, случайная функция $X_2(t)$ (рис. 5.4) имеет резко колебательный характер с неправильными, беспорядочными колебаниями. Для такой случайной функции характерно быстрое затухание зависимости между ее значениями по мере увеличения расстояния по t между ними.

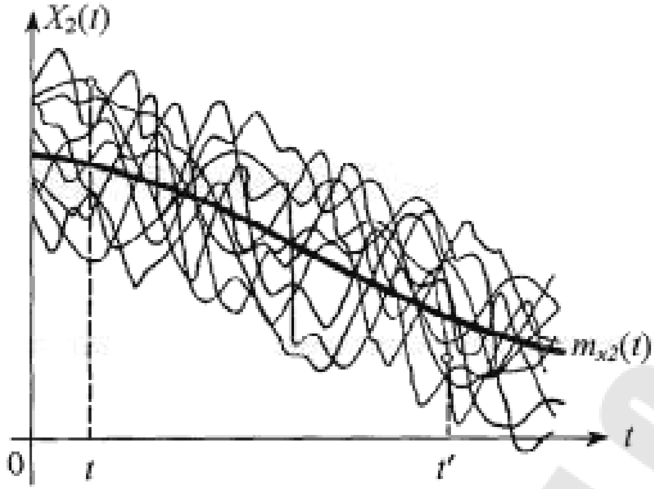

Рис. 5.4

Очевидно, внутренняя структура обоих случайных процессов совершенно различна, но это различие не улавливается ни математическим ожиданием, ни дисперсией; для его описания необходимо ввести специальную характеристику. Эта характеристика называется *корреляционной функцией* (иначе – *автокорреляционной* функцией). Корреляционная функция характеризует степень зависимости между сечениями случайной функции, относящимися к различным t.

Пусть имеется случайная, функция $X(t)$ (рис. 5.5). Рассмотрим два ее сечения, относящихся к различным моментам: t и t', т. е. две случайные величины $X(t)$ и $X(t')$. Очевидно, что при близких значениях t и t' величины $X(t)$ и $X(t')$ связаны тесной зависимостью: если величина $X(t)$ приняла какое-то значение, то и величина $X(t')$ с большой вероятностью примет значение, близкое к нему. Очевидно также, что при увеличении интервала между сечениями t, t' зависимость величин $X(t)$ и $X(t')$ вообще должна убывать.

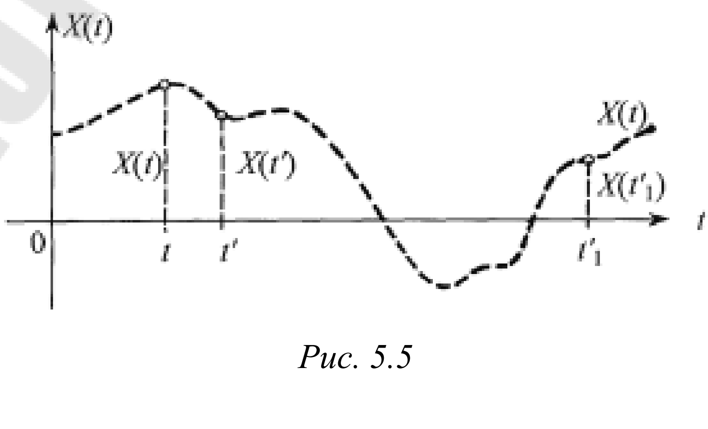

Рис. 5.5

Степень зависимости величин $X(t)$ и $X(t')$ может быть в значительной мере охарактеризована их *корреляционным моментом*.

Очевидно, он является функцией двух аргументов t и t'. Эта функция и называется корреляционной функцией.

Таким образом, *корреляционной функцией случайной функции* $X(t)$ *называется неслучайная функция двух аргументов* $K_x(t, t')$, *которая при каждой паре значений t, t' равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции*:

$$K_x(t, t') = M\left[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t')\right], \tag{5.4}$$

где $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t),\ \ \overset{\circ}{X}(t') = X(t') - m_x(t')$.

Из рассмотренных случайных функций $X_1(t)$ и $X_2(t)$ видно, что при одинаковых математических ожиданиях и дисперсиях случайные функции $X_1(t)$ и $X_2(t)$ имеют совершенно различные корреляционные функции. Корреляционная функция случайной функции $X_1(t)$ медленно убывает по мере увеличения промежутка (t, t'); напротив, корреляционная функция случайной функции $X_2(t)$ быстро убывает с увеличением этого промежутка.

Полагая $t' = t$, имеем:

$$K_x(t, t') = M\left[(\overset{\circ}{X}(t))^2\right] = D_x(t), \tag{5.5}$$

т. е. *при* $t' = t$ *корреляционная функция обращается в дисперсию случайной функции*.

Таким образом, необходимость в дисперсии как отдельной характеристике случайной функции отпадает: в качестве основных характеристик случайной функции достаточно рассматривать ее математическое ожидание и корреляционную функцию.

Так как корреляционный момент двух случайных величин $X(t)$ и $X(t')$ не зависит от последовательности, в которой эти величины рассматриваются, то корреляционная функция симметрична относительно своих аргументов, т. е. не меняется при перемене аргументов местами:

$$K_x(t, t') = K_x(t', t). \tag{5.6}$$

Вместо корреляционной функции $K_x(t, t')$ можно пользоваться нормированной корреляционной функцией:

$$r_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sigma_x(t)\sigma_x(t')}, \tag{5.7}$$

которая представляет собой коэффициент корреляции величин $X(t)$, $X(t')$.

При $t' = t$ нормированная корреляционная функция равна единице.

$$r_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{[\sigma_x(t)]^2} = \frac{D_x(t)}{[\sigma_x(t)]^2} = 1. \tag{5.8}$$

6. СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

6.1. Понятие о стационарном случайном процессе

На практике очень часто встречаются случайные процессы, протекающие во времени приблизительно однородно и имеющие вид непрерывных случайных колебаний вокруг некоторого среднего значения, причем ни средняя амплитуда, ни характер этих колебаний не обнаруживают существенных изменений с течением времени. Такие случайные процессы называются стационарными.

В качестве примеров стационарных случайных процессов можно привести: 1) колебания самолета на установившемся режиме горизонтального полета; 2) колебания напряжения в электрической осветительной сети; 3) случайные шумы в радиоприемнике; 4) процесс качки корабля и т. п.

Каждый стационарный процесс можно рассматривать как продолжающийся во времени неопределенно долго; при исследовании стационарного процесса в качестве начала отсчета можно выбрать любой момент времени. Исследуя стационарный процесс на любом участке времени мы должны получить одни и те же его характеристики. Образно выражаясь, стационарный процесс «не имеет ни начала, ни конца».

Примером стационарного случайного процесса может служить изменение высоты центра тяжести самолета на установившемся режиме горизонтального полета (рис. 6.1).

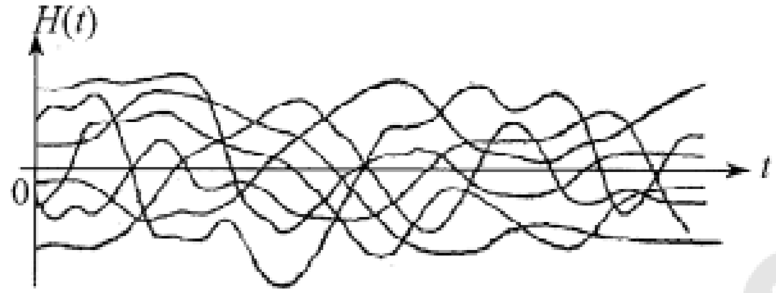

Рис. 6.1

В противоположность стационарным случайным процессам можно указать другие, явно нестационарные, случайные процессы, например: процесс затухающих колебаний в электрической цепи; процесс горения порохового заряда в реактивной камере и т. д. Нестационарный процесс характерен тем, что он имеет определенную *тенденцию развития во времени*; характеристики такого процесса зависят от начала отсчета и от времени.

На рис. 6.2 изображено семейство реализаций явно нестационарного случайного процесса – процесса изменения тяги двигателя реактивного снаряда во времени.

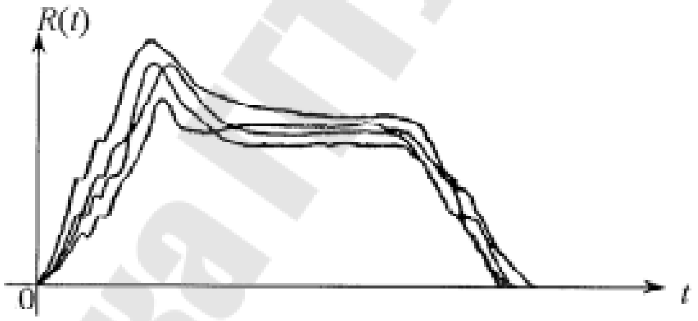

Рис. 6.2

Заметим, что далеко не все нестационарные случайные процессы являются существенно нестационарными на всем протяжении своего развития. Существуют нестационарные процессы, которые (на известных отрезках времени и с известным приближением) могут быть приняты за стационарные.

Вообще, как правило, случайный процесс в любой динамической системе начинается с нестационарной стадии – с так называемого «переходного процесса». После затухания переходного процесса система обычно переходит на установившийся режим, и тогда случайные процессы, протекающие в ней, могут считаться стационарными.

Стационарные случайные процессы очень часто встречаются в физических и технических задачах. По своей природе эти процессы проще, чем нестационарные и описываются более простыми характеристиками. Линейные преобразования стационарных случайных процессов также обычно осуществляются проще, чем нестационарные. В связи с этим на практике получила широкое применение специальная *теория стационарных случайных процессов*, или, точнее, *теория стационарных случайных функций* (т. к. аргументом стационарной случайной функции в общем случае может быть и не время).

Случайная функция $X(t)$ называется *стационарной*, если все ее вероятностные характеристики не зависят от t (точнее, не меняются при любом сдвиге аргументов, от которых они зависят, по оси t).

Так как изменение стационарной случайной функции должно протекать однородно по времени, то естественно потребовать, чтобы для стационарной случайной функции математическое ожидание было постоянным:

$$m(t) = m_x = \text{const}. \qquad (6.1)$$

Заметим, однако, что это требование не является существенным: мы знаем, что от случайной функции $X(t)$ всегда можно перейти к центрированной случайной функции $\overset{\circ}{X}(t)$, для которой математическое ожидание тождественно равно нулю и, следовательно, удовлетворяет условию (6.1). Таким образом, если случайный процесс нестационарен только за счет переменного математического ожидания, это не помешает нам изучать его как стационарный процесс.

Второе условие, которому, очевидно, должна удовлетворять стационарная случайная функция, – это условие постоянства дисперсии:

$$D_x(t) = D_x = \text{const}. \qquad (6.2)$$

Установим, какому условию должна удовлетворять корреляционная функция стационарной случайной функции. Рассмотрим случайную функцию $X(t)$ (рис. 6.3). Положим в выражении $K_x(t, t')$ $t' = t + \tau$ и рассмотрим $K_x(t,\ t + \tau)$ – корреляционный момент двух сечений случайной функции, разделенных интервалом времени τ. Очевидно, если случайный процесс $X(t)$ действительно стационарен, то этот корреляционный момент не должен зависеть от того, где именно на оси Ot мы взяли участок τ, а должен зависеть только от длины этого участка. Например, для участков *I* и *II* на рис. 6.3, имеющих одну и ту же длину τ, значения корреляционной функции $K_x(t, t+\tau)$ и $K_x(t_1, t_1+\tau)$ должны быть одинаковыми.

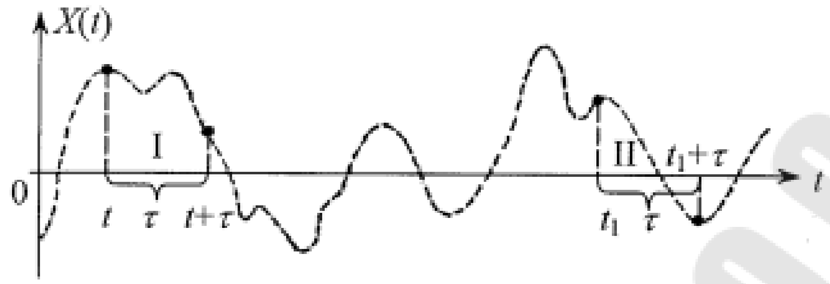

Рис. 6.3

Вообще, корреляционная функция стационарного случайного процесса должна зависеть не от положения t первого аргумента на оси абсцисс, а только от промежутка τ между первым и вторым аргументами:

$$K_x(t, t+\tau) = k_x(\tau). \tag{6.3}$$

Следовательно, корреляционная функция стационарного случайного процесса есть функция не двух, а всего одного аргумента. Это обстоятельство в ряде случаев сильно упрощает операции над стационарными случайными функциями.

Заметим, что условие (6.2), требующее от стационарной случайной функции постоянства дисперсии, является частным случаем условия (6.3). Действительно, полагая в формуле (6.3) $t+\tau = t$ $(\tau = 0)$, имеем

$$D_x(t) = K_x(t, t) = k_x(0) = \text{const}. \tag{6.4}$$

Таким образом, условие (6.3) есть единственное существенное условие, которому должна удовлетворять стационарная случайная функция.

Поэтому в дальнейшем под стационарной случайной функцией мы будем понимать такую случайную функцию, корреляционная функция которой зависит не от обоих своих аргументов t и t', а только от разности τ между ними. Чтобы не накладывать специальных условий на математическое ожидание, мы будем рассматривать только центрированные случайные функции.

Мы знаем, что корреляционная функция любой случайной функции обладает свойством симметрии:

$$K_x(t, t') = K_x(t', t).$$

Отсюда для стационарного процесса, полагая $t' - t = \tau$, имеем:

$$k_x(\tau) = k(-\tau), \tag{6.5}$$

т. е. корреляционная функция $k_x(\tau)$ есть четная функция своего аргумента. Поэтому обычно корреляционную функцию определяют только для положительных значений аргумента (рис. 6.4).

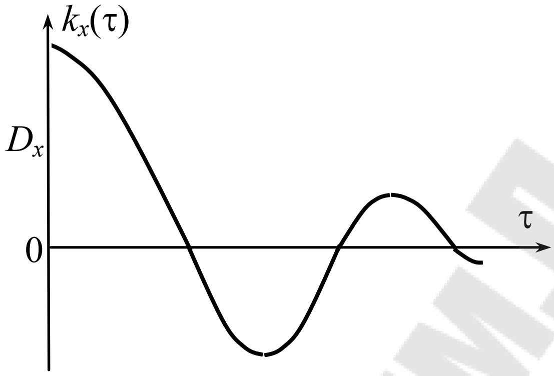

Рис. 6.4

На практике вместо корреляционной функции $k_x(\tau)$ часто пользуются *нормированной корреляционной функцией*

$$\rho_x(\tau) = \frac{k_x(\tau)}{D_x}, \tag{6.6}$$

где $D_x = k_x(0)$ – постоянная дисперсия стационарного процесса. Функция $\rho_x(\tau)$ есть не что иное, как коэффициент корреляции между сечениями случайной функции, разделенными интервалом τ по времени. Очевидно, что $\rho_x(0) = 1$.

6.2. Эргодическое свойство стационарных случайных функций

Рассмотрим некоторую стационарную случайную функцию $X(t)$, для которой требуется оценить ее характеристики: математическое ожидание m_x и корреляционную функцию $k_x(\tau)$. Для этого нужно располагать известным числом реализаций случайной функции $X(t)$. Обрабатывая эти реализации, можно найти оценки для математического ожидания $\tilde{m}_x(t)$ и корреляционной функции $\tilde{K}_x(t, t')$. В связи с ограниченностью числа наблюдений функция $\tilde{m}_x(t)$ не будет строго постоянной; ее придется осреднить и заменить некоторым постоянным $\widetilde{m}_x(t)$; аналогично, осредняя значения $\widetilde{K}_x(t, t')$ для разных $\tau = t' - t$, получим корреляционную функцию $k_x(\tau)$.

Этот метод обработки является довольно сложным и громоздким. Возникает вопрос: нельзя ли для стационарной случайной функции этот сложный процесс обработки заменить более простым, который базируется на предположении, что математическое ожидание не зависит от времени, а корреляционная функция – от начала отсчета?

Поскольку случайный процесс является стационарным и протекает однородно по времени, естественно предположить, что одна-единственная реализация достаточной продолжительности может служить достаточным опытным материалом для получения характеристик случайной функции.

При более подробном рассмотрении этого вопроса оказывается, что такая возможность существует не для всех случайных процессов; не всегда одна реализация достаточной продолжительности оказывается эквивалентной множеству отдельных реализаций.

Для примера рассмотрим две случайные стационарные функции $X_1(t)$ и $X_2(t)$, представленные совокупностью своих реализаций на рис. 6.5 и 6.6.

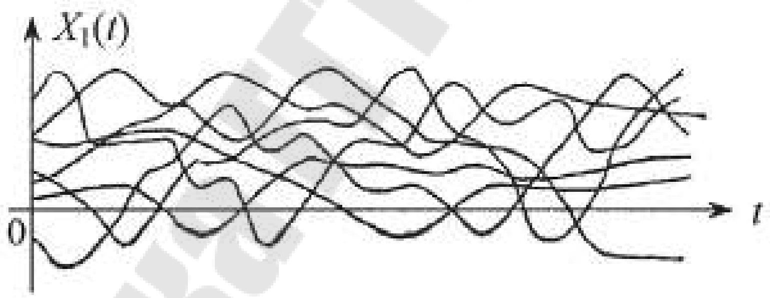

Рис. 6.5

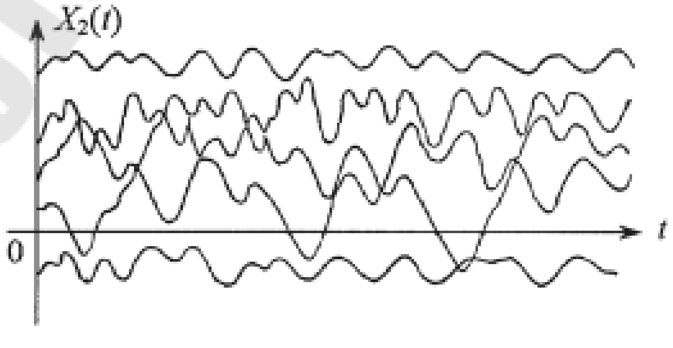

Рис. 6.6

Для случайной функции $X_1(t)$ характерна следующая особенность: каждая из ее реализаций обладает одними и теми же характерными признаками: средним значением, вокруг которого происходят колебания, и средним размахом этих колебаний. Выберем произвольно одну из таких реализаций и продолжим мысленно опыт, в результате которого она получена, на некоторый участок времени T. Очевидно, при достаточно большом T эта одна реализация сможет дать нам достаточно хорошее представление о свойствах случайной функции в целом. В частности, осредняя значения этой реализации вдоль оси абсцисс – по времени, мы должны получить приближенное значение математического ожидания случайной функции; осредняя квадраты отклонений от этого среднего, мы должны получить приближенное значение дисперсии, и т. д.

Про такую случайную функцию говорят, что она обладает *эргодическим свойством*. Эргодическое свойство состоит в том, что каждая отдельная реализация случайной функции является как бы «полномочным представителем» всей совокупности возможных реализаций; одна реализация достаточной продолжительности может заменить при обработке множество реализаций той же общей продолжительности.

Рассмотрим теперь случайную функцию $X_2(t)$. Выберем произвольно одну из ее реализаций, продолжим ее мысленно на достаточно большой участок времени и вычислим ее среднее значение по времени на всем участке наблюдения. Очевидно, это среднее значение для каждой реализации будет свое и может существенно отличаться от математического ожидания случайной функции, построенного как среднее из множества реализаций. Про такую случайную функцию говорят, что она не обладает эргодическим свойством.

Если случайная функция $X(t)$ обладает эргодическим свойством, то для нее *среднее по времени (на достаточно большом участке наблюдения) приближенно равно среднему по множеству наблюдений*. То же будет верно и для $X^2(t)$, $X(t)$, $X(t+\tau)$ и т. д. Следовательно, все характеристики случайной функции (математическое ожидание, дисперсию, корреляционную функцию) можно будет приближенно определять по одной достаточно длинной реализации.

Какие же стационарные случайные функции обладают, а какие не обладают эргодическим свойством?

Поясним этот вопрос наглядно, исходя из примера. Рассмотрим случайную функцию $\alpha(t)$ – колебания угла атаки самолета на установившемся режиме горизонтального полета. Предположим, что полет происходит в каких-то типичных средних метеорологических условиях. Колебания угла атаки вызваны случайными возмущениями, связанными с турбулентностью атмосферы. Среднее значение угла атаки, около которого происходят колебания, зависит от высоты полета *H*. Зависит от этой высоты и размах колебаний: известно, что в нижних слоях атмосферы турбулентность сказывается сильнее, чем в верхних.

Рассмотрим случайную функцию $\alpha(t)$ – колебания угла атаки на заданной высоте *H*. Каждая из реализаций этой случайной функции осуществляется в результате воздействия одной и той же группы случайных факторов и обладает одними и теми же вероятностными характеристиками; случайная функция $\alpha(t)$ обладает эргодическим свойством (рис. 6.7).

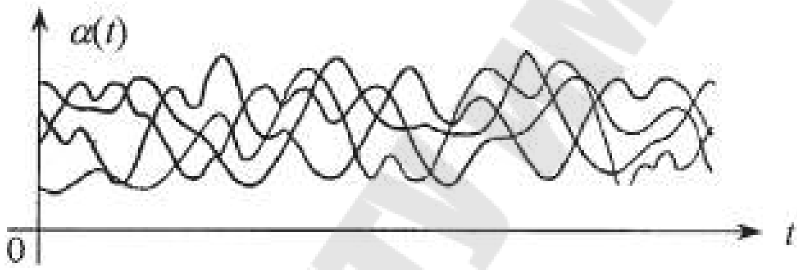

Рис. 6.7

Представим себе теперь, что рассматривается случайная функция $\alpha(t)$ не для одной высоты *H*, а для целого диапазона, внутри которого задан какой-то закон распределения высот (например, закон равномерной плотности). Такая случайная функция, оставаясь стационарной, очевидно, уже не будет обладать эргодическим свойством; ее возможные реализации, осуществляющиеся с какими-то вероятностями имеют различный характер (рис. 6.8).

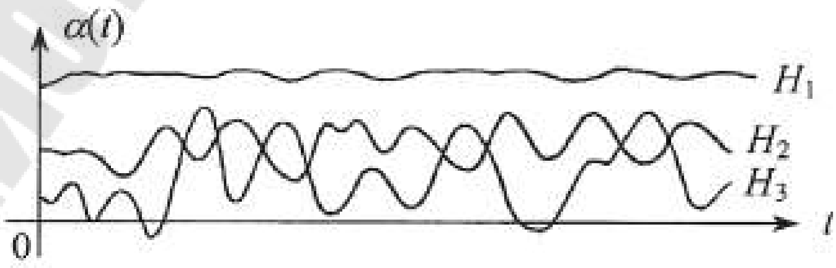

Рис. 6.8

Для этого случайного процесса характерно то, что он как бы «разложим» на более элементарные случайные процессы; каждый из них осуществляется с некоторой вероятностью и имеет свои индивидуальные характеристики. Таким образом, разложимость, внутренняя неоднородность случайного процесса, протекающего с некоторой вероятностью по тому или другому типу, есть физическая причина неэргодичности этого процесса.

В частности, неэргодичность случайного процесса может быть связана с наличием в его составе слагаемого в виде обычной случайной величины.

6.3. Определение характеристик эргодической стационарной случайной функции по одной реализации

Рассмотрим стационарную случайную функцию $X(t)$, обладающую эргодическим свойством, и предположим, что в нашем распоряжении имеется всего одна реализация этой случайной функции, но зато на достаточно большом участке времени T. Для эргодической стационарной случайной функции одна реализация достаточно большой продолжительности практически эквивалентна (в смысле объема сведений о случайной функции) множеству реализаций той же общей продолжительности; характеристики случайной функции могут быть приближенно определены не как средние по множеству наблюдений, а как *средние по времени* t. В частности, при достаточно большом T математическое ожидание m_x может быть приближенно вычислено по формуле

$$m_x \approx \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt. \qquad (6.7)$$

Аналогично может быть приближенно найдена корреляционная функция $k_x(\tau)$ при любом τ. Действительно, корреляционная функция, по определению, представляет собой не что иное, как *математическое ожидание* случайной функции $\overset{\circ}{X}(t)\,\overset{\circ}{X}(t+\tau)$:

$$k_x(\tau) = M\left[\overset{\circ}{X}(t)\,\overset{\circ}{X}(t+\tau)\right]. \qquad (6.8)$$

Это математическое ожидание также, очевидно, может быть приближенно вычислено как среднее по времени.

Фиксируем некоторое значение τ и вычислим указанным способом корреляционную функцию $k_x(\tau)$. Для этого удобно предварительно «центрировать» данную реализацию $x(t)$, т. е. вычесть из нее математическое ожидание (6.7):

$$\overset{\circ}{x}(t) = x(t) - m_x . \tag{6.9}$$

Вычислим при заданном τ математическое ожидание случайной функции $\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t+\tau)$ как среднее по времени. При этом, очевидно, нам придется учитывать не весь участок времени от 0 до T, а несколько меньший, т. к. второй сомножитель $\overset{\circ}{X}(t+\tau)$ известен нам не для всех t, а только для тех, для которых $t+\tau \le T$. Вычисляя среднее по времени указанным выше способом, получим:

$$k_x(\tau) \approx \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} \overset{\circ}{x}(t)\overset{\circ}{x}(t+\tau)dt . \tag{6.10}$$

Вычислив интеграл (6.10) для ряда значений τ, можно приближенно воспроизвести по точкам весь ход корреляционной функции.

На практике обычно интегралы (6.7) и (6.10) заменяют конечными суммами. Покажем как это делается. Разобьем интервал записи случайной функции на n равных частей длиной Δt и обозначим середины полученных участков $t_1,\ t_2, ..., t_n$ (рис. 6.9).

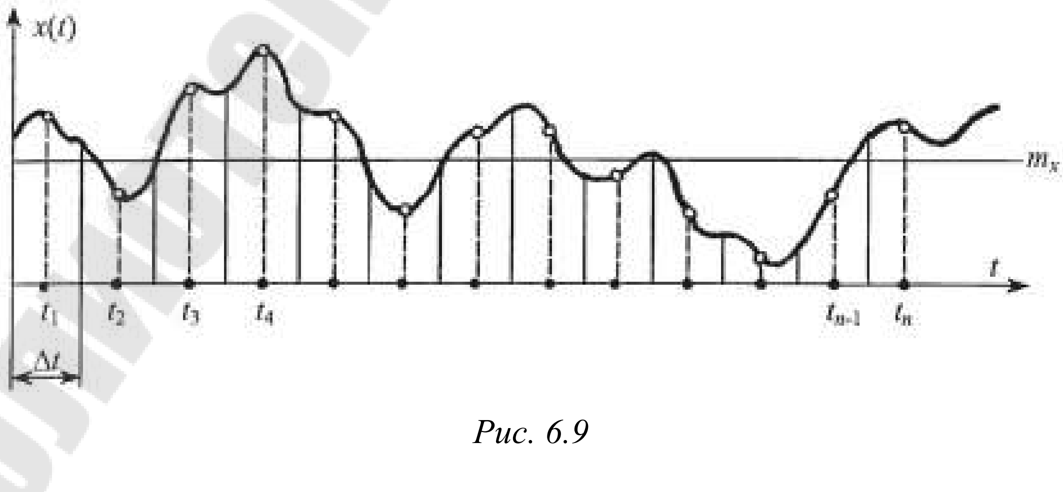

Рис. 6.9

Представим интеграл (6.7) как сумму интегралов по элементарным участкам Δt и на каждом из них вынесем функцию $x(t)$ из-под знака интеграла средним значением, соответствующим центру интервала $x(t_i)$. Получим приближенно:

$$m_x = \frac{1}{T} \cdot \frac{T}{n} \sum_{i=1}^{n} x(t_i),$$

или

$$m_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x(t_i). \tag{6.11}$$

Аналогично можно вычислить корреляционную функцию для значений τ, равных $0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots$. Придадим, например, величине τ значение

$$\tau = m\Delta t = \frac{mT}{n}$$

и вычислим интеграл (6.10), деля интервал интегрирования

$$T - \tau = T - \frac{mT}{n} = \frac{n-m}{n} T$$

на $n-m$ равных участков длиной Δt и вынося на каждом из них функцию $\overset{\circ}{x}(t)\overset{\circ}{x}(t+\tau)$ за знак интеграла средним значением. Получим:

$$k_x\left(\frac{mT}{n}\right) = \frac{n}{(n-m)T} \cdot \frac{T}{n} \sum_{i=1}^{n-m} \overset{\circ}{x}(t)\, \overset{\circ}{x}(t_{i+m}),$$

или окончательно

$$k_x\left(\frac{mT}{n}\right) = \frac{1}{(n-m)} \sum_{i=1}^{n-m} \overset{\circ}{x}(t)\, \overset{\circ}{x}(t_{i+m}). \tag{6.12}$$

Вычисление корреляционной функции по формуле (6.12) производят для $m = 0, 1, 2, \ldots$ последовательно вплоть до таких значений *m,* при которых корреляционная функция становится практически равной нулю или начинает совершать небольшие нерегулярные колебания около нуля. Общий ход функции $k_x(t)$ воспроизводится по отдельным точкам (рис. 6.10).

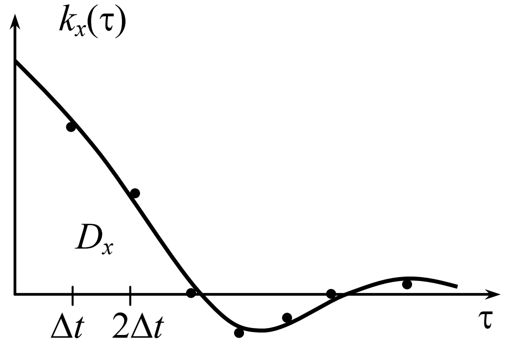

Рис. 6.10

Для того чтобы математическое ожидание m_x и корреляционная функция $k_x(\tau)$ были определены с удовлетворительной точностью нужно, чтобы число точек n было достаточно велико (порядка сотни, а в некоторых случаях даже нескольких сотен). Выбор длины элементарного участка Δt определяется характером изменения случайной функции. Если случайная функция изменяется сравнительно плавно, участок Δt можно выбирать большим, чем когда она совершает резкие и частые колебания. Чем более высокочастотный состав имеют колебания, образующие случайную функцию, тем чаще нужно располагать опорные точки при обработке. Ориентировочно можно рекомендовать выбирать элементарный участок Δt так, чтобы на полный период самой высокочастотной гармоники в составе случайной функции приходилось порядка 5–10 опорных точек.

Часто выбор опорных точек вообще не зависит от обрабатывающего, а диктуется темпом работы записывающей аппаратуры. В этом случае следует вести обработку непосредственно полученного из опыта материала, не пытаясь вставить между наблюденными значениями промежуточные, т. к. это не может повысить точности результата, а излишне осложнит обработку.

Литература

1. Электрические системы. Математические задачи электроэнергетики / В. А. Веников [и др.]. – Москва : Высш. шк., 1981. – 288 с.
2. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – Москва : Наука, 1969. – 576 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 3
1. Общие сведения о системах электроснабжения 3
2. Основные понятия теории вероятностей 8
2.1. Основные понятия 8
2.2. Связи между событиями 10
2.3. Вероятность события. Определение вероятности сложных событий в энергетике 12
2.4. Формула Бернулли и общие случаи определения вероятности повреждения оборудования 14
3. Случайные величины и их законы распределения 16
3.1. Случайные величины в энергетике 16
3.2. Статистический ряд, многоугольник распределения вероятности 18
3.3. Функция и плотность распределения вероятности 20
3.4. Числовые характеристики случайных величин 22
3.5. Законы распределения вероятностей случайных величин 27
4. Системы случайных величин 35
4.1. Понятие о системе случайных величин 35
4.2. Функция распределения системы двух случайных величин 37
4.3. Плотность распределения системы двух случайных величин 39
4.4. Числовые характеристики системы двух случайных величин 40
5. Основные понятия теории случайных функций 44
5.1. Понятие о случайной функции 44
5.2. Характеристики случайных функций 47
6. Стационарные случайные функции 52
6.1. Понятие о стационарном случайном процессе 52
6.2. Эргодическое свойство стационарных случайных функций 56
6.3. Определение характеристик эргодической стационарной случайной функции по одной реализации 60
Литература 64

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ

Курс лекций для студентов специальности 1-43 01 03 «Электроснабжение» дневной и заочной форм обучения

Электронный аналог печатного издания

Авторы-составители: **Алферова** Тамара Викторовна
Попова Ольга Михайловна

Редактор *Н. И. Жукова*
Компьютерная верстка *Н. Б. Козловская*

Подписано в печать 27.09.06.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Ризография. Усл. печ. л. 3,76. Уч.-изд. л. 4,05.
Изд. № 133.
E-mail: ic@gstu.gomel.by
http://www.gstu.gomel.by

Издатель и полиграфическое исполнение:
Издательский центр Учреждения образования
«Гомельский государственный технический университет
имени П. О. Сухого».
ЛИ № 02330/0133207 от 30.04.2004 г.
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.