Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

Л. Д. Корсун, С. П. Курлович

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ПРАКТИКУМ
по выполнению домашних заданий курсов «Математика» и «Высшая математика» для студентов дневной формы обучения

Гомель 2009

УДК 517.4(075.8)
ББК 22.161я73
К69

*Рекомендовано научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 7 от 10.03.2008 г.)*

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. каф. «Физика» ГГТУ им. П. О. Сухого *П. А. Хило*

Корсун, Л. Д.

К69 Операционное исчисление : практикум по выполнению домаш. заданий курсов «Математика» и «Высшая математика» для студентов днев. формы обучения / Л. Д. Корсун, С. П. Курлович. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2009. – 37 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

Практикум содержит краткие сведения по теории раздела «Операционное исчисление». Сформулированы основные понятия и приведены решения типовых задач.

Для студентов дневной формы обучения.

УДК 517.4(075.8)
ББК 22.161я73

§ 1. Оригиналы и изображения

Функция действительного переменного $f(t)$ называется **оригиналом,** если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(t) \equiv 0$, при $t < 0$;

2) $f(t)$ и ее производная $f'(t)$ на любом конечном интервале оси t имеют не более конечного числа точек разрыва 1-го рода;

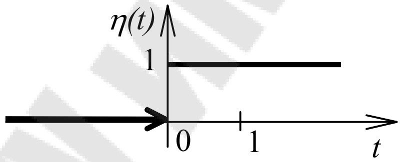
3) существуют такие числа $M > 0$ и $s \geq 0$, что для всех t выполняется неравенство

$$|f(t)| \leq Me^{st}. \tag{1}$$

Таким образом, $|f(t)|$ при $t \to +\infty$ возрастает не быстрее показательной функции, при этом $s_0 = \min\{s\}$ называют показателем роста $f(t)$.

Простейшей функцией-оригиналом является так называемая **единичная функция Хевисайда**

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{2}$$



Очевидно, что $\varphi(t)\eta(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$

так что если $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 2) и 3), то $\varphi(t)\eta(t)$ является оригиналом.

В дальнейшем для сокращения записи будем опускать функцию $\eta(t)$, считая, что условие 1) для $f(t)$ выполняется.

Пример 1. Показать, что функция $f(t) = \begin{cases} e^{4t}\cos 2t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$ является функцией-оригиналом.

Решение.

Проверим все условия:

- условие 1) выполняется в силу задания функции ($f(t) = 0$ при $t < 0$);
- условие 2) выполняется, так как $f(t)$ и $f'(t) = e^{4t}(4\cos 2t - 2\sin 2t)$ на любом конечном интервале оси t непрерывны;
- условие 3) выполняется, так как для любых вещественных t $\left|e^{4t}\cos 2t\right| \leq Me^{s_0 t}$ и в качестве постоянных M и s_0 можно выбрать $M = 1$, $s_0 = 4$.

<u>*Ответ*</u>: $f(t)$ является функцией-оригиналом.

ЗАДАНИЯ

Проверить, какие из указанных функций являются функциями-оригиналами:

1.[*] $t\eta(t)$. **2.** $(5t^2+t)\eta(t)$.

3. $e^{(2+4i)t}\eta(t)$. **4.** $2e^{(3-5i)t}\eta(t)$.

5. $\dfrac{1}{t-3}\eta(t)$. **6.** $e^{t^2}\eta(t)$.

7. $e^{-t^2}\eta(t)$. **8.** $\dfrac{1}{t^2+2}\eta(t)$.

§ 2. Преобразование Лапласа

Каждому оригиналу $f(t)$ поставим в соответствие функцию $F(p)$ комплексного переменного $p=s+i\sigma$, определенную как интеграл

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \tag{3}$$

или, в символической записи

$$f(t) \risingdotseq F(p).$$

Правая часть равенства (3) называется **интегралом Лапласа** для функции $f(t)$, а функция $F(p)$ – **изображением Лапласа** (или короче – изображением) оригинала $f(t)$.

Функция $F(p)$ определена в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$ (интеграл (3) сходится в области $\operatorname{Re} p > s_0$, где s_0 – показатель роста функции $f(t)$, причем в области $\operatorname{Re} p = s > s_0$).

Функция $F(p)$ является аналитической функцией комплексной переменной p в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ и $F(p)\to 0$ при $p\to\infty$.

Пример 2. Найти изображение единичной функции Хевисайда $\eta(t)$ (2).

Решение.

Применяя преобразование Лапласа (3) к функции $\eta(t)$, находим

$$\eta(t) \risingdotseq \int_0^{+\infty}\eta(t)e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt=-\left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_0^{+\infty}=\frac{1}{p},\ (\operatorname{Re} p>0).$$

<u>*Ответ*</u>: $\eta(t) \risingdotseq \dfrac{1}{p}$ или $1 \risingdotseq \dfrac{1}{p}$.

---

[*] Ответы к заданиям приведены на с. 31-33.

Пример 3. Найти изображение оригинала $f(t)=e^{2t}$.

Решение.

Функция $f(t)=e^{2t}$ имеет показатель роста $s_0=2$, поэтому изображение $F(p)$ будет определено и аналитично в полуплоскости $\operatorname{Re} p>2$. Имеем: $F(p)=\int_0^{+\infty} e^{2t}e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty} e^{-(p-2)t}dt=\frac{1}{-(p-2)}e^{-(p-2)t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{p-2}, \quad (\operatorname{Re} p>2).$

<u>*Ответ*</u>: $e^{2t} \risingdotseq \frac{1}{p-2}$.

Таблица изображений простейших оригиналов:

$1 \risingdotseq \frac{1}{p}, \qquad \operatorname{Re} p>0.$	$\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}, \qquad \operatorname{Re} p>0.$
$t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}, \qquad \operatorname{Re} p>0.$	$\cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}, \qquad \operatorname{Re} p>0.$
$e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1}, \qquad \operatorname{Re} p>1.$	$\operatorname{sh} t \risingdotseq \frac{1}{p^2-1}, \qquad \operatorname{Re} p>1.$
$t^n e^t \risingdotseq \frac{n!}{(p-1)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} p>1.$	$\operatorname{ch} t \risingdotseq \frac{p}{p^2-1}, \qquad \operatorname{Re} p>1.$

Замечание. Более полная таблица приведена на стр. 33.

<u>**ЗАДАНИЯ**</u>

Пользуясь определением, найти изображения следующих оригиналов:

9. $f(t)=t$. **10.** $f(t)=2t+3$.

11. $f(t)=te^t$. **12.** $f(t)=2te^{3t}$.

13. $f(t)=\sin 3t$. **14.** $f(t)=\cos 2t$.

15. $f(t)=t^\alpha \ (\alpha>-1)$. **16.** $f(t)=\operatorname{ch} 4t$.

§ 3. Свойства преобразования Лапласа

1) Свойство линейности

Если $f(t)\risingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p>s_1$ и $g(t)\risingdotseq G(p)$, $\operatorname{Re} p>s_2$, то для любых комплексных постоянных α и β

$$\alpha f(t)+\beta g(t)\risingdotseq \alpha F(p)+\beta G(p), \qquad \operatorname{Re} p>\max\{s_1,s_2\}, \tag{4}$$

где s_1,s_2 – показатели степени роста функций $f(t)$ и $g(t)$.

Пример 4. Найти изображение оригинала $2+3t^2-4\sin t$.
Решение.
Найдем изображения оригиналов:

$$1 \fallingdotseq \frac{1}{p},\ \ t^2 \fallingdotseq \frac{2}{p^3},\ \ \sin t \fallingdotseq \frac{1}{p^2+1},\ \ (\operatorname{Re} p>0).$$

Тогда по свойству 1)

$$2+3t^2-4\sin t \fallingdotseq \frac{2\cdot 1}{p}+\frac{3\cdot 2}{p^3}-\frac{4}{p^2+1},\ (\operatorname{Re} p>0).$$

<u>*Ответ*</u>: $\dfrac{2}{p}+\dfrac{6}{p^3}-\dfrac{4}{p^2+1},\ (\operatorname{Re} p>0).$

<u>ЗАДАНИЯ</u>

Найти изображения оригиналов, используя свойство линейности и таблицу простейших оригиналов:

17. $3+4t+2t^2$. **18.** t^3-2t+1.
19. $t+2\sin t$. **20.** $t^2-4t+3\cos t$.
21. $4t+4\operatorname{sh} t+2e^t$. **22.** $5t^2-\operatorname{ch} t+te^t$.

2) Теорема подобия

Для любого постоянного $\alpha>0$

$$f(\alpha t) \fallingdotseq \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right),\ \ \operatorname{Re} p>\alpha s_0, \qquad (5)$$

если $f(t) \fallingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p>s_0$.

Пример 5. Найти изображение оригинала $\sin 2t$.
Решение.

Изображение оригинала $\sin t \fallingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$, $\operatorname{Re} p>0$, тогда по теореме подобия

$$\sin 2t \fallingdotseq \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{p}{2}\right)^2+1}=\frac{1}{2}\frac{2^2}{p^2+2^2}=\frac{2}{p^2+4},\ \operatorname{Re} p>0.$$

<u>*Ответ*</u>: $\dfrac{2}{p^2+4}$.

ЗАДАНИЯ

Найти изображения оригиналов, используя свойство линейности и теорему подобия:

23. e^{4t}. **24.** $\cos 3t$.

25. $\sin \omega t$. **26.** $\cos \omega t$.

27. $\sin^2 t$. **28.** $\cos^3 t$.

29. $\sin 2t \cos 4t$. **30.** $\cos mt \cos nt$.

31. $2\,\mathrm{ch}^2\, 2t - 4e^{5t}$. **32.** $\sin^4 t + 5\,\mathrm{sh}^2\, 3t$.

3) Теорема смещения

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, то для любого комплексного числа p_0

$$e^{p_0 t} f(t) \risingdotseq F(p - p_0), \qquad \operatorname{Re}(p - p_0) > s_0. \tag{6}$$

Пример 6. Найти изображение оригинала $f(t) = e^{-t} \cos 2t$.

Решение.

Оригиналу $\cos 2t$ соответствует изображение $\dfrac{p}{p^2 + 4}$. По теореме смещения ($p_0 = -1$) $\quad e^{-t} \cos 2t \risingdotseq \dfrac{p+1}{(p+1)^2 + 4}$.

Ответ: $\dfrac{p+1}{(p+1)^2 + 4}$.

ЗАДАНИЯ

Найти изображения оригиналов, используя теорему смещения:

33. $e^{2t} \sin 2t$. **34.** $e^{-3t} \cos 4t$.

35. $e^{-t} t^3 + e^{4t}\,\mathrm{sh}\, t$. **36.** $e^{t}\left(t^2 + 2t + \mathrm{ch}\, t\right)$.

37. $e^{3t}(\mathrm{sh}\, 2t + \cos t)$. **38.** $e^{-2t}(\mathrm{ch}\, 3t - \sin 2t)$.

39. $e^{-4t} \sin^2 t$. **40.** $e^{5t} \cos^2 t$.

4) Теорема запаздывания

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, то для любого положительного τ

$$f(t - \tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p), \qquad \operatorname{Re} p > s_0, \tag{7}$$

где

$$f(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \tau > 0, \\ f(t - \tau), & t \geq \tau. \end{cases}$$

Теорему запаздывания удобно использовать при отыскании изображения функций, которые на разных участках задаются различными алгебраическими выражениями.

Пример *7*. Найти изображение оригинала $f(t-1)=(t-1)^2\eta(t-1)$.

Решение.

Для функции $f(t)=t^2\eta(t)$ имеем $f(t)\risingdotseq\dfrac{2}{p^3}$.

По теореме запаздывания $(t-1)^2\eta(t-1)\risingdotseq e^{-p}\dfrac{2}{p^3}$.

Ответ: $e^{-p}\dfrac{2}{p^3}$.

ЗАДАНИЯ

Найти изображения оригиналов:

41. $\sin(t-2)\eta(t-2)$. **42.** $\cos(t-3)\eta(t-3)$.

43. $\cos^2(t-1)\eta(t-1)$. **44.** $\sin^2(t-2)\eta(t-2)$.

45. $e^{t-2}\eta(t-2)$. **46.** $e^{t}\eta(t-3)$.

47. $(t-1)^2\eta(t)$. **48.** $t^2\eta(t-1)$.

Пример 8. Найти изображение $F(p)$ оригинала $f(t)$, заданного следующим графиком (рис. 2):

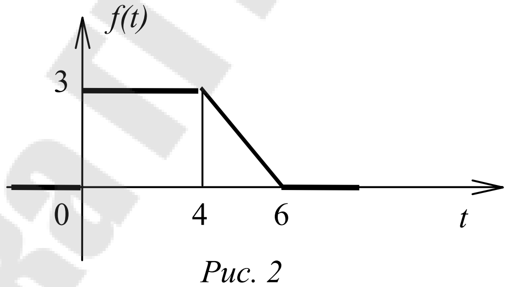


Рис. 2

Решение.

Найдем с помощью единичной функции Хевисайда аналитическое выражение для функции $f(t)$

$$f(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t<0,\\ 3 & \text{при } 0\le t<4,\\ 9-\dfrac{3}{2}t & \text{при } 4\le t<6,\\ 0 & \text{при } t\ge 6.\end{cases}$$

$f(t)=0$ при $t<0$; в момент $t=0$ «включается» функция, равная 3; в момент $t=4$ она «гасится» и «включается» функция $9-\frac{3}{2}t$; в момент $t=6$ «гасится» и эта функция. Всю эту последовательность действий можно записать так:

$$f(t)=3\cdot\eta(t)-3\cdot\eta(t-4)+\left(9-\frac{3}{2}t\right)\cdot\eta(t-4)-\left(9-\frac{3}{2}t\right)\cdot\eta(t-6)=$$

$$=3\cdot\eta(t)+\left(6-\frac{3}{2}t\right)\cdot\eta(t-4)-\left(9-\frac{3}{2}t\right)\cdot\eta(t-6).$$

Для того, чтобы найти изображение этой функции, нужно представить ее в форме

$$f(t)=3\cdot\eta(t)+\varphi_1(t-4)\cdot\eta(t-4)+\varphi_2(t-6)\cdot\eta(t-6).$$

Имеем

$$f(t)=3\cdot\eta(t)-\frac{3}{2}(t-4)\cdot\eta(t-4)+\frac{3}{2}(t-6)\cdot\eta(t-6).$$

Так как

$$\varphi_1(t)=-\frac{3}{2}t \risingdotseq -\frac{3}{2p^2}, \qquad \varphi_2(t)=\frac{3}{2}t \risingdotseq \frac{3}{2p^2},$$

то, применяя теорему запаздывания, находим

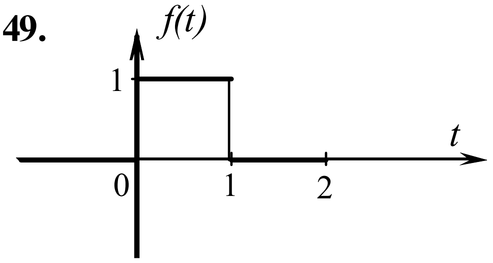
$$f(t)\risingdotseq\frac{3}{p}-\frac{3}{2p^2}e^{-4p}+\frac{3}{2p^2}e^{-6p}.$$

Ответ: $\frac{3}{p}-\frac{3}{2p^2}\left(e^{-4p}-e^{-6p}\right)$.

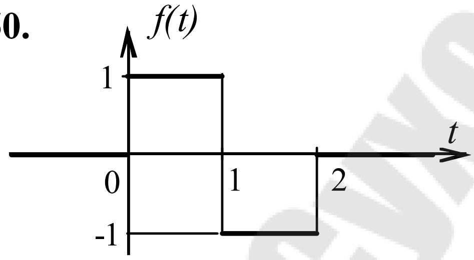
ЗАДАНИЯ

Найти изображения функций, заданных графически:

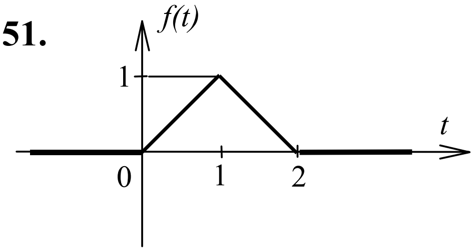
49.



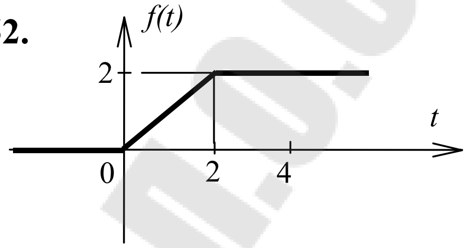
50.



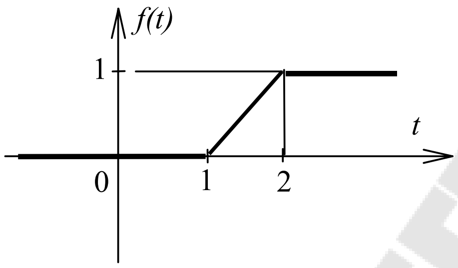
51.



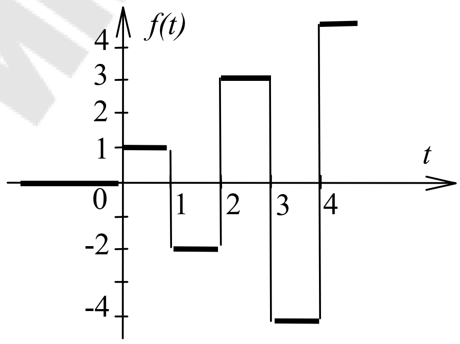
52.



53.



54.



5) Изображение периодической функции

Если $f(t)$ – периодическая функция с периодом T, т.е. $f(t+T)=f(t)$, то ее изображение $F(p)$ задается формулой

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pt}f(t)dt \tag{8}$$

и определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > 0$.

Пример 9. Найти изображение периодической функции $f(t)$, заданной графически (рис. 3):

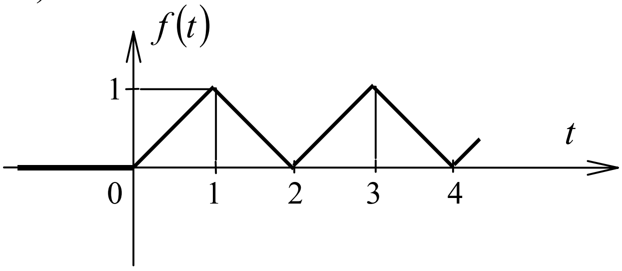


Рис. 3

Решение.

Изображение находим по формуле

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pT} f(t)dt,$$

где $f(t)$ – периодическая с периодом $T=2$ функция

$$f(t)=\begin{cases} t & \text{при } 0\le t\le 1, \\ 2-t & \text{при } 1<t\le 2. \end{cases}$$

Тогда

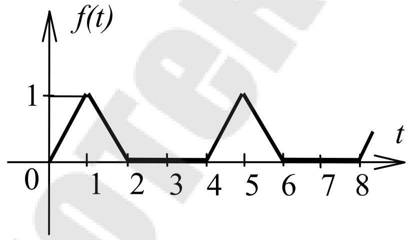
$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-2p}}\left[\int_0^1 te^{-pt}dt+\int_1^2 (2-t)e^{-pt}dt\right]=\frac{1-e^{-p}}{p^2\left(1+e^{-p}\right)}.$$

<u>*Ответ*</u>: $\dfrac{1-e^{-p}}{p^2\left(1+e^{-p}\right)}$.

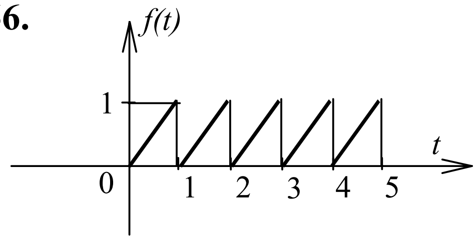
<u>ЗАДАНИЯ</u>

Найти изображения следующих периодических функций-оригиналов:

55.



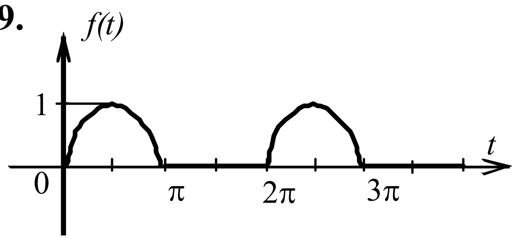
56.



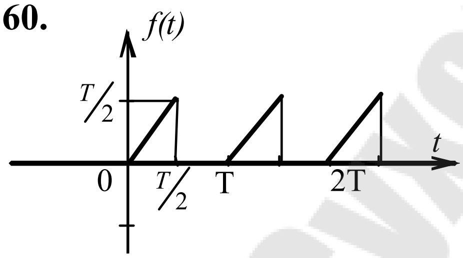
57. $f(t)=|\sin t|$.

58. $f(t)=|\cos t|$.

59.



60.



6) Дифференцирование оригинала

Если функции $f(t), f'(t),..., f^{(n)}(t)$ являются оригиналами и $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, то

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \risingdotseq p^2F(p) - pf(0) - f'(0),$$

$$f'''(t) \risingdotseq p^3F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0),$$

. . . .

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0), \qquad (9)$$

где под $f^{(k)}(0)$ $(k = 1,2,...,n-1)$ понимается $\lim\limits_{t \to 0+0} f^{(k)}(t)$.

Свойство дифференцирования оригинала широко используется при решении дифференциальных уравнений.

Пример 10. Найти изображение оригинала $f(t) = \sin^2 t$.

Решение.

Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$, тогда $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$.

Но $f(0) = \sin^2(0) = 0$, а $\left(\sin^2 t\right)' = 2\sin t \cos t = \sin 2t \risingdotseq \dfrac{2}{p^2 + 4}$.

Следовательно, $\dfrac{2}{p^2 + 4} = pF(p)$, откуда $f(t) \risingdotseq F(p) = \dfrac{2}{p\left(p^2 + 4\right)}$.

<u>*Ответ*</u>: $\dfrac{2}{p\left(p^2 + 4\right)}$.

<u>ЗАДАНИЯ</u>

Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображения следующих оригиналов:

61. $\cos^2 t$.

62. $t\sin 2t$.

63. $x''(t) - 2x'(t) - 3$, если $x(0) = x'(0) = 0$.

64. $x'''(t) + x''(t) - x'(t)$, если $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

65. $x''(t)+4x'(t)-t$, если $x(0)=x'(0)=1$.

66. $x'''(t)+2x''(t)-3x'(t)+e^t$, если $x(0)=x'(0)=x''(0)=-1$.

7) Дифференцирование изображения

Если $f(t)\risingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, то

$$-t\,f(t)\risingdotseq F'(p),$$

$$(-1)^2 t^2 f(t)\risingdotseq F''(p),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(-1)^n t^n f(t)\risingdotseq F^{(n)}(p),$$

или

$$t^n f(t)\risingdotseq(-1)^n F^{(n)}(p),\qquad n=1,2,\ldots,\qquad \operatorname{Re} p > s_0. \tag{10}$$

Пример 11. Найти изображение оригинала $f(t)=t^2e^{3t}$.

Решение.

Имеем $e^{3t}\risingdotseq\dfrac{1}{p-3}$. По теореме о дифференцировании изображения

$$t^2e^{3t}\risingdotseq(-1)^2\left(\frac{1}{p-3}\right)''=\left(-\frac{1}{(p-3)^2}\right)'=\frac{2}{(p-3)^3}.$$

<u>*Ответ*</u>: $t^2e^{3t}\risingdotseq\dfrac{2}{(p-3)^3}$.

<u>ЗАДАНИЯ</u>

Найти изображения следующих оригиналов:

67. $t^2\cos 2t$.

68. $t\left(\sin t+e^{4t}\right)$.

69. $t^2\left(e^{2t}+\operatorname{ch}3t\right)$.

70. $t^2\left(e^{2t}-\operatorname{sh}t\right)$.

71. $\left(t^3+t\right)\sin 2t$.

72. $\left(t^2-t+2\right)\cos 3t$.

8) Интегрирование оригинала

Если $f(t)\risingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, то

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau\risingdotseq\frac{F(p)}{p},\qquad \operatorname{Re} p > s_0. \tag{11}$$

Пример 12. Найти изображение оригинала $\int\limits_0^t \tau \cdot e^{\tau} d\tau$.

Решение.

По теореме о дифференцировании изображения

$$te^t \risingdotseq -\left(\frac{1}{p-1}\right)' = \frac{1}{(p-1)^2}.$$

По теореме об интегрировании оригинала

$$\int\limits_0^t \tau \cdot e^{\tau} d\tau \risingdotseq \frac{\frac{1}{(p-1)^2}}{p} = \frac{1}{p(p-1)^2}.$$

<u>*Ответ*</u>: $\frac{1}{p(p-1)^2}$.

<u>ЗАДАНИЯ</u>

Найти изображения следующих оригиналов:

73. $\int\limits_0^t \sin\tau \, d\tau$.

74. $\int\limits_0^t (\tau+1)\cos 2\tau \, d\tau$.

75. $\int\limits_0^t \tau \operatorname{sh} 2\tau \, d\tau$.

76. $\int\limits_0^t \cos^2 2\tau \, d\tau$.

77. $\int\limits_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$.

78. $\int\limits_0^t \tau^2 \operatorname{sh}\tau \, d\tau$.

9) Интегрирование изображения

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$ и интеграл $\int\limits_p^{\infty} F(p)dp$ сходится, то он служит изображением оригинала $\frac{f(t)}{t}$:

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_p^{\infty} F(p)dp, \quad \operatorname{Re} p > s_0. \qquad (12)$$

З а м е ч а н и е.

Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$ и пусть сходится несобственный интеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt$. Тогда

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int\limits_0^{\infty} F(p)dp. \qquad (13)$$

Пример 13. Найти изображение оригинала $\dfrac{\sin t}{t}$.

Решение.

Так как $\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$, то применяя формулу (12), находим

$$\frac{\sin t}{t} \risingdotseq \int\limits_p^\infty \frac{1}{p^2+1}\,dp = \operatorname{arctg} p\Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p .$$

<u>*Ответ*</u>: $\dfrac{\sin t}{t} \risingdotseq \operatorname{arcctg} p$.

Пример 14. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$.

Решение.

Имеем $\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$. По формуле (13)

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \int\limits_0^\infty \frac{dp}{p^2+1} = \operatorname{arctg} p\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

<u>*Ответ*</u>: $\dfrac{\pi}{2}$.

<u>ЗАДАНИЯ</u>

Найти изображения следующих оригиналов:

79. $\dfrac{e^t-1}{t}$. **80.** $\dfrac{1-\cos t}{t}$.

81. $\dfrac{\sin^2 t}{t}$. **82.** $\dfrac{e^t-e^{-t}}{t}$.

83. $\dfrac{\cos t-\cos 2t}{t}$. **84.** $\dfrac{e^t-1-t}{t}$.

Вычислить интегралы:

85. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{e^{-2t}-e^{-3t}}{t}\,dt$. **86.** $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{e^{-t}\sin t}{t}\,dt$.

87. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{e^{-2t}-e^{t}}{t}\sin 3t\,dt$. **88.** $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\cos 2t-\cos 4t}{t}\,dt$.

10) Свертка оригиналов (умножение изображений)

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $g(t) \risingdotseq G(p)$, то произведение двух изображений $F(p)$ и $G(p)$ также является изображением, причем

$$F(p)G(p) \risingdotseq \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\,. \qquad (14)$$

Интеграл в правой части (14) называется **сверткой** и обозначается символом $f(t)*g(t)$.

Пример 15. Найти изображение оригинала

$$\psi(t) = \int_0^t (t-\tau)e^{\tau}\,d\tau\,.$$

Решение.

Оригинал $\psi(t)$ есть свертка оригиналов $g(t)=t$ и $f(t)=e^t$. По теореме о свертке (14)

$$\psi(t) \risingdotseq \Psi(p) = F(p)G(p) = \frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{p-1} = \frac{1}{p^2(p-1)}\,.$$

Ответ: $\dfrac{1}{p^2(p-1)}$.

ЗАДАНИЯ

Вычислить интегралы:

89. $\int_0^t e^{t-\tau}\sin\tau\,d\tau\,.$ **90.** $\int_0^t \cos(t-\tau)e^{2\tau}\,d\tau\,.$

91. $\int_0^t (t-\tau)^2\,\mathrm{ch}\,\tau\,d\tau\,.$ **92.** $\int_0^t e^{2(\tau-t)}\tau^2\,d\tau\,.$

93. $\int_0^t \tau^3\,\mathrm{sh}(t-\tau)\,d\tau\,.$ **94.** $\int_0^t e^{2(t-\tau)}\sin\tau\cos\tau\,d\tau\,.$

Таблица 1

Теоремы соответствия операций над оригиналами и изображениями

№	Теорема	Оригинал	Изображение
1.	Свойство линейности	$\alpha f(t)+\beta g(t)$	$\alpha F(p)+\beta G(p)$
2.	Теорема подобия	$f(\alpha t),\ (\alpha>0)$	$\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$
3.	Теорема смещения	$e^{p_0 t}f(t)$	$F(p-p_0)$
4.	Теорема запаздывания	$f(t-\tau),\ (\tau>0)$	$e^{-p\tau}F(p)$
5.	Дифференцирование оригинала	$f'(t)$ $f^{(n)}(t)$	$pF(p)-f(0)$ $p^{(n)}F(p)-p^{n-1}f(0)-$ $-p^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$
6.	Дифференцирование изображения	$-t\,f(t)$ $(-t)^n f(t)$	$F'(p)$ $F^{(n)}(p)$
7.	Интегрирование оригинала	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{F(p)}{p}$
8.	Интегрирование изображения	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(p)dp$
9.	Свертка оригиналов	$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$	$F_1(p)F_2(p)$
10.	Интеграл Дюамеля	$pF(p)\Phi(p)\risingdotseq\int_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau)d\tau+f(t)\varphi(0)$	
11.	Изображение периодической функции $f(t)$, (T - период)	$F(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pt}f(t)dt$	

§ 4. Определение оригинала по изображению

Для восстановления оригинала по известному изображению используют свойства § 3 и следующие приемы:

I. Если $F(p)=\dfrac{Q(p)}{R(p)}$ – правильная рациональная дробь, то разлагают эту дробь на сумму простейших дробей и находят оригиналы для каждой простой дроби, используя свойства и теоремы § 3.

Пример 16. Найти оригинал, соответствующий изображению

$$F(p)=\frac{-5}{p(p-1)\left(p^2+4p+5\right)}.$$

Решение.
Разлагаем $F(p)$ на сумму простых дробей:

$$\frac{-5}{p(p-1)\left(p^2+4p+5\right)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{Cp+D}{p^2+4p+5}.$$

Находим коэффициенты:

$$A=1,\quad B=-\frac{1}{2},\quad C=-\frac{1}{2},\quad D=-\frac{3}{2}.$$

Тогда

$$\frac{-5}{p(p-1)\left(p^2+4p+5\right)}=\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p+3}{p^2+4p+5}=$$

$$=\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p+2}{(p+2)^2+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p+2)^2+1}\risingdotseq$$

$$\risingdotseq 1-\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-2t}\cos t-\frac{1}{2}e^{-2t}\sin t.$$

<u>*Ответ*</u>: $1-\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-2t}(\cos t+\sin t)$.

Пример 17. Найти оригинал для изображения $F(p)=\frac{1}{\left(p^2-1\right)^2}$.

Решение.
Изображение $F(p)$ – простая дробь. Для нахождения оригинала воспользуемся теоремой умножения изображений (§ 3) и тем, что

$$\frac{1}{p^2+1}\risingdotseq\sin t.$$

Имеем

$$F(p)=\frac{1}{\left(p^2+1\right)^2}=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\risingdotseq\int_0^t\sin(t-\tau)\sin\tau d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\left[\cos t-\cos(2\tau-t)\right]d\tau=\frac{1}{2}\cos t\cdot\tau\Big|_0^t-\frac{1}{4}\sin(2\tau-t)\Big|_0^t=$$

$$=\frac{1}{2}t\cos t-\frac{1}{2}\sin t.$$

<u>*Ответ*</u>: $\frac{1}{2}t\cos t-\frac{1}{2}\sin t$.

Пример 18. Найти оригинал для изображения $F(p)=\frac{e^{-p}}{p+1}$.

Решение.

Наличие e^{-p} указывает на необходимость применения теоремы запаздывания. Так как $\frac{1}{p+1}\risingdotseq e^{-t}$, то $\frac{e^{-p}}{p+1}\risingdotseq e^{-(t-1)}\eta(t-1)$.

<u>*Ответ*</u>: $e^{-(t-1)}\eta(t-1)$.

II. Вторая теорема разложения

Если $F(p)$ – изображение, то его оригиналом служит функция

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}\left[F(p_k)\cdot e^{p_k t}\right], \tag{15}$$

где сумма вычетов берется по всем особым точкам p_k функции $F(p)$.

В частности, если $F(p)=\frac{Q(p)}{R(p)}$ – правильная рациональная дробь, то оригиналом ее служит функция

$$f(t)=\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{(n_k-1)}}{dp^{(n_k-1)}}\left\{F(p)e^{pt}(p-p_k)^{n_k}\right\}, \tag{16}$$

где p_k – полюсы $F(p)$ кратности n_k и сумма в (16) берется по всем полюсам функции $F(p)$.

Если все полюсы функции $F(p)$ простые, то формула (16) упрощается и оригинал для изображения $F(p)$ принимает вид

$$f(t)=\sum_{k=1}^{l}\frac{Q(p_k)}{R'(p_k)}e^{p_k t}. \tag{17}$$

Пример 19. Найти оригинал для изображения $F(p)=\frac{p}{\left(p^2-1\right)^2}$.

Решение.

Изображение $F(p)$ имеет полюсы второго порядка $p_1 = 1$ и $p_2 = -1$, следовательно

$$\frac{p}{\left(p^2-1\right)^2} \risingdotseq \frac{1}{1!}\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\frac{e^{pt}p}{(p+1)^2} + \frac{1}{1!}\lim_{p\to -1}\frac{d}{dp}\frac{e^{pt}p}{(p-1)^2} =$$

$$= \lim_{p\to 1}\left[\frac{\left(te^{pt}p + e^{pt}\right)\cdot (p+1)^2 - e^{pt}\cdot p\cdot 2(p+1)}{(p+1)^4}\right] +$$

$$+ \lim_{p\to -1}\left[\frac{\left(te^{pt}p + e^{pt}\right)\cdot (p-1)^2 - e^{pt}\cdot p\cdot 2(p-1)}{(p-1)^4}\right] =$$

$$= \frac{1}{16}\left[\left(te^{t} + e^{t}\right)\cdot 4 - 4e^{t}\right] + \frac{1}{16}\left[\left(-te^{-t} + e^{-t}\right)\cdot 4 - 4e^{-t}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}te^{t} - \frac{1}{4}te^{-t} = \frac{1}{2}t\frac{e^{t}-e^{-t}}{2} = \frac{1}{2}t\,\mathrm{sh}\,t.$$

<u>*Ответ*</u>: $\frac{1}{2}t\,\mathrm{sh}\,t$.

III. Первая теорема разложения

Если $F(p)$ – аналитическая функция в окрестности бесконечно удаленной точки и равна в ней нулю, и если разложение $F(p)$ в ряд Лорана имеет вид $F(p) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k}{p^k}$, то оригиналом является функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k}{(k-1)!}t^{k-1}, \tag{18}$$

причем этот ряд сходится при всех t.

Пример 20. Найти оригинал для изображения $F(p) = \frac{p}{p^2+1}$.

Решение.

Изображение $F(p)$ – аналитично в окрестности бесконечно удаленной точки и его лорановское разложение имеет вид:

$$F(p)=\frac{p}{p^2+1}=\frac{p}{p^2\left(1+\frac{1}{p^2}\right)}=\frac{1}{p\left(1+\frac{1}{p^2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}-...+(-1)^n\frac{1}{p^{2n}}+...\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p^{2n+1}}.$$

Тогда по первой теореме разложения

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}=\cos t.$$

<u>*Ответ*</u>: $\cos t$.

Пример 21. Найти оригинал $f(t)$ по изображению $F(p)=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$.

Решение.

Выбрав ту ветвь $\sqrt{1+p^2}$, для которой $\sqrt{1}=1$, применим первую теорему разложения:

$$F(p)=\left(1+p^2\right)^{-1/2}=\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-1/2}=$$

$$=\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2}+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{p^4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{p^6}+...\right)=$$

$$=\frac{1}{p}-\frac{1}{2\cdot 1!}\cdot\frac{1}{p^3}+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{p^5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{p^7}+...$$

Тогда

$$f(t)=1-\frac{1}{2\cdot 1!}\cdot\frac{t^2}{2!}+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{t^4}{4!}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\cdot\frac{t^6}{6!}+...=$$

$$=1-\frac{t^2}{2^2(1!)^2}+\frac{t^4}{2^4(2!)^2}-\frac{t^6}{2^6(3!)^2}+...$$

Итак, искомое решение

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}=J_0(t),$$

где $J_0(t)$ – функция Бесселя нулевого порядка.

ЗАДАНИЯ

Найти оригиналы по заданному изображению:

95. $\dfrac{2e^{-p}}{p^3}+\dfrac{e^{-2p}}{p-1}$.

96. $\dfrac{e^{-2p}}{p^2}+\dfrac{e^{-3p}}{p+3}$.

97. $\dfrac{1}{p^2+4p+5}$.

98. $\dfrac{1}{p^2+4p+3}$.

99. $\dfrac{p}{(p+1)^2}$.

100. $\dfrac{p}{\left(p^2+1\right)^2}$.

101. $\dfrac{1}{p+2p^2+p^3}$.

102. $\dfrac{1}{p^2\left(p^2+1\right)^2}$.

103. $\dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$.

104. $\dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$.

105. $\dfrac{e^{-p}}{p^2-2p+5}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2+9}$.

106. $\dfrac{e^{-p}}{p(p-1)}$.

107. $\dfrac{1}{p^2+1}\left(e^{-2p}+2e^{-3p}+3e^{-4p}\right)$.

108. $\dfrac{e^{-p}}{p^2-1}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2-4}$.

109. $\dfrac{3p^2}{\left(p^3-1\right)^2}$.

110. $\dfrac{e^{-p}}{p^2}+\dfrac{2e^{-2p}}{p^3}+\dfrac{6e^{-3p}}{p^4}$.

111. $e^{-\frac{1}{p}}-1$.

112. $\ln\left(1+\dfrac{1}{p}\right)$.

113. $\sin\dfrac{1}{p}$.

114. $\dfrac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}}$.

§ 5. Решение задачи Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Суть операционного метода сводится к замене дифференциального уравнения для оригинала алгебраическим уравнением для изображения, используя теоремы и свойства операционного исчисления (§ 3). Далее решаем алгебраическое уравнение для изображения и по найденному изображению восстанавливаем оригинал, удовлетворяющий исходному дифференциальному уравнению.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}x'(t)+a_nx(t)=f(t), \tag{19}$$

где a_k – действительные числа. Будем предполагать, что искомая функция $x(t)$, все ее рассматриваемые производные, а также функция $f(t)$ являются оригиналами. Требуется найти решение дифференциального уравнения (19), удовлетворяющее начальным условиям:

$$x(0)=x_0,\ \ x'(0)=x_0',\ \ldots,\ x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}. \tag{20}$$

Применяя к обеим частям уравнения (19) преобразование Лапласа и используя теорему о дифференцировании оригинала и свойство линейности, можно получить вместо дифференциального уравнения (19) алгебраическое:

$$x(t)\risingdotseq X(p),\qquad f(t)\risingdotseq F(p),$$

$$\left(p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n\right)X(p)+Q_{n-1}(p)=F(p), \tag{21}$$

где $Q_{n-1}(p)$ – многочлен от p степени $n-1$.

Тогда

$$X(p)=\frac{F(p)-Q_{n-1}(p)}{p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n}\ - \tag{22}$$

операторное решение дифференциального уравнения (19). Оригинал $x(t)$, для которого функция (22) является изображением, и будет искомым решением уравнения (19), удовлетворяющим начальным условиям (20).

Пример 22. Решить задачу Коши $x''+x=2\cos t;\quad x(0)=0,\quad x'(0)=-1$.

Решение.

$$x(t)\risingdotseq X(p),\qquad x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p),$$

$$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)+1,\qquad \cos t\risingdotseq\frac{p}{p^2+1}.$$

Тогда операторное уравнение имеет вид

$$p^2X(p)+1+X(p)=\frac{2p}{p^2+1},$$

отсюда

$$X(p) = \frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2} - \frac{1}{p^2+1} = -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^2+1}\right) - \frac{1}{p^2+1} \risingdotseq$$

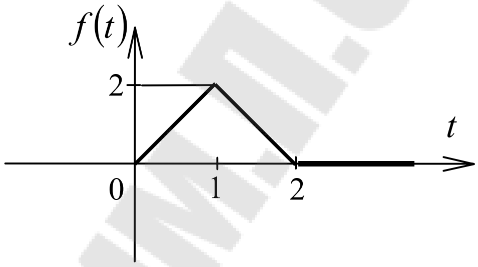
$$\risingdotseq t\sin t = \sin t = (t-1)\sin t.$$

<u>*Ответ*</u>: $x(t) = (t-1)\sin t$.

Пример 23. Решить задачу Коши $x'' + 4x = f(t), \quad x(0) = x'(0) = 0$, если функция $f(t)$ задана графически.

Решение.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 2t & \text{при } 0 \le t \le 1, \\ 4-2t & \text{при } 1 \le t \le 2, \\ 0 & \text{при } t > 2. \end{cases}$$



С помощью единичной функции Хевисайда запишем $f(t)$ одним аналитическим выражением:

$$f(t) = 2t\cdot\eta(t) - 2t\cdot\eta(t-1) + (4-2t)\cdot\eta(t-1) - (4-2t)\cdot\eta(t-2) =$$
$$= 2t\cdot\eta(t) - 4(t-1)\cdot\eta(t-1) + 2(t-2)\cdot\eta(t-2),$$

поэтому, применяя формулу $f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p)$, получим

$$f(t) \risingdotseq \frac{2}{p^2} - \frac{4}{p^2}e^{-p} + \frac{2}{p^2}e^{-2p} = \frac{2}{p^2}\left(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}\right).$$

Полагая $x(t) \risingdotseq X(p)$ и учитывая начальные условия, получим

$$x'(p) \risingdotseq pX(p),\; x''(p) \risingdotseq p^2X(p).$$

Операторное уравнение имеет вид

$$p^2X(p) + 4X(p) = \frac{2}{p^2}\left(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}\right),$$

откуда

$$X(p) = \frac{2\left(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}\right)}{p^2\left(p^2+4\right)} = \left(\frac{1}{2p^2} - \frac{1}{2\left(p^2+4\right)}\right)\left(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}\right),$$

$$X(p)=\frac{1}{2p^2}-\frac{e^{-p}}{p^2}+\frac{e^{-2p}}{2p^2}-\frac{1}{2\left(p^2+4\right)}+\frac{e^{-p}}{p^2+4}-\frac{e^{-2p}}{2\left(p^2+4\right)}\quad\risingdotseq$$

$$\risingdotseq\ \frac{1}{2}t\cdot\eta(t)-(t-1)\cdot\eta(t-1)+\frac{1}{2}(t-2)\cdot\eta(t-2)-\frac{1}{4}\sin 2t\cdot\eta(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\sin 2(t-1)\cdot\eta(t-1)-\frac{1}{4}\sin 2(t-2)\cdot\eta(t-2).$$

Ответ: $$x(t)=\left(\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right)\cdot\eta(t)+\left(\frac{\sin 2(t-1)}{2}-(t-1)\right)\cdot\eta(t-1)+$$

$$+\left(\frac{1}{2}(t-2)-\frac{\sin 2(t-1)}{4}\right)\cdot\eta(t-2).$$

ЗАДАНИЯ

Решить дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях:

115. $x'+x=e^{-t},\ \ x(0)=1.$

116. $x'-x=1,\ \ x(0)=-1.$

117. $x''+x'=1,\ \ x(0)=0,\ \ x'(0)=1.$

118. $x''+3x'=e^{t},\ \ x(0)=0,\ \ x'(0)=-1.$

119. $x''+2x'-3x=e^{-t},\ \ x(0)=0,\ \ x'(0)=1.$

120. $x''+2x'=t\sin t,\ \ x(0)=0,\ \ x'(0)=0.$

121. $x'''+x'=1,\ \ x(0)=x'(0)=x''(0)=0.$

122. $x'''+x'=t,\ \ x(0)=0,\ \ x'(0)=-1,\ \ x''(0)=0.$

123. $x''+2x'+x=\sin t,\ \ x(0)=0,\ \ x'(0)=-1.$

124. $x''+2x'+5x=3,\ \ x(0)=1,\ \ x'(0)=0.$

125. $x''-2x'+2x=1,\ \ x(0)=x'(0)=0.$

126. $x''+x'=\cos t,\ \ x(0)=2,\ \ x'(0)=0.$

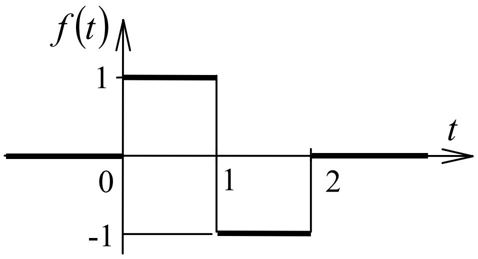
127. $x^{IV}+x=t^2,\ \ x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=0.$

128. $x'''+x'=e^{t},\ \ x(0)=0,\ \ x'(0)=2,\ \ x''(0)=0.$

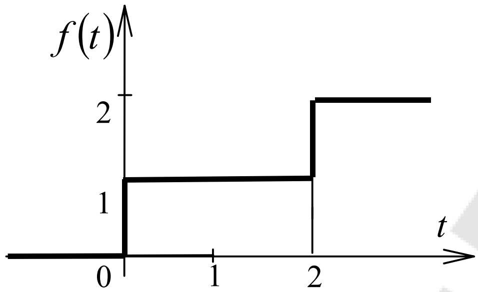
129. $x''-2x'+x=t-\sin t,\ \ x(0)=x'(0)=0.$

130. $x''+x=te^{t}+4\sin t,\ \ x(0)=x'(0)=0.$

131. $x''+x=f(t),\qquad x(0)=x'(0)=0.$



132. $x'' + x = f(t), \quad x(0) = 1, \; x'(0) = 0.$



§ 6. Решение систем линейных дифференциальных уравнений операционным методом

Метод интегрирования систем линейных дифференциальных уравнений по существу не отличается от метода интегрирования одного уравнения.

Пример 24. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} x' - 2x - 3y &= 3e^{2t}; \\ y' + 3x - 2y &= 0, \end{aligned}\right\}$$

при начальных условиях $x(0) = 0, \; y(0) = 1.$

Решение.

Переход к уравнениям в изображениях дает

$$\left.\begin{aligned} pX(p) - 2X(p) - 3Y(p) &= \frac{3}{p-2}, \\ pY(p) + 3X(p) - 2Y(p) &= 1, \end{aligned}\right\}$$

где $X(p) \risingdotseq x(t), \quad Y(p) \risingdotseq y(t)$.

Применяя обычные методы решения систем алгебраических уравнений (например, по формулам Крамера), получаем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-2 & -3 \\ 3 & p-2 \end{vmatrix} = (p-2)^2 + 9,$$

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} \dfrac{3}{p-2} & -3 \\ 1 & p-2 \end{vmatrix} = 6, \qquad \Delta_Y = \begin{vmatrix} p-2 & \dfrac{3}{p-2} \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = p-2-\frac{9}{p-2}.$$

Тогда

$$X(p) = \frac{6}{(p-2)^2+9} \risingdotseq 2e^{2t}\sin 3t;$$

$$Y(p) = \frac{(p-2)^2-9}{(p-2)\left[(p-2)^2+9\right]} = \frac{2(p-2)}{(p-2)^2+9} - \frac{1}{p-2} \risingdotseq 2e^{2t}\cos 3t - e^{2t}.$$

<u>*Ответ*</u>: $\quad x(t) = 2e^{2t}\sin 3t, \qquad y(t) = 2e^{2t}\cos 3t - e^{2t}.$

<u>ЗАДАНИЯ</u>

Решить системы уравнений:

133. $\begin{cases} x + x' = y + e^t, \\ y + y' = x + e^t, \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = 1.$

134. $\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ x'' + 2y' + x = 0, \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = x'(0) = 0.$

135. $\begin{cases} x' + 2x + 2y = 10e^{2t}, \\ y' - 2x + y = 7e^{2t}, \end{cases} \qquad x(0) = 1,\ \ y(0) = 3.$

136. $\begin{cases} x'' - 3x' + 2x + y' - y = 0, \\ -x' + x + y'' - 5y' + 4y = 0, \end{cases} \qquad x(0) = x'(0) = y'(0) = 0,\ \ y(0) = 1.$

137. $\begin{cases} x' = -y - z, \\ y' = -x - z, \\ z' = -x - y, \end{cases} \qquad x(0) = -1,\ \ y(0) = 0,\ \ z(0) = 1.$

138. $\begin{cases} x' = y - z, \\ y' = x + y, \\ z' = x + z, \end{cases} \qquad x(0) = 1,\ \ y(0) = 2,\ \ z(0) = 3.$

§ 7. Интеграл Дюамеля

Если функция $f(t)$ непрерывна на $[0,+\infty)$, а функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,+\infty)$ и

$$F(p) \risingdotseq f(t), \qquad \Phi(p) \risingdotseq \varphi(t),$$

то

$$F(p)\Phi(p) \risingdotseq \int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau .$$

Отсюда по теореме о дифференцировании оригинала

$$pF(p)\Phi(p) \risingdotseq f(t)\varphi(0) + \int_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau)d\tau . \tag{23}$$

Правую часть этой формулы называют интегралом Дюамеля.

Интеграл Дюамеля может быть использован при интегрировании дифференциальных уравнений. Пусть требуется найти решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}x' + a_n x = f(t), \tag{24}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0 .$$

Тогда решение данного уравнения имеет вид:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) z'(t-\tau)d\tau \text{ (интеграл Дюамеля)}, \tag{25}$$

где $z(t)$ есть решение уравнения (24) с правой частью, равной 1:

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}z' + a_n z = 1 \tag{26}$$

и теми же нулевыми начальными условиями.

Особенно выгодно применять интеграл Дюамеля для интегрирования нескольких линейных дифференциальных уравнений с одинаковыми левыми и различными правыми частями. В этом случае интеграл Дюамеля значительно сокращает объем работы.

Требование, чтобы начальные условия были нулевыми несущественно; простой заменой искомой функции задачу с ненулевыми начальными условиями можно свести к задаче с нулевыми начальными условиями.

Пример 25. Найти решение дифференциального уравнения $x'' + x = 5t^2$ при начальных условиях $x(0) = x'(0) = 0$.

Решение.

Сначала найдем решение уравнения $z'' + z = 1$, удовлетворяющее условиям $z(0) = z'(0) = 0$. Уравнение в изображениях примет вид

$$p^2 Z(p) + Z(p) = \frac{1}{p},$$

откуда

$$Z(p) = \frac{1}{p\left(p^2 + 1\right)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1},$$

следовательно, $z(t) = 1 - \cos t$.

Для отыскания решения исходного уравнения применим интеграл Дюамеля:

$$x(t) = \int_0^t 5\tau^2 \sin(t - \tau)d\tau = 5\left(t^2 - 2 + 2\cos t\right).$$

<u>*Ответ*</u>: $x(t) = 5\left(t^2 - 2 + 2\cos t\right)$.

Пример 26. С помощью интеграла Дюамеля решить задачу Коши:

$$x'' + 2x' + x = \frac{e^{-t}}{(1+t)^2} + t, \quad x(0) = -2, \ x'(0) = 1.$$

Решение.

Сводим исходную задачу к задаче с нулевыми начальными условиями. Для этого полагаем

$$y(t) = x(t) - x_0 - x_1 t \tag{27}$$

или

$$y(t) = x(t) + 2 - t,$$

$$x(t) = y(t) + 2 + t, \ x'(t) = y'(t) + 1, \ x''(t) = y''(t)$$

и уравнение преобразуется в следующее:

$$y''(t) + 2\left(y'(t) + 1\right) + y(t) - 2 + t = \frac{e^{-t}}{(1+t)^2} + t,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Или

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \frac{e^{-t}}{(1+t)^2}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Решая последнее уравнение с помощью интеграла Дюамеля, получаем:

$$x(t) = e^{-t}\left[t - \ln(1+t)\right] - 2 + t.$$

<u>*Ответ*</u>: $x(t) = e^{-t}\left[t - \ln(1+t)\right] - 2 + t$.

<u>ЗАДАНИЯ</u>

С помощью интеграла Дюамеля найти решения уравнений, удовлетворяющих заданным начальным условиям:

139. $x'' + x' = t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

140. $x''' + x' = e^t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

141. $x'' - x' = \dfrac{e^{2t}}{(1+e^t)^2}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

142. $x'' + 2x' + x = \dfrac{e^{-t}}{1+t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

143. $x'' - x' = \dfrac{e^{2t}}{2+e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

144. $x''' + x' = \dfrac{1}{2+\sin t}, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

145. $x'' + 4x = \cos 3t, \quad x(0) = x'(0) = 2.$

146. $\begin{cases} x' + x - y = e^t, \\ y' + y - x = e^t. \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$

Ответы

1. Да; **2.** Да; **3.** Да; **4.** Да; **5.** Нет; **6.** Нет; **7.** Да; **8.** Да; **9.** $\frac{1}{p^2}$; **10.** $\frac{2+3p}{p^2}$;

11. $\frac{1}{(p-1)^2}$; **12.** $\frac{2}{(p-3)^2}$; **13.** $\frac{3}{p^2+9}$; **14.** $\frac{p}{p^2+4}$; **15.** $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$; **16.** $\frac{p}{p^2-16}$;

17. $\frac{3}{p}+\frac{4}{p^2}+\frac{4}{p^3}$; **18.** $\frac{6}{p^4}-\frac{2}{p^2}+\frac{1}{p}$; **19.** $\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p^2+1}$; **20.** $\frac{2}{p^3}-\frac{4}{p^2}+\frac{3p}{p^2+1}$;

21. $\frac{4}{p^2}+\frac{4}{p^2-1}+\frac{2}{p-1}$; **22.** $\frac{10}{p^3}-\frac{p}{p^2-1}+\frac{1}{(p-1)^2}$; **23.** $\frac{1}{p-4}$; **24.** $\frac{p}{p^2+9}$;

25. $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$; **26.** $\frac{p}{p^2+\omega^2}$; **27.** $\frac{2}{p(p^2+4)}$; **28.** $\frac{p^3+7p}{(p^2+9)(p^2+1)}$; **29.** $\frac{2(p^2-12)}{(p^2+20)^2-256}$;

30. $\frac{p(p^2+m^2+n^2)}{(p^2+m^2+n^2)^2-4m^2n^2}$; **31.** $\frac{p}{p^2-16}+\frac{1}{p}-\frac{4}{p-5}$;

32. $\frac{1}{8}\left(\frac{3}{p}+\frac{p}{p^2+16}-\frac{4p}{p^2+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{5p}{p^2-36}-\frac{5}{p}\right)$; **33.** $\frac{2}{(p-2)^2+4}$; **34.** $\frac{p+3}{(p+3)^2+16}$;

35. $\frac{6}{(p+1)^4}+\frac{1}{(p-4)^2-1}$; **36.** $\frac{2}{(p-1)^3}+\frac{2}{(p-1)^2}+\frac{p-1}{(p-1)^2-1}$; **37.** $\frac{2}{(p-3)^2-4}+\frac{p-3}{(p-3)^2+1}$;

38. $\frac{p+2}{(p+2)^2-9}-\frac{2}{(p+2)^2+4}$; **39.** $\frac{2}{(p+4)\left((p+4)^2+4\right)}$; **40.** $\frac{(p-5)^2+2}{(p-5)\left((p-5)^2+4\right)}$;

41. $\frac{e^{-2p}}{p^2+1}$; **42.** $\frac{pe^{-3p}}{p^2+1}$; **43.** $\frac{e^{-p}}{2p}+\frac{pe^{-p}}{2(p^2+4)}$; **44.** $\frac{2e^{-2p}}{p(p^2+4)}$; **45.** $\frac{e^{-2p}}{p-1}$; **46.** $\frac{e^{3-3p}}{p-1}$;

47. $\frac{2}{p^3}-\frac{2}{p^2}+\frac{1}{p}$; **48.** $e^{-p}\left(\frac{2}{p^3}+\frac{2}{p^2}+\frac{1}{p}\right)$; **49.** $\frac{1-e^{-p}}{p}$; **50.** $\frac{(1-e^{-p})^2}{p}$; **51.** $\frac{(1-e^{-p})^2}{p^2}$;

52. $\frac{1-e^{-2p}}{p^2}$; **53.** $\frac{e^{-p}-e^{-2p}}{p^2}$; **54.** $\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+1)}{e^{kp}}$; **55.** $\frac{(1-e^{-p})^2}{p^2(1-e^{-4p})}$; **56.** $\frac{1+p-e^{-p}}{p^2(e^p-1)}$;

57. $\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1+e^{-\pi p}}{1-e^{-\pi p}}$; **58.** $\frac{1}{p^2+1}\left(p+\frac{2e^{-\frac{\pi}{2}p}}{1-e^{-\pi p}}\right)$; **59.** $\frac{1}{(p^2+1)(1-e^{-\pi p})}$;

60. $\frac{1-\left(\frac{Tp}{2}+1\right)e^{-\frac{pT}{2}}}{p^2(1-e^{-pT})}$; **61.** $\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}$; **62.** $\frac{4p}{(p^2+4)^2}$; **63.** $p^2F(p)-2pF(p)-\frac{3}{p}$;

64. $(p^3+p^2-p)F(p)$; **65.** $(p^2+4p)F(p)-p-\frac{1}{p^2}-5$; **66.** $(p^3+2p^2-3p)F(p)+p^2+3p+\frac{1}{p-1}$;

67. $\dfrac{2p^3-24p}{\left(p^2+4\right)^3}$; **68.** $\dfrac{p^2-1}{\left(p^2+1\right)^2}+\dfrac{1}{(p-4)^2}$; **69.** $\dfrac{2}{(p-2)^3}+\dfrac{2p^3+54p}{\left(p^2-9\right)^3}$; **70.** $\dfrac{2}{(p-2)^3}-\dfrac{2+6p^2}{\left(p^2-1\right)^3}$;

71. $\dfrac{48p^3-192p}{\left(p^2+4\right)^4}+\dfrac{4p}{\left(p^2+4\right)^2}$; **72.** $\dfrac{2p^3-54p}{\left(p^2+9\right)^3}+\dfrac{9-p^2}{\left(p^2+9\right)^2}+\dfrac{2p}{p^2+9}$; **73.** $\dfrac{1}{p\left(p^2+1\right)}$;

74. $\dfrac{p^3+p^2+4p-4}{p\left(p^2+4\right)^2}$; **75.** $\dfrac{4}{\left(p^2-4\right)^2}$; **76.** $\dfrac{p^2+8}{p^2\left(p^2+16\right)}$; **77.** $\dfrac{2}{p(p+1)^3}$;

78. $\dfrac{1}{2p}\left(\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{p^2+4}{\left(p^2-4\right)^2}\right)$; **79.** $\ln\dfrac{p}{p-1}$; **80.** $\ln\dfrac{\sqrt{p^2+1}}{p}$; **81.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{p^2+4}}{p}$; **82.** $\ln\dfrac{p+1}{p-1}$;

83. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p^2+4}{p^2+1}$; **84.** $\ln\dfrac{p}{p-1}-\dfrac{1}{p}$; **85.** $\ln\dfrac{3}{2}$; **86.** $\dfrac{\pi}{4}$; **87.** $\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{3}\right)-\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}$; **88.** $\ln 2$;

89. $\dfrac{1}{(p-1)\left(p^2+1\right)}$; **90.** $\dfrac{p}{(p-2)\left(p^2+1\right)}$; **91.** $\dfrac{2}{p^2\left(p^2-1\right)}$; **92.** $\dfrac{2}{p^3(p+2)}$; **93.** $\dfrac{6}{p^4\left(p^2-1\right)}$;

94. $\dfrac{1}{(p-2)\left(p^2+4\right)}$; **95.** $(t-1)^2\eta(t-1)+e^{t-2}\eta(t-2)$;

96. $(t-2)\eta(t-2)+e^{-3(t-3)}\eta(t-3)$; **97.** $e^{-2t}\sin t$; **98.** $\dfrac{1}{2}\left(e^{-t}-e^{-3t}\right)$; **99.** $(1-t)e^{-t}$;

100. $\dfrac{1}{2}t\sin t$; **101.** $1-e^{-t}-te^{-t}$; **102.** $t-\sin t$; **103.** $\dfrac{1}{9}\left(e^{-2t}-e^{t}+3te^{t}\right)$;

104. $\dfrac{3}{5}+\dfrac{e^{-2t}}{5}(4\sin t-3\cos t)$; **105.** $\dfrac{1}{2}e^{t-1}\sin 2(t-1)\eta(t-1)+\cos 3(t-2)\eta(t-2)$;

106. $e^{t-1}\eta(t-1)-\eta(t-1)$; **107.** $\sin 2(t-2)\eta(t-2)+2\sin(t-3)\eta(t-3)+3\sin(t-4)\eta(t-4)$;

108. $\operatorname{sh}(t-1)\eta(t-1)+\operatorname{ch}2(t-2)\eta(t-2)$; **109.** $\dfrac{1}{3}te^{t}-\dfrac{1}{3}te^{-t/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$;

110. $(t-1)\eta(t-1)+(t-2)^2\eta(t-2)+(t-3)^3\eta(t-3)$; **111.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{t^{(n-1)}}{n!(n-1)!}$;

112. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{t^{(n-1)}}{(n-1)!n}$; **113.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{t^{2n-2}}{(2n-2)!(2n-1)!}$; **114.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}t^{n-1}}{\left[(n-1)!\right]^2}$;

115. $x(t)=(t+1)e^{-t}$; **116.** $x(t)=-1$; **117.** $x(t)=t$; **118.** $x(t)=\dfrac{1}{4}e^{t}+\dfrac{5}{12}e^{-3t}-\dfrac{2}{3}$;

119. $x(t)=\dfrac{1}{8}\left(3e^{t}-e^{-3t}-2e^{-t}\right)$;

120. $x(t)=\dfrac{2}{25}e^{-2t}-\dfrac{2}{25}\cos t+\dfrac{14}{25}\sin t-\dfrac{1}{5}t\sin t-\dfrac{2}{5}t\cos t$; **121.** $x(t)=t-\sin t$;

122. $x(t)=\dfrac{1}{2}t^2-1+\cos t-\sin t$; **123.** $x(t)=\dfrac{1}{2}\left(e^{-t}-te^{-t}-\cos t\right)$;

124. $x(t)=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}e^{-t}\cos 2t+\frac{1}{5}e^{-t}\sin 2t$ **;** **125.** $x(t)=\frac{1}{2}\left(1-e^{t}\cos t+e^{t}\sin t\right)$ **;**

126. $x(t)=2+\frac{1}{2}\left(e^{-t}-\cos t+\sin t\right)$ **;** **127.** $x(t)=\frac{1}{4}\left(t^{2}-\operatorname{sh}t\cdot\sin t\right)$ **;**

128. $x(t)=\frac{1}{2}e^{t}+\frac{3}{2}\sin t+\frac{1}{2}\cos t-1$ **;** **129.** $x(t)=2+t-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}te^{t}-\frac{3}{2}e^{t}$ **;**

130. $x(t)=\frac{1}{2}(t-1)e^{t}+\frac{1}{2}\cos t+2\sin t-2t\cos t$ **;**

131. $x(t)=2\left[\sin^{2}\frac{t}{2}\eta(t)-2\sin^{2}\frac{t-1}{2}\eta(t-1)+\sin^{2}\frac{t-2}{2}\eta(t-2)\right]$ **;**

132. $x(t)=\eta(t)+\left[1-\cos(t-2)\right]\eta(t-2)$ **;** **133.** $x(t)=e^{t},\ y(t)=e^{t}$ **;**

134. $x(t)=2\left(1-e^{-t}-te^{-t}\right),\ y(t)=2-t-2e^{-t}-2te^{-t}$ **;** **135.** $x(t)=e^{2t},\ y(t)=3e^{2t}$ **;**

136. $x(t)=\frac{1}{4}\left(e^{t}-e^{3t}+2te^{3t}\right),\ y(t)=\frac{1}{4}\left(5e^{t}-e^{3t}-2te^{3t}\right)$ **;**

137. $x(t)=-e^{t},\ y(t)=0,\ z(t)=e^{t}$ **;** **138.** $x(t)=2-e^{t},\ y(t)=-2+4e^{t}-te^{t},\ z(t)=-2+5e^{t}-te^{t}$ **;**

139. $x(t)=\frac{1}{2}t^{2}-t+1-e^{-t}$ **;** **140.** $x(t)=\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{2}\cos t-1$ **;**

141. $x(t)=\frac{1}{2}\left(e^{t}-1\right)-\ln\frac{1+e^{t}}{2}$ **;** **142.** $x(t)=e^{-t}\left[(t+1)\ln(t+1)-t\right]$ **;**

143. $x(t)=\left(e^{t}+2\right)\ln\frac{e^{t}+2}{3}-e^{t}+1$ **;**

144. $x(t)=\ln 2\cos t-\cos t\ln(2+\sin t)-t\sin t+\frac{2}{\sqrt{3}}(2\sin t+1)\left(\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}+1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6}\right)$ **;**

145. $x=\frac{11}{5}\cos 2t-\frac{1}{5}\cos 3t+\sin 2t$ **;** **146.** $x(t)=e^{t}-1,\ y(t)=e^{t}-1$ **.**

Таблица 2

ОСНОВНЫЕ ОРИГИНАЛЫ И ИХ ИЗОБРАЖЕНИЯ

	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$
	1	2
1.	1	$\frac{1}{p}$
2.	$t^n \quad (n=1,2,\ldots)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3.	$t^{\alpha} \quad (\alpha>-1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
4.	$e^{\alpha t} \quad (\alpha=a+bi)$	$\frac{1}{p-\alpha}$
5.	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$
6.	$t^{\alpha} e^{\beta t} \quad (\alpha>-1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\beta)^{\alpha+1}}$
7.	$\sin\omega t \quad (\omega>0)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
8.	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
9.	$\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
10.	$\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
11.	$e^{\alpha t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
12.	$e^{\alpha t}\cos\omega t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
13.	$e^{\alpha t}\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\alpha)^2-\omega^2}$

Окончание табл. 2

	1	2
14.	$e^{\alpha t}\,\mathrm{ch}\,\omega t$	$\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2-\omega^2}$
15.	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
16.	$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
17.	$t\,\mathrm{sh}\,\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$
18.	$t\,\mathrm{ch}\,\omega t$	$\dfrac{p^2+\omega^2}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$
19.	$\sin(t-\tau)\ \ (\tau>0)$	$\dfrac{e^{-\tau p}}{p^2+1}$
20.	$\cos(t-\tau)$	$\dfrac{pe^{-\tau p}}{p^2+1}$
21.	$t^n\sin\omega t$	$\dfrac{\mathrm{Im}(p+i\omega)^{n+1}}{\left(p^2+\omega^2\right)^{n+1}}n!$
22.	$t^n\cos\omega t$	$\dfrac{\mathrm{Re}(p+i\omega)^{n+1}}{\left(p^2+\omega^2\right)^{n+1}}n!$
23.	$J_n(t)\ \ (n=1,2,\ldots)$	$\dfrac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n}{\sqrt{p^2+1}}$
24.	$\mathrm{Erf}\left(\dfrac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{\alpha/2\sqrt{t}}^{\infty}e^{-x^2}dx$	$\dfrac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}}$
25.	$\mathrm{Si}\,t=\displaystyle\int_0^t\dfrac{\sin x}{x}dx$	$\dfrac{\mathrm{arcctg}\,p}{p}$
26.	$\mathrm{Ci}\,t=-\displaystyle\int_t^{\infty}\dfrac{\cos x}{x}dx$	$\dfrac{1}{p}\ln\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$

Литература

1. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1981. – 302 с.
2. Жевержеев В.Ф., Кальницкий Л.А., Сапогов Н.А. Специальный курс высшей математики для втузов. – М.: Высшая школа, 1970. – 416 с.
3. Шахно К.У. Элементы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления. – Минск: Вышэйшая школа, 1975. – 400 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1970. – Т. 2. – 576 с.
5. Мышкис А.Д. Математика для втузов (специальные курсы). – М.: Наука, 1971.
6. Пчелкин Б.К. Специальные разделы высшей математики. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1973.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1973. – 830 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Корсун Лидия Дмитриевна
Курлович Сергей Петрович

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Практикум по выполнению домашних заданий курсов «Математика» и «Высшая математика» для студентов дневной формы обучения

Подписано в печать 05.10.09.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Ризография. Усл. печ. л. 2,32. Уч.-изд. л. 2,12.
Изд. № 93.
E-mail: ic@gstu.gomel.by
http://www.gstu.gomel.by

Отпечатано на цифровом дуплекаторе
с макета оригинала авторского для внутреннего использования.
Учреждение образования «Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого».
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.