Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

С. М. Евтухова, И. В. Иванейчик

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

ПРАКТИКУМ
по выполнению расчетно-графических работ для студентов дневной формы обучения

Гомель 2009

УДК 517.31(075.8)
ББК 22.161.6я73
Е27

Рекомендовано научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого
(*протокол № 9 от 12.05.2008 г.*)

Рецензент: канд. техн. наук, доц. каф. «Электроснабжение»
ГГТУ им. П. О. Сухого *Т. В. Алферова*

Евтухова, С. М.

Е27 Высшая математика. Неопределенный и определенный интегралы : практикум по выполнению расч.-граф. работ для студентов днев. формы обучения / С. М. Евтухова, И. В. Иванейчик. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2009. – 33 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

Включает 10 типов заданий по теме «Неопределенный и определенный интегралы». В каждом задании содержится 31 вариант. Дано решение типового варианта с подробными пояснениями.

Для студентов дневной формы обучения.

УДК 517.31(075.8)
ББК 22.161.6я73

I. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

__Задание 1__. Вычислить интегралы.

1.1. а) $\int e^{3x-14}dx$ б) $\int \frac{x^2dx}{x^2-9}$

в) $\int \frac{3x^2+\sqrt{x}-x^3}{x}dx$ г) $\int \frac{\sin x}{2-3\cos x}dx$

1.2. а) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$ б) $\int x^2\cdot 2^{x^3+1}dx$

в) $\int \frac{\sqrt[3]{x}-x^2+4}{\sqrt{x}}dx$ г) $\int \sqrt[7]{2x-10}dx$

1.3. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$ б) $\int \frac{dx}{(x-2)\ln^2(x-2)}$

в) $\int \frac{x-5x^3+2}{\sqrt[3]{x}}dx$ г) $\int xe^{x^2+2}dx$

1.4. а) $\int \frac{\cos 3x}{2-\sin 3x}dx$ б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}$

в) $\int \frac{x\sqrt{x}+2x+3}{x^3}dx$ г) $\int 5^{2+x}dx$

1.5. а) $\int \sqrt[5]{7x-2}dx$ б) $\int \frac{dx}{3x+2}$

в) $\int \frac{x-4x^3+5}{x\sqrt{x}}dx$ г) $\int \frac{dx}{\cos^2 7x}$

1.6. а) $\int x3^{x^2-2}dx$ б) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$

в) $\int \frac{x^5+3x^7-1}{x}dx$ г) $\int \frac{xdx}{1+x^2}$

1.7. а) $\int 2^{\cos 3x}\sin 3xdx$ б) $\int (1+3x)^7dx$

в) $\int \frac{3x^2-\sqrt[3]{x}+4}{x}dx$ г) $\int \frac{\ln^5(x-2)}{x-2}dx$

1.8. а) $\int \frac{3^x dx}{\sqrt{1-9^x}}$ б) $\int \frac{dx}{\cos^2(3x-1)}$

в) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}+5}{x}dx$ г) $\int e^{\sin x}\cos x dx$

1.9. а) $\int (7+2x)^9 dx$ б) $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

в) $\int \frac{\sqrt[4]{x^3}+3x-1}{\sqrt{x}}dx$ г) $\int \frac{x^2}{x^3-3}dx$

1.10. а) $\int 3^{1-x}dx$ б) $\int \frac{\cos 2x}{4-\sin 2x}dx$

в) $\int \left(\sqrt[5]{x}-\frac{3x^2+\sqrt{x}}{x^2}\right)dx$ г) $\int \sqrt[5]{7x+2}dx$

1.11. а) $\int \frac{x^2-1}{x^2+4}dx$ б) $\int \frac{1+2^x}{3^x}dx$

в) $\int \left(\frac{3x^2}{\sqrt{x}}+2x^3-\frac{4}{x}\right)dx$ г) $\int \frac{\ln(2x+3)}{2x+3}dx$

1.12. а) $\int e^{4-3x}dx$ б) $\int x\sqrt{2-x^2}dx$

в) $\int \frac{\sqrt{x^3}-x+\sqrt[4]{x}}{x^2}dx$ г) $\int \frac{dx}{\sin^2(3-x)}$

1.13. а) $\int \frac{\sqrt[7]{\ln(3x-1)}}{3x-1}dx$ б) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x^2}$

в) $\int \frac{\sqrt[5]{x^2}+3x^3-2}{x^3}dx$ г) $\int \cos(2-3x)dx$

1.14. а) $\int x^2 e^{2x^3-1}dx$ б) $\int \frac{dx}{\cos^2(5-2x)}$

в) $\int \frac{\sqrt[7]{x^6}-2x+3\sqrt{x}}{x^2}dx$ г) $\int x(1-x^2)^4 dx$

1.15. а) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx$ б) $\int \sqrt[3]{7-3x}dx$

в) $\int \left(\frac{3}{x}+2x^4-\sqrt[3]{x^4}\right)dx$ г) $\int \frac{dx}{\arcsin^3 x\sqrt{1-x^2}}$

1.16. а) $\int 4^{\cos 5x}\sin 5x dx$ б) $\int \frac{x^4}{\sqrt{4+x^5}}dx$

в) $\int \frac{\sqrt[6]{x} - 3x + 5x^2}{x} dx$ г) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 49^x}}$

1.17. а) $\int \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x} dx$ б) $\int \frac{\ln^5(3x - 4)}{3x - 4} dx$

в) $\int \left(\frac{4x^2}{\sqrt[3]{x}} + 2x - \frac{3}{x} \right) dx$ г) $\int \frac{2 - x}{1 - x^2} dx$

1.18. а) $\int \frac{\sqrt[5]{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ б) $\int \frac{4^x - 3^x}{7^x} dx$

в) $\int \frac{\sqrt{x^7} - 5x^3 + \sqrt{x}}{x^2} dx$ г) $\int e^{3x+4} dx$

1.19. а) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(3x + 5)}}{3x + 5} dx$ б) $\int \sqrt[5]{7 - 3x} dx$

в) $\int \frac{x^4 + 3x - 5}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ г) $\int x \cos(4 - x^2) dx$

1.20. а) $\int \frac{x dx}{\sin^2 x^2}$ б) $\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

в) $\int \frac{2x^3 - 5x + 7}{\sqrt[4]{x^3}} dx$ г) $\int 5^{7x+5} dx$

1.21. а) $\int \frac{x^2}{\sqrt[5]{x^3 - 2}} dx$ б) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$

в) $\int \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^3} + 3x - \frac{5}{x} \right) dx$ г) $\int e^{7-2x} dx$

1.22. а) $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$ б) $\int 2^{5x+7} dx$

в) $\int \frac{\sqrt[7]{x^3} + 4x - 2}{x^3} dx$ г) $\int \frac{\sin x}{1 - 2\cos x} dx$

1.23. а) $\int x \sin(x^2 - 5) dx$ б) $\int \frac{x - x^2}{x^2 + 1} dx$

в) $\int \left(\frac{6}{x} + 2x\sqrt{x} - \frac{9}{x^2} \right) dx$ г) $\int \frac{dx}{(1 - x)\ln^3(1 - x)}$

1.24. а) $\int \frac{x^3}{1 - 3x^4} dx$ б) $\int e^{\cos 2x} \sin 2x dx$

в) $\int \frac{\sqrt[3]{x}-6x^2+1}{\sqrt[4]{x^3}}dx$ г) $\int (2x+3)^5 dx$

1.25. а) $\int \frac{\sin(1/x)}{x^2}dx$ б) $\int \frac{7^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$

в) $\int \left(\frac{2}{x}-3x^2+\frac{7}{x^3}\right)dx$ г) $\int \sqrt[7]{3-5x}dx$

1.26. а) $\int \frac{\sin 2x}{4\cos x}dx$ б) $\int x^2 e^{4-x^3} dx$

в) $\int \frac{\sqrt[5]{x^2}-4x-1}{x^3}dx$ г) $\int \frac{5^x}{\sqrt{1-25^x}}dx$

1.27. а) $\int x^3 7^{x^4+9} dx$ б) $\int \frac{\cos(1/x)}{x^2}dx$

в) $\int \frac{\sqrt[6]{x^5}+3x^2-4}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ г) $\int (4x+7)^3 dx$

1.28. а) $\int \frac{3^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ б) $\int \frac{e^x}{\sqrt{9-e^{2x}}}dx$

в) $\int \frac{4x+5x^2-1}{x^3\sqrt{x}}dx$ г) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^4(2x-1)}}{2x-1}dx$

1.29. а) $\int \frac{2^x-5^x}{7^x}dx$ б) $\int \sin x \cdot (1-\cos x)dx$

в) $\int \left(\frac{3}{x^2}+5x^3-\frac{\sqrt[7]{x^5}}{x^2}\right)dx$ г) $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[5]{\ln x+2}}$

1.30. а) $\int \frac{3-\sin x}{\cos^2 x}dx$ б) $\int \left(3+\frac{1}{2}x\right)^5 dx$

в) $\int \left(\sqrt{x}+\frac{7}{x}-\frac{2x}{\sqrt[5]{x^4}}\right)dx$ г) $\int \frac{dx}{9^{5x}}$

1.31. а) $\int \frac{dx}{\arcsin^3 x \cdot \sqrt{1-x^2}}$ б) $\int x^2 \sqrt[7]{(3-x^3)^4}dx$

в) $\int \frac{\sqrt[5]{x^2}+3x-7}{x^2}dx$ г) $\int 7^{\sin 6x} \cos 6x dx$

<u>Задание 2</u>. Вычислить интегралы.

2.1.	а)	$\int (x^2+2)\sin 3x dx$	б)	$\int \ln(x^2+4)dx$	в)	$\int \sin(\ln x)dx$
2.2.	а)	$\int \arccos x dx$	б)	$\int (x^2+4x-1)e^x dx$	в)	$\int e^x \cos 2x dx$
2.3.	а)	$\int x^2 \cos 2x dx$	б)	$\int x\ln(x+2)dx$	в)	$\int 2^x \cos 3x dx$
2.4.	а)	$\int x^2 5^x dx$	б)	$\int \arcsin x dx$	в)	$\int \cos(\ln x)dx$
2.5.	а)	$\int \sqrt{x}\ln x dx$	б)	$\int (x^2+5)\sin 2x dx$	в)	$\int e^{2x}\sin x dx$
2.6.	а)	$\int (x^2+3x+1)e^{5x}dx$	б)	$\int \mathrm{arctg}\, x dx$	в)	$\int 3^x \cos x dx$
2.7.	а)	$\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$	б)	$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$	в)	$\int \sin(\ln 4x)dx$
2.8.	а)	$\int \ln^2 x dx$	б)	$\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$	в)	$\int 2^x \sin x dx$
2.9.	а)	$\int (x+3)\cos 5x dx$	б)	$\int x\arccos x dx$	в)	$\int e^{3x}\sin(x+1)dx$
2.10.	а)	$\int x\arcsin x dx$	б)	$\int (x^2-3x)\ln x dx$	в)	$\int \sin(\ln 2x)dx$
2.11.	а)	$\int \ln(x^2+1)dx$	б)	$\int (x^2+2)\sin 5x dx$	в)	$\int \cos(\ln 6x)dx$
2.12.	а)	$\int (x^2+4x-2)3^x dx$	б)	$\int x\,\mathrm{arctg}\, x dx$	в)	$\int 5^x \cos(x+1)dx$
2.13.	а)	$\int (x^2-2)e^{-x}dx$	б)	$\int (x^2+3)\ln x dx$	в)	$\int e^{x+4}\sin\frac{x}{2}dx$
2.14.	а)	$\int (2x-1)\sin 7x dx$	б)	$\int (x^2+2)7^x dx$	в)	$\int \cos(\ln 3x)dx$
2.15.	а)	$\int (3x^2+x)e^{-x}dx$	б)	$\int x^2 e^{x+3}dx$	в)	$\int e^{2-x}\cos 4x dx$
2.16.	а)	$\int \ln^3 x dx$	б)	$\int \arcsin 5x dx$	в)	$\int 3^x \sin(2x-1)dx$
2.17.	а)	$\int (4x+5)\cos\frac{x}{3}dx$	б)	$\int xe^{-5x}dx$	в)	$\int e^{-x}\sin\frac{3x}{2}dx$
2.18.	а)	$\int \arccos 5x dx$	б)	$\int (x-3)\sin\frac{x}{2}dx$	в)	$\int 2^x \cos(1-x)dx$
2.19.	а)	$\int xe^{x+4}dx$	б)	$\int \mathrm{arctg}\, 2x dx$	в)	$\int e^{3x}\cos(2x-1)dx$
2.20.	а)	$\int (x^2-7)\cos\frac{x}{5}dx$	б)	$\int (3x-7)\ln x dx$	в)	$\int e^{x-1}\cos\frac{x}{4}dx$
2.21.	а)	$\int x^2 2^x dx$	б)	$\int \arccos 2x dx$	в)	$\int 2^x \cos 6x dx$
2.22.	а)	$\int \ln(x+5)dx$	б)	$\int \arcsin 7x dx$	в)	$\int \sin(\ln 5x)dx$

2.23. а) $\int 3x^2 e^{x-1}dx$ б) $\int (2x^2+1)\sin\frac{2x}{5}dx$ в) $\int e^{x+3}\sin\frac{x}{5}dx$

2.24. а) $\int (4x-3)\ln x dx$ б) $\int (x^2+7x)4^x dx$ в) $\int 7^x \sin(x-1)dx$

2.25. а) $\int (x+9)\cos 3x dx$ б) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$ в) $\int \cos(\ln 7x)dx$

2.26. а) $\int \arccos 7x dx$ б) $\int \ln(x^2-1)dx$ в) $\int 6^x \sin(x+2)dx$

2.27. а) $\int (x+2)\cos 6x dx$ б) $\int (9x-1)e^{7x}dx$ в) $\int e^{1-x}\cos\frac{x}{3}dx$

2.28. а) $\int \sqrt[3]{x}\ln x dx$ б) $\int (1-x)7^x dx$ в) $\int e^{5x}\cos(3x-2)dx$

2.29. а) $\int (x^2+3)e^{-x+5}dx$ б) $\int \mathrm{arctg}\, 5x dx$ в) $\int \cos(\ln 4x)dx$

2.30. а) $\int (5x+1)e^{-2x}dx$ б) $\int x\cos(x+2)dx$ в) $\int e^{-2x}\sin(4-x)dx$

2.31. а) $\int (2x+1)\sin(x+3)dx$ б) $\int \sqrt[4]{x}\ln x dx$ в) $\int \sin(\ln 9x)dx$

<u>**Задание 3**</u>. Вычислить интегралы.

3.1. а) $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$ б) $\int \frac{x+1}{x^2+x+8}dx$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$

3.2. а) $\int \frac{dx}{2x^2-3x}$ б) $\int \frac{2x-1}{3x^2-7}dx$ в) $\int \frac{5dx}{\sqrt{x^2+5x+1}}$

3.3. а) $\int \frac{dx}{3x^2+4x}$ б) $\int \frac{5x+3}{4x^2-10}dx$ в) $\int \frac{3dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

3.4. а) $\int \frac{dx}{x^2-5x+4}$ б) $\int \frac{4-2x}{2x^2+x+2}dx$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{14-2x-x^2}}$

3.5. а) $\int \frac{dx}{x^2+7x}$ б) $\int \frac{3x+1}{3x^2-9x+6}dx$ в) $\int \frac{7dx}{\sqrt{x^2+6x+5}}$

3.6. а) $\int \frac{dx}{6x^2+2x+3}$ б) $\int \frac{x-1}{2x^2+2x+5}dx$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-2x^2}}$

3.7. а) $\int \frac{dx}{x^2+4x+25}$ б) $\int \frac{4x+1}{3x^2-12x+3}dx$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x-x^2}}$

3.8. а) $\int \frac{dx}{2x^2+3x+5}$ б) $\int \frac{x+4}{x^2+3x+7}dx$ в) $\int \frac{2dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$

3.9. а) $\int \frac{dx}{5x^2+10x-25}$ б) $\int \frac{2x+5}{x^2-4x-2}dx$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2+1}}$

3.10. а) $\int \frac{dx}{7x^2+49x}$ б) $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+1}dx$ в) $\int \frac{-4dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$

3.11. а) $\int \frac{dx}{2x^2+x-6}$ б) $\int \frac{1-x}{3x^2-5}dx$ в) $\int \frac{-2dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$

3.12. а) $\int \frac{dx}{3x^2+2x-4}$ б) $\int \frac{5x-2}{5x^2+2x+10}dx$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x-x^2}}$

3.13. а) $\int \frac{dx}{x^2-6x+8}$ б) $\int \frac{1-3x}{3+x-2x^2}dx$ в) $\int \frac{4dx}{\sqrt{x^2-6x+20}}$

3.14. а) $\int \frac{dx}{5x^2-x}$ б) $\int \frac{2x+1}{5+2x-2x^2}dx$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2+6x}}$

3.15. а) $\int \frac{dx}{x^2+5x+7}$ б) $\int \frac{2-7x}{5x^2+2x+10}dx$ в) $\int \frac{-3dx}{\sqrt{x-x^2}}$

3.16. а) $\int \frac{dx}{3x^2-2x-5}$ б) $\int \frac{3x+5}{2x^2+2x+5}dx$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+10x+30}}$

3.17. а) $\int \frac{dx}{4x^2+8x-4}$ б) $\int \frac{4x+3}{x^2-3x+7}dx$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+2}}$

3.18. а) $\int \frac{dx}{x^2+7x+3}$ б) $\int \frac{1-5x}{2x^2-1}dx$ в) $\int \frac{2dx}{\sqrt{4x+3-x^2}}$

3.19. а) $\int \frac{dx}{3x^2-9x+6}$ б) $\int \frac{x}{3x^2-12x+3}dx$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{12-8x-4x^2}}$

3.20. а) $\int \frac{dx}{x^2+7x-3}$ б) $\int \frac{2x+4}{9x^2+1}dx$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x+12}}$

3.21. а) $\int \frac{dx}{1-2x-3x^2}$ б) $\int \frac{5-3x}{2x^2-7x+1}dx$ в) $\int \frac{2dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$

3.22. а) $\int \frac{dx}{2x^2+4x+8}$ б) $\int \frac{1-2x}{3x^2-1}dx$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x+4-x^2}}$

3.23. а) $\int \frac{dx}{x^2-3x-5}$ б) $\int \frac{x-7}{9x^2+1}dx$ в) $\int \frac{3dx}{\sqrt{6x-x^2+4}}$

3.24. а) $\int \frac{dx}{x^2+6x-4}$ б) $\int \frac{3x-1}{2x^2+x-4}dx$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+2}}$

3.25. а) $\int \frac{dx}{5x^2+2x-7}$ б) $\int \frac{5x+1}{4x^2+1}dx$ в) $\int \frac{4dx}{\sqrt{2x^2-4x+3}}$

3.26. а) $\int \frac{dx}{2+3x-5x^2}$ б) $\int \frac{2-4x}{x^2+x-2}dx$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+12x-7}}$

3.27. а) $\int \frac{dx}{3x^2+5x+1}$ б) $\int \frac{5x+1}{2x^2-2x+1}dx$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+8x-x^2}}$

3.28. а) $\int \frac{dx}{x^2+3x-1}$ б) $\int \frac{2-3x}{3x^2-x+5}dx$ в) $\int \frac{3dx}{\sqrt{4x^2+8x+9}}$

3.29. а) $\int \frac{dx}{2x^2+4x+6}$ б) $\int \frac{3-7x}{7x^2-14x+5}dx$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-6x+3x^2}}$

3.30. а) $\int \frac{dx}{5x^2+3x+2}$ б) $\int \frac{4x+5}{2x^2+x+5}dx$ в) $\int \frac{2dx}{\sqrt{4+2x-x^2}}$

3.31. а) $\int \frac{dx}{x^2-7x}$ б) $\int \frac{6x+3}{3x^2+6x-4}dx$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-6x+5}}$

Задание 4. Вычислить интегралы.

4.1. а) $\int \frac{3x+7}{(x+1)(x+3)^2}dx$ б) $\int \frac{x^4+7x+1}{(x+1)(x^2+4)}dx$

4.2. а) $\int \frac{x}{(x+2)(x+5)^2}dx$ б) $\int \frac{3x^3+2x-1}{(x-2)(x^2+4x+5)}dx$

4.3. а) $\int \frac{7x-5}{(x-1)^2(x+4)}dx$ б) $\int \frac{2x^4+3x}{x^3-27}dx$

4.4. а) $\int \frac{2x-7}{(x-2)^2(x+3)}dx$ б) $\int \frac{2x^3+4}{(x-1)(x^2-2x+10)}dx$

4.5. а) $\int \frac{3x-2}{(x-3)(x+7)^2}dx$ б) $\int \frac{3x^3+5}{(x+2)(x^2+6x+13)}dx$

4.6. а) $\int \frac{5x+1}{(x-4)^2(x+2)}dx$ б) $\int \frac{x^4+2x+1}{(2x+3)(x^2+2x+5)}dx$

4.7. а) $\int \frac{5x}{(x+1)(x-2)^2}dx$ б) $\int \frac{5x^3+2x}{(1-x)(x^2-4x+13)}dx$

4.8. а) $\int \frac{x-2}{x^2(x+1)}dx$ б) $\int \frac{x^3+2x+4}{(x+3)(x^2+2x+3)}dx$

4.9. а) $\int \frac{3+x}{x^3-x^2}dx$ б) $\int \frac{2x^4+3x-1}{(x-5)(x^2-2x+5)}dx$

4.10. а) $\int \frac{x+2}{(x-5)(x+4)^2}dx$ б) $\int \frac{5x^4+2x^2+3}{x^3+8}dx$

4.11. а) $\int \frac{3x-1}{(x+3)(x+5)^2}dx$ б) $\int \frac{3x^2+2x^2+x+5}{x(x^2+1)}dx$

4.12. а) $\int \frac{2x+3}{x^3-3x^2}dx$ б) $\int \frac{x^4-3}{(x-4)(x^2+2x+2)}dx$

4.13. а) $\int \frac{4x+1}{x(x+4)^2}dx$ б) $\int \frac{3x^3+2x^2-x}{(3x+1)(x^2-2x+26)}dx$

4.14. а) $\int \frac{x+1}{x^2(x-2)}dx$ б) $\int \frac{6x^3-x+2}{(2x-1)(x^2-6x+13)}dx$

4.15. а) $\int \frac{5x-1}{(x^2+x)(x+2)}dx$ б) $\int \frac{5x^3-3x+1}{(x+5)(x^2-6x+18)}dx$

4.16. а) $\int \frac{4x+12}{(x-1)(x^2-1)}dx$ б) $\int \frac{x^3+2}{(x+4)(x^2+4x+13)}dx$

4.17. а) $\int \frac{x-1}{(x-5)^2(x-2)}dx$ б) $\int \frac{x^4+2x^2-3}{x^3-16}dx$

4.18. а) $\int \frac{2x-1}{(x^2+x)(x+1)}dx$ б) $\int \frac{5x^4+3x-1}{5x(x^2-3x+4)}dx$

4.19. а) $\int \frac{3x+2}{x^3-2x^2}dx$ б) $\int \frac{x^3+1}{(x-3)(x^2-2x+2)}dx$

4.20. а) $\int \frac{3x-7}{(x+5)(x+1)^2}dx$ б) $\int \frac{2x^3+1}{(2x+4)(x^2+5x+7)}dx$

4.21. а) $\int \frac{7-x}{x(x-3)^2}dx$ б) $\int \frac{x^3-2x+3}{(2-x)(x^2+3x+6)}dx$

4.22. а) $\int \frac{2x+6}{3x^3-x^2}dx$ б) $\int \frac{2x^4+5x^2-1}{(x+6)(x^2+2x+7)}dx$

4.23. а) $\int \frac{3x+4}{(x-7)(x+1)^2}dx$ б) $\int \frac{4x^4+6x+3}{(2x+5)(x^2-3x+5)}dx$

4.24. а) $\int \frac{3x}{(x+6)(x-1)^2}dx$ б) $\int \frac{3x^3-x+2}{(x-1)(x^2+6x+10)}dx$

4.25. а) $\int \frac{2x+2}{x^3+5x^2}dx$ б) $\int \frac{5x^4-2x+1}{x^3+1}dx$

4.26. а) $\int \frac{7x}{(x+2)(x+3)^2}dx$ б) $\int \frac{x^3+6x+2}{x(x^2+5x+9)}dx$

4.27. а) $\int \frac{5-2x}{(x-1)(x+6)^2}dx$ б) $\int \frac{x^4-x^3+2}{(x+2)(x^2-2x+7)}dx$

4.28. а) $\int \frac{2x+4}{7x^2-x^3}dx$ б) $\int \frac{x^3+3x-1}{(x-4)(x^2-3x+7)}dx$

4.29. а) $\int \frac{3-x}{(x+5)(x+2)^2}dx$ б) $\int \frac{2x^4+3x^3-1}{(x+1)(x^2+2x+8)}dx$

4.30. а) $\int \frac{x-5}{x(x+2)^2}dx$ б) $\int \frac{x^3-3x^2+2}{(x-2)(x^2+2x)}dx$

4.31. а) $\int \frac{7x-1}{(x-4)(x+3)^2}dx$ б) $\int \frac{2x^4+x^3-3}{(x+4)(x^2+9)}dx$

Задание 5. Вычислить интегралы.

5.1. а) $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$ б) $\int \frac{dx}{5\cos x+3\sin x}$

5.2. а) $\int \frac{\sin^3 2x}{\cos^2 2x\sqrt{\cos 2x}}dx$ б) $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$

5.3. а) $\int \cos 5x\sin 7x dx$ б) $\int \frac{dx}{7\cos^2 x+2\sin^2 x}$

5.4. а) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}dx$ б) $\int \frac{dx}{\cos x-\sin^3 x}$

5.5. а) $\int \cos^5 2x\sin^2 2x dx$ б) $\int \frac{dx}{2-3\cos x+\sin x}$

5.6. а) $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}dx$ б) $\int \frac{dx}{3-2\sin^2 x}$

5.7. а) $\int \sin^5 x\cos^4 xdx$ б) $\int \frac{dx}{5-\cos x+2\sin x}$

5.8. а) $\int \frac{\sin^3 4x}{\sqrt{\cos 4x}}dx$ б) $\int \frac{dx}{2\cos^2 x-3}$

5.9. а) $\int \sqrt[7]{\cos^3 x}\sin^3 xdx$ б) $\int \frac{dx}{7\cos x+5\sin x}$

5.10. а) $\int \cos\frac{3x}{2}\cos\frac{7x}{2}dx$ б) $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$

5.11. а) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x\sqrt[3]{\sin x}}dx$ б) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$

5.12. а) $\int \cos^6 2x\sin^3 2xdx$ б) $\int \frac{dx}{7\cos^2 x+2\sin^2 x}$

5.13. а) $\int \sqrt[5]{\sin^3 5x}\cos^3 5xdx$ б) $\int \frac{dx}{4-4\sin x+3\cos x}$

5.14. а) $\int \frac{\cos^5 x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$ б) $\int \frac{dx}{\cos x-3\sin x}$

5.15. а) $\int \sin\frac{3x}{5}\sin\frac{7x}{5}dx$ б) $\int \frac{dx}{\cos^2 x+2\cos x\sin x+3\sin^2 x}$

5.16. а) $\int \sin^4\frac{3x}{2}\sin^2\frac{3x}{2}dx$ б) $\int \frac{dx}{3\cos x-4\sin x}$

5.17. а) $\int \frac{\sin^3 5x}{\cos^4 5x\sqrt[3]{\cos 5x}}dx$ б) $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$

5.18. а) $\int \cos\frac{3x}{7}\cos\frac{4x}{7}dx$ б) $\int \frac{dx}{4\cos^2 x+3\sin^2 x}$

5.19. а) $\int \sin^3\frac{x}{3}\sqrt[5]{\cos^2\frac{x}{3}}dx$ б) $\int \frac{dx}{3+\cos x+\sin x}$

5.20. а) $\int \frac{\cos^5 2x}{\sqrt[7]{\sin^3 2x}}dx$ б) $\int \frac{dx}{8+4\cos x}$

5.21. а) $\int \cos^2 2x\sin^2 2xdx$ б) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x+8\sin x\cos x}$

5.22. а) $\int \cos\frac{9x}{4}\sin\frac{7x}{4}dx$ б) $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}$

5.23. а) $\int \frac{\cos^7 x}{\sin^3 x\sqrt{\sin x}}dx$ б) $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$

5.24. а) $\int \sin^6 \frac{x}{2}\cos^2 \frac{x}{2}dx$ б) $\int \frac{dx}{8\sin^2 x-4\sin x\cos x}$

5.25. а) $\int \cos\frac{3x}{5}\cos\frac{6x}{5}dx$ б) $\int \frac{dx}{7+2\cos x+\sin x}$

5.26. а) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x\sqrt[3]{\cos x}}dx$ б) $\int \frac{dx}{4\cos x+3\sin x}$

5.27. а) $\int \sqrt[7]{\cos^3 x}\sin^3 x dx$ б) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x+3\cos^2 x}$

5.28. а) $\int \sin\frac{5x}{6}\sin\frac{7x}{6}dx$ б) $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$

5.29. а) $\int \frac{\cos^3 2x}{\sin^2 2x\sqrt[5]{\sin 2x}}dx$ б) $\int \frac{dx}{2-3\cos x+2\sin x}$

5.30. а) $\int \sin^4 3x\cdot\cos^4 3x dx$ б) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x+4\sin^2 x}$

5.31. а) $\int \frac{\cos^5 3x}{\sin^3 3x\sqrt{\sin 3x}}dx$ б) $\int \frac{dx}{3\sin x+3\cos x+5}$

<u>Задание 6</u>. Вычислить интегралы.

6.1. а) $\int \sqrt[3]{x}(2+\sqrt{x})^2 dx$ б) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ в) $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$

6.2. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+4}+2\sqrt[4]{3x+4}}$ б) $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}dx$ в) $\int \frac{dx}{x^7\sqrt{1+x^4}}$

6.3. а) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}$ б) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$ в) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

6.4. а) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$ б) $\int \frac{x^3}{\sqrt{(1+2x^2)^3}}dx$ в) $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^4}dx$

6.5. а) $\int \frac{\sqrt{2x+1}dx}{1+\sqrt[3]{2x+1}}$ б) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$ в) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$

6.6. а) $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x+1}}$ б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$ в) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(2+x^3)^5}}$

6.7. а) $\int \frac{\sqrt{3x+2}dx}{1+\sqrt[4]{3x+2}}$ б) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$

6.8. а) $\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[6]{x-1}}dx$ б) $\int x^8\sqrt[3]{1+x^3}dx$ в) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$

6.9. а) $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}dx$ б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ в) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}dx$

6.10. а) $\int \frac{\sqrt[6]{x+3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{x+3}}dx$ б) $\int x^5\sqrt[3]{1+x^2}dx$ в) $\int \frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}}dx$

6.11. а) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-4\sqrt[3]{x^2}}$ б) $\int x^2\sqrt[3]{1-x}dx$ в) $\int \frac{dx}{x^6\sqrt{1+x^2}}$

6.12. а) $\int \frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}}dx$ б) $\int x^5(2-5x^3)^{2/3}dx$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{1-x}}$

6.13. а) $\int \sqrt{5x-1}\left(2+\sqrt[6]{5x-1}\right)^3dx$ б) $\int x^3\sqrt{4-x^2}dx$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{(x+24)^3}}$

6.14. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$ б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt{x-1}}$

6.15. а) $\int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[6]{x})}dx$ б) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$ в) $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

6.16. а) $\int \frac{2+\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt{x+2}}dx$ б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$ в) $\int x^4\sqrt{25-x^2}dx$

6.17. а) $\int \frac{1+\sqrt[4]{3x-1}}{\sqrt[4]{3x-1}-\sqrt{3x-1}}dx$ б) $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[6]{1+x^6}}$ в) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$

6.18. а) $\int \frac{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}}{x\cdot\sqrt[3]{x^2}}dx$ б) $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$ в) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x\cdot\sqrt[4]{x^3}}dx$

6.19. а) $\int \frac{\sqrt{x-1}-2\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}dx$ б) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+x^{-1}}}$ в) $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}$

6.20. а) $\int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx$ б) $\int x^{15}\sqrt{1+3x^8}dx$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{(x+3)^3}}$

6.21. а) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{x}}dx$ б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt{2x+1}}$

6.22. а) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{2x+\sqrt[3]{x}}$ б) $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1+x^2}}$ в) $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{(2-x^2)^3}}$

6.23. а) $\int \frac{4xdx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}$ б) $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}$ в) $\int \frac{\sqrt[4]{\left(1+\sqrt[5]{x^4}\right)^3}}{x^2\cdot\sqrt[5]{x^2}}dx$

6.24. а) $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$ б) $\int \frac{x^7dx}{\sqrt{1-x^4}}$ в) $\int \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}dx$

6.25. а) $\int \frac{\sqrt[3]{2x+3}+\sqrt[6]{2x+3}-1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt[3]{2x+3}}dx$ б) $\int \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}dx$ в) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x\cdot\sqrt[3]{x^2}}dx$

6.26. а) $\int \frac{\sqrt[3]{x+5}+2}{\sqrt[9]{x+5}+\sqrt[3]{x+5}}dx$ б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2+\sqrt[5]{x^2}}}$ в) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2}dx$

6.27. а) $\int \frac{\sqrt[6]{2x-3}+1}{\sqrt{2x-3}-\sqrt[3]{2x-3}}dx$ б) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-\sqrt{x^3}}}$ в) $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{4-x^2}}$

6.28. а) $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-1}dx$ б) $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1+x^3}}$ в) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}}dx$

6.29. а) $\int \frac{\sqrt[3]{x+4}+\sqrt{x+4}+3}{\sqrt{x+4}-\sqrt[6]{x+4}}dx$ б) $\int x^7\sqrt{2-x^4}dx$ в) $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}}{x\cdot\sqrt[8]{x^7}}dx$

6.30. а) $\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt[6]{x^5}}dx$ б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-\sqrt[7]{x^2}}}$ в) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\cdot\sqrt[9]{x^8}}dx$

6.31. а) $\int \frac{\sqrt[4]{2x-1}+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}+1}dx$ б) $\int \frac{x^8dx}{\sqrt{2-x^3}}$ в) $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt{x})^4}}{x\cdot\sqrt[10]{x^9}}dx$

II. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

<u>**Задание 7.**</u> Вычислить определенные интегралы.

7.1. а) $\int_1^4\left(2x+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$ б) $\int_1^2 x^2e^{-2x}dx$ в) $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2+\cos x}$

7.2. а) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$ б) $\int_0^{\pi/2} x\cos\frac{x}{2}dx$ в) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$

7.3. а) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^2 \frac{x}{2} dx$ б) $\int\limits_{e}^{e^2} x \ln x dx$ в) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+3}$

7.4. а) $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx$ б) $\int\limits_{1}^{2} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} dx$ в) $\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$

7.5. а) $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$ б) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x dx$ в) $\int\limits_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$

7.6. а) $\int\limits_{1}^{4} \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx$ б) $\int\limits_{0}^{\pi} x^2 \sin x dx$ в) $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{2x^2+3x-2}$

7.7. а) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3 dx}{x^8+1}$ б) $\int\limits_{-1/2}^{0} x e^{-2x} dx$ в) $\int\limits_{0}^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x}$

7.8. а) $\int\limits_{0}^{\pi} (1+\cos x)^4 \sin x dx$ б) $\int\limits_{-2}^{0} \frac{x^2 dx}{e^{x/2}}$ в) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}$

7.9. а) $\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}$ б) $\int\limits_{0}^{\pi/9} \frac{x dx}{\cos^2 3x}$ в) $\int\limits_{0}^{5} \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$

7.10. а) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x \sin^3 x dx$ б) $\int\limits_{2}^{3} x \ln(x-1) dx$ в) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x dx}{x^2+3x+2}$

7.11. а) $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$ б) $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$ в) $\int\limits_{0}^{9} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$

7.12. а) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^2 \frac{x}{2} dx$ б) $\int\limits_{e}^{e^2} \sin(\ln x) dx$ в) $\int\limits_{3}^{8} \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx$

7.13. а) $\int\limits_{1}^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ б) $\int\limits_{0}^{\pi/2} x \sin \frac{x}{2} dx$ в) $\int\limits_{4}^{5} \frac{dx}{x^2(x-1)}$

7.14. а) $\int\limits_{0}^{8} \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right) dx$ б) $\int\limits_{0}^{1} (x-1) e^{-x} dx$ в) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x + 3}$

7.15. а) $\int\limits_{0}^{\sqrt{\pi/2}} \frac{x dx}{\cos^2(x^2)}$ б) $\int\limits_{0}^{e-1} \ln(x+1) dx$ в) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$

7.16. а) $\int\limits_{1}^{e} \frac{1+\ln^3 x}{x} dx$ б) $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx$ в) $\int\limits_{6}^{8} \frac{dx}{x^2+2x}$

7.17. а) $\int\limits_1^2 \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$ б) $\int\limits_1^2 (x-1)\ln xdx$ в) $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$

7.18. а) $\int\limits_{\pi^2/4}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}}$ б) $\int\limits_1^e \ln^3 xdx$ в) $\int\limits_0^{13} \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$

7.19. а) $\int\limits_0^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ б) $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos xdx$ в) $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$

7.20. а) $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ б) $\int\limits_0^{\pi} (x+2)\cos\frac{x}{2}dx$ в) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$

7.21. а) $\int\limits_1^2 \left(2x^2+\frac{2}{x^4}\right)dx$ б) $\int\limits_1^{e^2} \sqrt{x}\ln xdx$ в) $\int\limits_{-1/2}^{0} \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$

7.22. а) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x\cos^3 xdx$ б) $\int\limits_0^1 x\,\mathrm{arctg}\, xdx$ в) $\int\limits_0^{\pi/4} \sin 3x\cdot\cos 5xdx$

7.23. а) $\int\limits_1^e \frac{\sqrt{\ln^3 x}}{x}dx$ б) $\int\limits_0^{\pi/8} x^2\sin 4xdx$ в) $\int\limits_1^2 \frac{x-5}{x^2-2x+2}dx$

7.24. а) $\int\limits_3^8 \sqrt{1+x}dx$ б) $\int\limits_0^3 \sqrt{9-x^2}dx$ в) $\int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$

7.25. а) $\int\limits_{\pi^2/4}^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ б) $\int\limits_{-3}^{0} (x-2)e^{-x/3}dx$ в) $\int\limits_{\ln 5}^{\ln 12} \frac{dx}{\sqrt{e^x+4}}$

7.26. а) $\int\limits_4^9 \frac{xdx}{(1+x^2)^3}$ б) $\int\limits_1^2 x^2\ln xdx$ в) $\int\limits_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx$

7.27. а) $\int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ б) $\int\limits_{e/2}^{e^2/2} \cos(\ln 2x)dx$ в) $\int\limits_2^3 \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx$

7.28. а) $\int\limits_1^e \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$ б) $\int\limits_0^{\pi/2} (x+3)\sin xdx$ в) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x}}$

7.29. а) $\int\limits_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$ б) $\int\limits_1^e x\ln^2 xdx$ в) $\int\limits_4^7 \frac{dx}{x^2+3x-10}$

7.30. а) $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^6}$ б) $\int\limits_0^{\pi/2} x\sin xdx$ в) $\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{x+4}}$

7.31. а) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} dx$ б) $\int\limits_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$ в) $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$

III. НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

<u>**Задание 8.**</u> Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

8.1. а) $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$ б) $\int\limits_{2}^{4} \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$

8.2. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{xdx}{1+x^2}$ б) $\int\limits_{1}^{5} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

8.3. а) $\int\limits_{0}^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx$ б) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin^3 xdx}{\sqrt{\cos x}}$

8.4. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x+3)^3}$ б) $\int\limits_{0}^{1/e^2} \frac{dx}{x\ln^2 x}$

8.5. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+13}$ б) $\int\limits_{1}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$

8.6. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$ б) $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{(1-x)\ln^2(1-x)}$

8.7. а) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{x^2dx}{4+x^3}$ б) $\int\limits_{-3}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{-x^2-4x-3}}$

8.8. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x}$ б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^2dx}{\sqrt{64-x^6}}$

8.9. а) $\int\limits_{5}^{\infty} \frac{dx}{x^2-6x+13}$ б) $\int\limits_{1/3}^{1} \frac{\ln(3x-1)}{3x-1} dx$

8.10. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx$ б) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos^3 xdx}{\sqrt{\sin x}}$

8.11. а) $\int\limits_{-\infty}^{0} x^2 e^{x^3} dx$ б) $\int\limits_{0}^{1/e} \frac{dx}{x\ln^3 x}$

8.12. а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-10x+26}$ б) $\int\limits_{-2}^{0} \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+8}}$

8.13. а) $\int\limits_{e}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$ б) $\int\limits_{-1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2+3}}$

8.14. а) $\int\limits_{4}^{\infty}\frac{dx}{(x-3)^5}$ б) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{\sqrt{1-\sin x}}$

8.15. а) $\int\limits_{-1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$ б) $\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

8.16. а) $\int\limits_{-\infty}^{0}e^{5x}dx$ б) $\int\limits_{-1/2}^{0}\frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x}}$

8.17. а) $\int\limits_{-\infty}^{2}\frac{dx}{x^2+2x+10}$ б) $\int\limits_{3/4}^{1}\frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$

8.18. а) $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}dx$ б) $\int\limits_{0}^{1/5}\frac{dx}{\sqrt[3]{5x-1}}$

8.19. а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{e^{1/x}}{x^2}dx$ б) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos x}}$

8.20. а) $\int\limits_{6}^{\infty}\frac{dx}{x^2-4x+20}$ б) $\int\limits_{-\pi/2}^{0}\frac{\sin x dx}{\sqrt{1-\cos x}}$

8.21. а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$ б) $\int\limits_{0}^{2}\frac{2x dx}{\sqrt{16-x^4}}$

8.22. а) $\int\limits_{0}^{\infty}x^2\cdot e^{-x^3}dx$ б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{3-x^2-2x}}$

8.23. а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{x^2dx}{1+x^6}$ б) $\int\limits_{2}^{4}\frac{dx}{\sqrt[4]{2x-4}}$

8.24. а) $\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2\cdot e^{1/x}}$ б) $\int\limits_{-2}^{0}\frac{x^2dx}{\sqrt{64-x^6}}$

8.25. а) $\int\limits_{-2}^{\infty}\frac{dx}{x^2+6x+10}$ б) $\int\limits_{0}^{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{3-x}}$

8.26. а) $\int\limits_{4}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}}}$ б) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{2}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

8.27. а) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}2x}{1+4x^2}dx$ б) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{1-\cos x}}$

8.28. а) $\int\limits_0^{\infty} e^{-3x}dx$ б) $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}$

8.29. а) $\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$ б) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$

8.30. а) $\int\limits_3^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+5}$ б) $\int\limits_0^3 \frac{xdx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$

8.31. а) $\int\limits_{-\infty}^{2} \frac{x^2dx}{64+x^6}$ б) $\int\limits_{-\pi/2}^{0} \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{1+\sin x}}$

IV. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГАЛОВ К ЗАДАЧАМ ГЕОМЕТРИИ

Задание 9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями.

9.1. $x=4-y^2;\ x=y^2-2y$

9.2. $y=\ln x;\ y=\ln^2 x$

9.3. $\rho^2=2\cos 2\varphi$

9.4. $x=\cos^3 t;\ y=\sin^3 t$

9.5. $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{9}$

9.6. $y=\sqrt{x};\ y=x^3$

9.7. $\rho=3(1-\cos\varphi)$

9.8. $y^2=x+1;\ y^2=9-x$

9.9. $\rho^2=9\cos^2 2\varphi$

9.10. $y=4-x^2;\ y=x^2-2x$

9.11. $\rho^2=2\sin 2\varphi$

9.12. $x^2=y^3;\ y=0;\ x=4$

9.13. $x^{2/3}+y^{2/3}=3^{2/3}$

9.14. $y=x^2+1;\ x+y=3$

9.15. $\rho=4(1+\cos\varphi)$

9.16. $x=5\cos t;\ y=\sin t$

9.17. $x^{2/3}+y^{2/3}=1$

9.18. $y^2=x^3;\ x=0;\ y=4$

9.19. $\rho=4(1-\cos\varphi)$

9.20. $x=y^2+1;\ x+y=3$

9.21. $\rho=4\cos 3\varphi$

9.22. $x=2\cos t;\ y=3\sin t$

9.23. $x=\sqrt{y};\ x=y^3$

9.24. $\rho^2=8\cos 2\varphi$

9.25. $x=2\cos^3 t;\ y=2\sin^3 t$

9.26. $x^2=y+1;\ x^2=9-y$

9.27. $\rho=3(1+\cos\varphi)$

9.28. $xy=6;\ x+y-7=0$

9.29. $\rho=2\sin 3\varphi$

9.30. $y=\ln x;\ y=0;\ x=e$

9.31. $y=(x+1)^2;\ y=5-x$

<u>Задание 10.</u> Вычислить длину дуги данной линии.

10.1. $x = t - \sin t$; $y = 1 - \cos t$; $(0 \le t \le 2\pi)$

10.2. $\rho = e^{\varphi}$; $(0 \le \varphi \le 2\pi)$

10.3. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{9}$

10.4. $y = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}$; $(3 \le x \le 8)$

10.5 $\rho = 3(1 - \cos\varphi)$

10.6. $x = 5\cos^3 t$; $y = 5\sin^3 t$

10.7. $y = \ln x$; $(\sqrt{3} \le x \le \sqrt{15})$

10.8. $x = 2(t - \sin t)$; $y = 2(1 - \cos t)$; $(0 \le t \le 2\pi)$

10.9. $x = \dfrac{2}{3}\sqrt{y^3}$; $(3 \le y \le 8)$

10.10. $x = 2\cos^3 t$; $y = 2\sin^3 t$

10.11. $x^{2/3} + y^{2/3} = 3^{2/3}$

10.12. $\rho = 4(1 + \cos\varphi)$

10.13. $\rho = 3\cos\varphi$

10.14. $x = 7(t - \sin t)$; $y = 7(1 - \cos t)$; $(2\pi \le t \le 4\pi)$

10.15. $y = -\ln\cos x$; $0 \le x \le \dfrac{\pi}{6}$

10.16. $y^2 = \dfrac{4}{9}(x-1)^3$; $(1 \le x \le 4)$

10.17. $\rho = 5\sin\varphi$

10.18. $\rho = 3(1 + \cos\varphi)$

10.19. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

10.20. $x = 5(t - \sin t)$; $y = 5(1 - \cos t)$; $(0 \le t \le \pi)$

10.21. $y = 2 - e^x$; $(\ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{8})$

10.22. $\rho = 1 - \cos\varphi$

10.23. $x = \cos^3 t$; $y = \sin^3 t$

10.24. $y = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}$; $(0 \le x \le 3)$

10.25. $\rho = 1 + \cos\varphi$

10.26. $x = 3(t - \sin t)$; $y = 3(1 - \cos t)$; $(0 \le t \le \pi)$

10.27. $x = \dfrac{2}{3}\sqrt{y^3}$; $(0 \le y \le 3)$

10.28. $\rho = 4(1 - \cos\varphi)$

10.29. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{25}$

10.30. $x = 3\cos^3 t$; $y = 3\sin^3 t$

10.31. $y = e^x + 26$; $(\ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{24})$

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА

I. Неопределенный интеграл

Вычислить интегралы.

1.31.

а) $$\int \frac{dx}{\arcsin^3 x\sqrt{1-x^2}} = \left[(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right] = \int \frac{d(\arcsin x)}{\arcsin^3 x} =$$

$$= \int \arcsin^{-3} x d(\arcsin x) = \frac{\arcsin^{-2} x}{-2} + C = -\frac{1}{2\arcsin^2 x} + C.$$

б) $$\int x^2 \sqrt[7]{(3-x^3)^4} dx = -\frac{1}{3}\int (3-x^3)^{4/7} d(3-x^3) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{(3-x^3)^{11/7}}{11/7} + C =$$
$$= -\frac{7}{33}(3-x^3)^{11/7} + C.$$

в) $$\int \frac{\sqrt[5]{x^2}+3x-7}{x^2} dx = \int \frac{\sqrt[5]{x^2}}{x^2} dx + 3\int \frac{x}{x^2} dx - 7\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-8/5} dx + 3\int \frac{dx}{x} -$$

$$-7\int x^{-2} dx = \frac{x^{-3/5}}{-3/5} + 3\ln|x| - 7\frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{5}{3\cdot\sqrt[5]{x^3}} + 3\ln|x| + \frac{7}{x} + C.$$

г) $$\int 7^{\sin 6x}\cos 6x dx = \frac{1}{6}\int 7^{\sin 6x} d(\sin 6x) = \frac{1}{6}\cdot 7^{\sin 6x}\cdot\frac{1}{\ln 7} + C = \frac{7^{\sin 6x}}{6\ln 7} + C.$$

2.31.

При вычислении интегралов задания 2.31 применим формулу интегрирования по частям: $\int u dv = uv - \int v du$.

а) $$\int (2x+1)\sin(x+3) dx = \begin{bmatrix} u = 2x+1 & du = 2dx \\ dv = \sin(x+3)dx & v = -\cos(x+3) \end{bmatrix} =$$

$$= -(2x+1)\cos(x+3) + 2\int \cos(x+3) dx = -(2x+1)\cos(x+3) + 2\sin(x+3) + C$$

б) $\int \sqrt[4]{x}\ln x dx = \left[\begin{matrix} u=\ln x & du=\frac{1}{x}dx \\ dv=\sqrt[4]{x}dx & v=\frac{4}{5}x^{5/4}\end{matrix}\right] = \frac{4}{5}x^{5/4}\ln x - \frac{4}{5}\int x^{5/4}\cdot\frac{1}{x}dx =$

$= \frac{4}{5}x^{5/4}\ln x - \frac{4}{5}\int x^{1/4}dx = \frac{4}{5}x^{5/4}\ln x - \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}x^{5/4} + C =$

$= \frac{4}{5}x^{5/4}\left(\ln x - \frac{4}{5}\right) + C = \frac{4}{5}x\cdot\sqrt[4]{x}\cdot\left(\ln x - \frac{4}{5}\right) + C.$

в) $\int \sin(\ln 9x)dx = \left[\begin{matrix} u=\sin(\ln 9x) & du=\frac{\cos(\ln 9x)}{x}dx \\ dv=dx & v=x\end{matrix}\right] = x\sin(\ln 9x) -$

$-\int x\cdot\frac{\cos(\ln 9x)}{x}dx = \left[\begin{matrix} u=\cos(\ln 9x) & du=-\frac{\sin(\ln 9x)}{x}dx \\ dv=dx & v=x\end{matrix}\right] = x\sin(\ln 9x) -$

$-\left(x\cos(\ln 9x) + \int x\frac{\sin(\ln 9x)}{x}dx\right) = x\sin(\ln 9x) - x\cos(\ln 9x) - \int \sin(\ln 9x)dx$

Следовательно, $\int \sin(\ln 9x)dx = x\sin(\ln 9x) - x\cos(\ln 9x) - \int \sin(\ln 9x)dx$.

$2\int \sin(\ln 9x)dx = x\sin(\ln 9x) - x\cos(\ln 9x)$.

$\int \sin(\ln 9x)dx = \frac{x}{2}\left(\sin(\ln 9x) - \cos(\ln 9x)\right) + C$.

3.31.

а) $\int \frac{dx}{x^2-7x} = \int \frac{dx}{x^2 - 2\cdot\frac{7}{2}x + \frac{49}{4} - \frac{49}{4}} = \int \frac{d\left(x-\frac{7}{2}\right)}{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}} =$

$$=-\int\frac{d\left(x-\frac{7}{2}\right)}{\frac{49}{4}-\left(x-\frac{7}{2}\right)^2}=-\frac{1}{2\cdot\frac{7}{2}}\ln\left|\frac{\frac{7}{2}+\left(x-\frac{7}{2}\right)}{\frac{7}{2}-\left(x-\frac{7}{2}\right)}\right|+C=-\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x}{7-x}\right|+C.$$

б) $$\int\frac{6x+3}{3x^2+6x-4}dx=\left[(3x^2+6x-4)'=6x+6\right]=\int\frac{6x+6-3}{3x^2+6x-4}dx=$$

$$=\int\frac{6x+6}{3x^2+6x-4}dx-3\int\frac{dx}{3x^2+6x-4}=\int\frac{d(3x^2+6x-4)}{3x^2+6x-4}-$$

$$-\frac{3}{3}\int\frac{dx}{x^2+2x+1-1-4/3}=\ln|3x^2+6x-4|-\int\frac{dx}{(x+1)^2-7/3}=$$

$$=\ln|3x^2+6x-4|+\int\frac{d(x+1)}{7/3-(x+1)^2}=\ln|3x^2+6x-4|+\frac{1}{2\cdot\sqrt{7/3}}\times$$

$$\times\ln\left|\frac{\sqrt{7/3}+(x+1)}{\sqrt{7/3}-(x+1)}\right|+C=\ln|3x^2+6x-4|+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{7}-\sqrt{3}(x+1)}\right|+C.$$

в) $$\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-6x+5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+5/2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(x-\frac{3}{2})}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+\frac{5}{2}}\right|+C.$$

4.31.

а) $$\int\frac{7x-1}{(x-4)(x+3)^2}dx.$$

Подынтегральная функция представляет собой правильную рациональную дробь, которую разложим на простейшие дроби с неопределенными коэффициентами

$$\frac{7x-1}{(x-4)(x+3)^2}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{(x+3)^2}.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов приведем правую часть равенства к общему знаменателю и, приравняв числители дробей, получим тождество:

$$7x-1=A(x+3)^2+B(x+3)(x-4)+C(x-4).$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \left\{\begin{array}{l} 0=A+B \\ 7=6A-B+C \\ -1=9A-12B-4C \end{array}\right. \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array},$$

откуда

$$A=\frac{27}{49},\ B=-\frac{27}{49},\ C=\frac{22}{7}.$$

Таким образом,

$$\int\frac{7x-1}{(x-4)(x+3)^2}dx=\int\left(\frac{27/49}{x-4}+\frac{-27/47}{x+3}+\frac{22/7}{(x+3)^2}\right)dx=\frac{27}{49}\ln|x-4|-$$

$$-\frac{27}{49}\ln|x+3|+\frac{22}{7}\left(-\frac{1}{x+3}\right)+C=\frac{27}{49}\ln\left|\frac{x-4}{x+3}\right|-\frac{22}{7(x+3)}+C.$$

б) $\int\frac{2x^4+x^3-3}{(x+4)(x^2+9)}dx$.

Так как подынтегральная функция является неправильной дробью, то путем деления числителя на знаменатель представим ее в виде суммы целого многочлена и правильной рациональной дроби, которую разложим на простейшие дроби с неопределенными коэффициентами.

$$\frac{2x^4+x^3-3}{(x+4)(x^2+9)}=2x-7+\frac{10x^2-9x+249}{(x+4)(x^2+9)},$$

$$\frac{10x^2-9x+249}{(x+4)(x^2+9)}=\frac{A}{x+4}+\frac{Bx+C}{x^2+9},$$

$$10x^2-9x+249=A(x^2+9)+(Bx+C)(x+4),$$

$$\begin{array}{l|} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \begin{cases} 10=A+B \\ -9=4B+C \\ 249=9A+4C \end{cases}, \text{ откуда } A=\frac{89}{5},\ B=-\frac{39}{5},\ C=\frac{111}{5}.$$

Таким образом,

$$\int\frac{2x^4+x^3-3}{(x+4)(x^2+9)}dx=\int\left(2x-7+\frac{89/5}{x+4}+\frac{\frac{-39}{5}x+\frac{111}{5}}{x^2+9}\right)dx=$$

$$=\frac{2x^2}{2}-7x+\frac{89}{5}\ln|x+4|-\frac{39}{5}\int\frac{x-37/13}{x^2+9}dx=x^2-7x+\frac{89}{5}\ln|x+4|-$$

$$-\frac{39}{5}\int\frac{xdx}{x^2+9}+\frac{39}{5}\cdot\frac{37}{13}\int\frac{dx}{x^2+9}=x^2-7x+\frac{89}{5}\ln|x+4|-\frac{39}{5}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+9)}{x^2+9}+$$

$$+\frac{111}{5}\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}=x^2-7x+\frac{89}{5}\ln|x+4|-\frac{39}{10}\ln|x^2+9|+\frac{37}{5}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C.$$

5.31.

а) $$\int\frac{\cos^5 3x}{\sin^3 3x\cdot\sqrt{\sin 3x}}dx=\int\frac{\cos^4 3x\cos 3xdx}{(\sin 3x)^{7/2}}=\frac{1}{3}\int\frac{(1-\sin^2 3x)^2 d(\sin 3x)}{(\sin 3x)^{7/2}}=$$

$$=\left[\sin 3x=t\right]=\frac{1}{3}\int\frac{(1-t^2)^2 dt}{t^{7/2}}=\frac{1}{3}\int\frac{1-2t^2+t^4}{t^{7/2}}dt=$$

$$=\frac{1}{3}\int\left(t^{-7/2}-2t^{-3/2}+t^{1/2}\right)dt=\frac{1}{3}\left(\frac{t^{-5/2}}{-5/2}-2\cdot\frac{t^{-1/2}}{-1/2}+\frac{t^{3/2}}{3/2}\right)+C=$$

$$=[t=\sin 3x]=-\frac{2}{15\sqrt{\sin^5 3x}}+\frac{4}{3\sqrt{\sin 3x}}+\frac{2}{9}\sqrt{\sin^3 3x}+C.$$

б) $$\int\frac{dx}{3\sin x+3\cos x+5}=\begin{bmatrix} tg\,\dfrac{x}{2}=t,\ x=2arctgt,\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2},\quad \cos t=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{bmatrix}=$$

$$=\int\frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{3\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}+3\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+5}=\int\frac{2dt}{6t+3-3t^2+5+5t^2}=\int\frac{2dt}{2t^2+6t+8}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+3t+4}=\int\frac{d(t+\frac{3}{2})}{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=\frac{1}{\sqrt{7}/2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{7}/2}+C=\left[t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right]=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{7}}+C.$$

6.31.

В задании 6.31 (б; в) вычисляется интеграл от дифференциального бинома

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx.$$

а) $$\int\frac{\sqrt[4]{2x-1}+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}+1}dx=\begin{bmatrix}2x-1=t^4, & x=\dfrac{t^4+1}{2} \\ dx=2t^3dt & \end{bmatrix}=\int\frac{t+t^2}{t^2+1}\cdot 2t^3dt=$$

$$=2\int\frac{t^5+t^4}{t^2+1}dt=2\int\left(t^3+t^2-t-1+\frac{t+1}{t^2+1}\right)dt=2\left(\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}-t\right)+$$

$$+2\int\frac{tdt}{t^2+1}+2\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{t^4}{2}+\frac{2}{3}t^3-t^2-2t+\int\frac{d(t^2+1)}{t^2+1}+2\,\mathrm{arctg}\,t=$$

$$=\frac{t^4}{2}+\frac{2}{3}t^3-t^2-2t+\ln(t^2+1)+2\,\mathrm{arctg}\,t+C=\left[t=\sqrt[4]{2x-1}\right]=\frac{2x-1}{2}+$$

$$+\frac{2}{3}(2x-1)^{3/4}-\sqrt{2x-1}-2\cdot\sqrt[4]{2x-1}+\ln(\sqrt{2x-1}+1)+2\,\mathrm{arctg}\sqrt[4]{2x-1}+C$$

.

б) $$\int\frac{x^8dx}{\sqrt{2-x^3}}=\int x^8(2-x^3)^{-1/2}dx=\begin{bmatrix} m=8,\ n=3,\ p=-1/2 \\ \dfrac{m+1}{n}=\dfrac{8+1}{3}=3\in \boldsymbol{Z} \\ 2-x^3=t^2,\ x=\sqrt[3]{2-t^2} \\ dx=-\dfrac{2tdt}{3\cdot\sqrt[3]{(2-t^2)^2}} \end{bmatrix}=$$

$$=\int\frac{(2-t^2)^{8/3}(-2t)}{3(2-t^2)^{2/3}t}dt=-\frac{2}{3}\int(2-t^2)^2dt=-\frac{2}{3}\int(4-4t^2+t^4)dt=$$

$$=-\frac{2}{3}\left(4t-\frac{4t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right)+C=\left[t=\sqrt{2-x^3}\right]=-\frac{8}{3}\sqrt{2-x^3}+\frac{8}{9}\left(2-x^3\right)^{3/2}-$$

$$-\frac{2}{15}\left(2-x^3\right)^{5/2}+C=-\frac{8}{3}\sqrt{2-x^3}+\frac{8}{9}(2-x^3)\cdot\sqrt{2-x^3}-$$

$$-\frac{2}{15}(2-x^3)^2\cdot\sqrt{2-x^3}+C.$$

в) $$\int\frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt{x})^4}}{x\cdot\sqrt[10]{x^9}}dx=\int x^{-19/10}(1+x^{1/2})^{4/5}dx=$$

$$= \left[\begin{matrix} m = -\dfrac{19}{10}, \quad n = \dfrac{1}{2}, \quad p = \dfrac{4}{5}; \quad \dfrac{m+1}{n} + p = \dfrac{-19/10+1}{1/2} + \dfrac{4}{5} = -1 \in \boldsymbol{Z}, \\ x^{-1/2} + 1 = t^5, \quad -\dfrac{1}{2} x^{-3/2} dx = 5t^4 dt, \quad x^{-3/2} dx = -10t^4 dt \end{matrix} \right] =$$

$$= \int x^{-19/10} \cdot x^{1/2 \cdot 4/5} \cdot \left(x^{-1/2} + 1\right)^{4/5} dx = \int x^{-3/2} \left(x^{-1/2} + 1\right)^{4/5} dx =$$

$$= -10 \int t^4 \cdot \left(t^5\right)^{4/5} dt = -10 \int t^8 dt = -10 \cdot \frac{t^9}{9} + C = \left[t = \sqrt[5]{1 + x^{-1/2}} \right] =$$

$$= -\frac{10}{9} \left(1 + x^{-1/2}\right)^{9/5} + C = -\frac{10}{9} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \sqrt[5]{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4} + C.$$

II. Определенный интеграл

7.31. Вычислить определенные интегралы.

При вычислении определенных интегралов применим формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

а) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \dfrac{x}{2} dx$.

Подынтегральная функция $f(x) = \sin^2 \dfrac{x}{2}$ является четной, отрезок интегрирования $[-\pi, \pi]$ симметричен относительно начала координат, следовательно:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} dx = 2 \int_0^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} dx =$$

$$= \int_0^{\pi} (1 - \cos x) dx = (x - \sin x) \Big|_0^{\pi} = \pi - \sin \pi - (0 - \sin 0) = \pi.$$

б) $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = \left[\begin{array}{ll} x = 2\sin t; & dx = 2\cos t dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0; & x = 2 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right] =$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt = 4\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2\int\limits_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)dt =$$

$$= 2\cdot\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\cdot\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi - 0 - \frac{1}{2}\sin 0\right) = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

в) $\int\limits_0^4 \dfrac{dx}{1+\sqrt{2x+1}} = \left[\begin{array}{lll} 2x+1 = t^2; & x = \dfrac{1}{2}(t^2-1); & dx = tdt \\ x = 0 \Rightarrow t = 1; & x = 4 \Rightarrow t = 3 & \end{array}\right] = \int\limits_1^3 \dfrac{tdt}{1+t} =$

$$= \int\limits_1^3 \frac{(t+1)-1}{t+1}dt = \int\limits_1^3 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = \left(t - \ln|t+1|\right)\Big|_1^3 = 3 - \ln 4 - (1 - \ln 2) =$$

$$= 2 - (\ln 4 - \ln 2) = 2 - \ln 2.$$

III. Несобственный интеграл

8.31. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

а) $\int\limits_{-\infty}^2 \dfrac{x^2dx}{64+x^6} = \lim\limits_{\alpha\to-\infty}\int\limits_\alpha^2 \dfrac{x^2dx}{64+x^6} = \dfrac{1}{3}\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\int\limits_\alpha^2 \dfrac{d(x^3)}{8^2+(x^3)^2} = \dfrac{1}{3}\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\left(\dfrac{1}{8}\operatorname{arctg}\dfrac{x^3}{8}\right)\Bigg|_\alpha^2 =$

$$= \frac{1}{24}\lim_{\alpha\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{2^3}{8} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{8}\right) = \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{4} - \lim_{\alpha\to-\infty}\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{8}\right) = \frac{1}{24}\cdot\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{24}\cdot\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{32}.$$

б) $\int\limits_{-\pi/2}^0 \dfrac{\cos x dx}{\sqrt[3]{1+\sin x}}.$

Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке $x=-\frac{\pi}{2}$. Следовательно, по определению

$$\int_{-\pi/2}^{0}\frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{1+\sin x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{0}\frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{1+\sin x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{0}(1+\sin x)^{-1/3}d(1+\sin x)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left.\frac{3\cdot(1+\sin x)^{2/3}}{2}\right|_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{0}\right)=\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left.\sqrt[3]{(1+\sin x)^2}\right|_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{0}=$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[3]{(1+\sin 0)^2}-\sqrt[3]{\left(1+\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(1-\sqrt[3]{\left(1+\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)\right)^2}\right)=\frac{3}{2}(1-0)=\frac{3}{2}.$$

IV. Приложения определенных интегралов к задачам геометрии

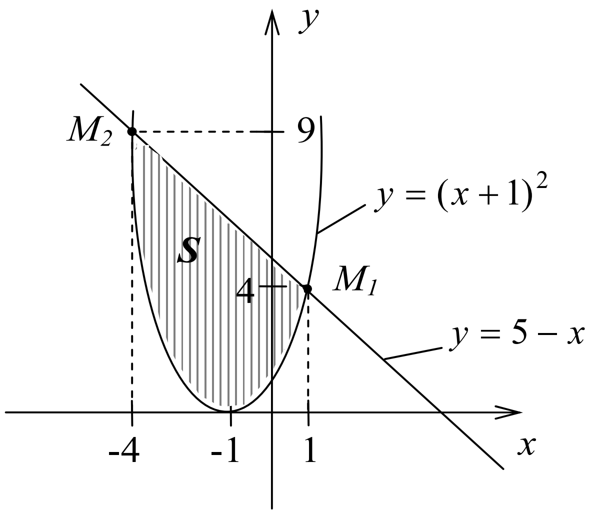
9.31. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями:

$$y=(x+1)^2;\quad y=5-x.$$

Найдем точки пересечения параболы $y=(x+1)^2$ и прямой $y=5-x$.

$$\begin{cases} y=(x+1)^2 \\ y=5-x \end{cases}\Rightarrow (x+1)^2=5-x\Rightarrow x^2+3x-4=0\Rightarrow x_1=1; x_2=-4.$$

Получили две точки $M_1(1;4)$ и $M_2(-4;9)$. Строим чертеж.



Для вычисления указанной площади воспользуемся формулой:

$$S=\int_a^b \left(y_2(x)-y_1(x)\right)dx .$$

Получаем:

$$S=\int_{-4}^{1}\left(5-x-(x+1)^2\right)dx=$$

$$=\left(5x-\frac{x^2}{2}-\frac{(x+1)^3}{3}\right)\Bigg|_{-4}^{1}=$$

$$5-\frac{1}{2}-\frac{8}{3}-\left(-20-\frac{16}{2}-\frac{-27}{3}\right)=5-\frac{1}{2}-\frac{8}{3}+20+8-9=22-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=20\frac{5}{6}\ (\text{ед.}^2)$$

Ответ: $S=20\frac{5}{6}(\text{ед.}^2)$.

10.31. Вычислить длину дуги данной линии

$$y=e^x+26 \quad (\ln\sqrt{8}\le x\le \ln\sqrt{24}) .$$

Для вычисления длины дуги воспользуемся формулой:

$$l=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

В нашем случае $a=\ln\sqrt{8}$; $b=\ln\sqrt{24}$; $y'=e^x$.

Тогда: $l=\int_{\ln\sqrt{8}}^{\ln\sqrt{24}} \sqrt{1+\left(e^x\right)^2}\,dx=\int_{\ln\sqrt{8}}^{\ln\sqrt{24}} \sqrt{1+e^{2x}}\,dx=$

$$=\left[\begin{array}{l} 1+e^{2x}=t^2;\ x=\ln\sqrt{t^2-1};\quad x=\ln\sqrt{8}\Rightarrow t=3 \\ e^{2x}=t^2-1;\ \ dx=\dfrac{tdt}{t^2-1};\quad x=\ln\sqrt{24}\Rightarrow t=5 \end{array}\right]=\int_3^5\frac{t\cdot tdt}{t^2-1}=$$

$$=\int_3^5\frac{(t^2-1)+1}{t^2-1}dt=\int_3^5\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_3^5=$$

$$=5+\frac{1}{2}\ln\frac{4}{6}-3-\frac{1}{2}\ln\frac{2}{4}=2+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2}\right)==2+\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{4}{3}=2+\ln\frac{2}{\sqrt{3}}\ (\text{ед.})$$

Ответ: $l=2+\ln\frac{2}{\sqrt{3}}$ (ед.)

Евтухова Светлана Михайловна
Иванейчик Ирина Владимировна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

Практикум по выполнению расчетно-графических работ для студентов дневной формы обучения

Подписано в печать 25.11.09.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Ризография. Усл. печ. л. 2,09. Уч.-изд. л. 1,62.
Изд. № 79.
E-mail: ic@gstu.gomel.by
http://www.gstu.gomel.by

Отпечатано на цифровом дупликаторе
с макета оригинала авторского для внутреннего использования.
Учреждение образования «Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого».
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.