Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

С. Л. Авакян, Е. З. Авакян

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

ПРАКТИКУМ
по выполнению домашних заданий по курсу «Высшая математика» для студентов дневной формы обучения

Гомель 2009

УДК 517.373(075.8)
ББК 22.161.1я73
А18

*Рекомендовано научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 7 от 10.03.2008 г.)*

Рецензент: зав. каф. «Физика» ГГТУ им. П. О. Сухого д-р физ.-мат. наук, проф. *П. А. Хило*

Авакян, С. Л.

А18 Криволинейные и поверхностные интегралы : практикум по выполнению домаш. заданий по курсу «Высшая математика» для студентов днев. формы обучения / С. Л. Авакян, Е. З. Авакян. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2009. – 61 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

Представлен теоретический материал по разделу «Криволинейные и поверхностные интегралы». Даны решения основных типов задач, связанных с приложениями, как геометрическими, так и физическими криволинейных и поверхностных интегралов.

Для студентов дневной формы обучения.

УДК 517.373(075.8)
ББК 22.161.1я73

1. Криволинейные интегралы

1.1 Криволинейный интеграл первого рода.

Пусть на плоскости xOy расположена некоторая гладкая или кусочно-гладкая кривая L_{AB}. Пусть на этой кривой определена и ограничена некоторая функция $z = f(x, y)$. Разобьем кривую L_{AB} произвольным образом на n частей l_i, длиной Δl_i. На каждой дуге l_i произвольным образом выберем точку $M_i(x_i; y_i)$.
Построим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i . \tag{1.1}$$

Сумма (1.1) называется интегральной суммой для функции $f(x, y)$ по дуге L_{AB}.
Определение. Криволинейным интегралом I-го рода от функции $f(x, y)$ по кривой L_{AB} называется предел интегральной суммы (1.1) при $\Delta l_i \to 0$ (или $n \to \infty$).
Таким образом, согласно определению:

$$\int_{L_{AB}} f(x, y)dl = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i . \tag{1.2}$$

где L_{AB} - путь интегрирования; dl - дифференциал дуги. Если кривая L_{AB} замкнута, то используется символ $\oint$ - «интеграл по замкнутому контуру».

Свойства криволинейного интеграла 1-го рода

- Если кривая L состоит из двух линий L_1 и L_2, то
$$\int_{L} f(x, y)dl = \int_{L_1} f(x, y)dl + \int_{L_2} f(x, y)dl . \tag{1.3}$$
- При изменении направления интегрирования криволинейный интеграл первого рода не изменяет своего значения
$$\int_{L_{AB}} f(x, y)dl = \int_{L_{BA}} f(x, y)dl . \tag{1.4}$$
- Криволинейный интеграл первого рода от суммы функций равен сумме криволинейных интегралов первого рода от слагаемых:
$$\int_{L_{AB}} \left(f_1(x, y) + f_2(x, y)\right)dl = \int_{L_{AB}} f_1(x, y)dl + \int_{L_{AB}} f_2(x, y)dl . \tag{1.5}$$

§ Константу можно выносить за знак интеграла

$$\int\limits_{L_{AB}} cf(x,y)dl = c\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)dl. \qquad (1.6)$$

Вычисление криволинейных интегралов первого рода.

Вычисление криволинейных интегралов первого рода сводится к вычислению соответствующих определенных интегралов по следующим правилам:

§ Если кривая L_{AB} задана явным уравнением $y = y(x), \quad (a \le x \le b)$, тогда $dl = \sqrt{1+(y'(x))^2}dx$

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}dx\,. \qquad (1.7)$$

§ Если кривая L_{AB} задана параметрически: $x = x(t), \quad y = y(t), \quad (\alpha \le t \le \beta)$, тогда

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt\,. \qquad (1.8)$$

§ Если кривая L_{AB} задана уравнением в полярных координатах: $\rho = \rho(\varphi); \quad (\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2)$, тогда

$$dl = \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}d\varphi$$

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)dl = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho(\varphi)\cos\varphi;\rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2}d\varphi\,. \qquad (1.9)$$

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L \sqrt{1+x^6}dl$, где L - дуга линии $4y = x^4$ между точками $A(0;0)$ и $B(1;1/4)$.

Решение: По условию задачи кривая L задана явным уравнением

$y = \dfrac{x^4}{4}, \quad (0 \le x \le 1)$.

Найдем dl согласно (1.7)

$$dl = \sqrt{1+(y'_x)^2}dx = \sqrt{1+(x^3)^2}dx = \sqrt{1+x^6}dx\,.$$

Тогда, по формуле (1.7)

$$\int\limits_{L_{AB}} \sqrt{1+x^6}\,dl = \int\limits_0^1 \sqrt{1+x^6}\cdot\sqrt{1+x^6}\,dx = \int\limits_0^1 \left(1+x^6\right)dx = \left(x+\frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{8}{7}$$

Ответ: $\frac{8}{7}$.

<u>Пример 2</u>. Вычислить $\int\limits_L \sqrt{2y}\,dl$, если L - первая арка циклоиды

$$x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t)\quad a>0.$$

<u>Решение:</u> Кривая L задана параметрическими уравнениями (рис. 1), поэтому воспользуемся формулой (1.8): $dl = \sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt$

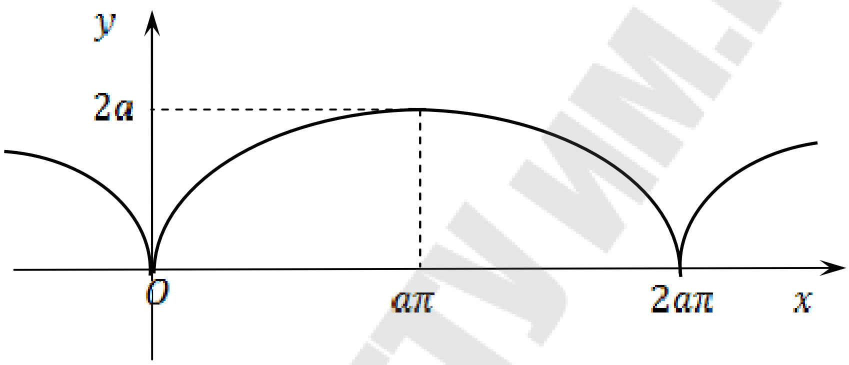


Рис. 1

$x_t' = \left(a(t-\sin t)\right)' = a(1-\cos t)$, $y_t' = \left(a(1-\cos t)\right)' = a\sin t$,

$dl = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt =$

$= a\sqrt{2-2\cos t}\,dt = a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt.$

По условию $0 \le t \le 2\pi$.

Таким образом, согласно (1.8) имеем:

$$\int\limits_L \sqrt{2y}\,dl = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2a(1-\cos t)}\,a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt =$$

$$= 2a\sqrt{a}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)\,dt = 2a\sqrt{a}(t-\sin t)\Big|_0^{2\pi} = 4\pi\, a\sqrt{a}.$$

Ответ: $4\pi\, a\sqrt{a}$.

<u>Пример 3.</u> Вычислить криволинейный интеграл первого рода

$\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$; L - верхняя половина кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

Решение: Дуга L задана уравнением в полярных координатах, причем $0 \le \varphi \le \pi$ (условие - верхняя половина кардиоиды) (рис. 2).

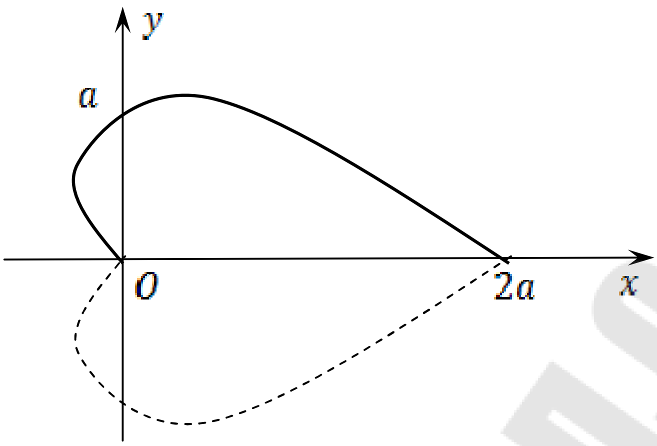


Рис. 2

Воспользуемся формулой (1.9): $dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi$; $\rho' = -a\sin\varphi$,

$$dl = \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = a\sqrt{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\,dl =$$
$$= a\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi = a\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\varphi}\,d\varphi.$$

Запишем подинтегральную функцию в полярных координатах:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = \sqrt{\rho^2} = \rho = a(1+\cos\varphi).$$

Таким образом,

$$\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl = \int_0^\pi a(1+\cos\varphi)a\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\varphi}\,d\varphi =$$
$$= a^2\sqrt{2}\int_0^\pi (1+\cos\varphi)^{3/2}d\varphi = 4a^2\int_0^\pi \cos^3\frac{\varphi}{2}d\varphi = 8a^2\int_0^\pi \cos^2\frac{\varphi}{2}d\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right) =$$
$$= \left\{\begin{array}{c} \sin\frac{\varphi}{2} = t, t_B = 1, t_H = 0 \\ \cos^2\frac{\varphi}{2} = 1-\sin^2\frac{\varphi}{2} = 1-t^2 \end{array}\right\} = 8a^2\int_0^1 (1-t^2)dt = 8a^2\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{16}{3}a^2.$$

Ответ: $\frac{16}{3}a^2$.

Следует отметить, что для более рационального вычисления интеграла часто бывает удобно, а порой и необходимо, перейти от одной формы задания кривой к другой, например, от явного вида уравнения кривой к параметрическому или уравнению в полярных координатах.

Пример 4. Вычислить криволинейный интеграл первого рода

$\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)^{3/2} dl$; L - дуга лемнискаты

$\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2xy \quad (x \ge 0,\ y \ge 0)$.

<u>Решение.</u> Запишем уравнение дуги L в полярных координатах

$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$

$\left(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi\right)^2 = 2a^2\rho\cos\varphi\,\rho\sin\varphi,$

$\left(\rho^2\right)^2 = 2a^2\rho^2\cos\varphi\sin\varphi, \ \rho^2 = a^2\sin 2\varphi.$

Таким образом, уравнение лемнискаты (рис. 3) в полярных координатах имеет вид: $\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$. Из условия $x \ge 0, \quad y \ge 0$ следует, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

Воспользуемся формулами (1.9)

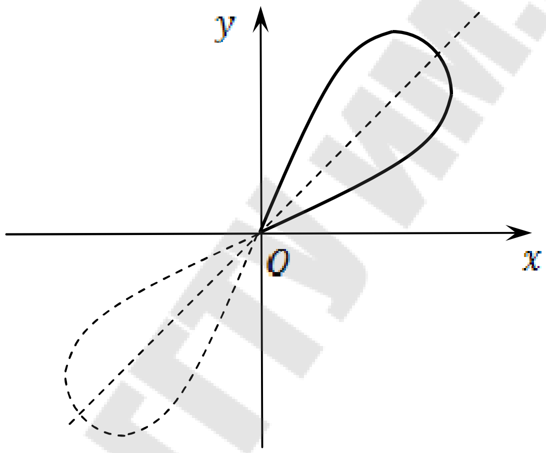


Рис. 3

$$dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi,$$

$$\rho' = \frac{1}{2}a(\sin 2\varphi)^{-1/2}\cos 2\varphi \cdot 2 = \frac{a\cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}},$$

$$dl = \sqrt{a^2\sin 2\varphi + \frac{a^2\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}}\,d\varphi = a\sqrt{\frac{\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}}\,d\varphi = \frac{a\,d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}.$$

Подинтегральная функция примет вид:

$$\left(x^2+y^2\right)^{3/2} = \left(\rho^2\right)^{3/2} = \rho^3 = a^3(\sin 2\varphi)^{3/2}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)^{3/2} dl = \int\limits_0^{\pi/2} a^3\left(\sin 2\varphi\right)^{3/2} \frac{a d\varphi}{\left(\sin 2\varphi\right)^{1/2}} = a^4 \int\limits_0^{\pi/2} \sin 2\varphi d\varphi =$$

$$= -\frac{a^4}{2}\cos 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} = a^4 .$$

Ответ: a^4.

Криволинейный интеграл первого рода по пространственной кривой

Пусть в пространстве задана кусочно-гладкая кривая. Пусть на этой кривой задана непрерывная ограниченная функция трех переменных $u = f\left(x, y, z\right)$. Строится интегральная сумма в полной аналогии со случаем плоской кривой.

Криволинейный интеграл первого рода по пространственной кривой l от функции трех переменных $f\left(x, y, z\right)$ равен:

$$\int\limits_L f\left(x,y,z\right)dl = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i, z_i\right)\Delta l_i . \qquad (1.10)$$

Для вычисления криволинейного интеграла 1-го рода по пространственной кривой необходимо записать параметрические уравнения этой кривой.

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (\alpha \le t \le \beta).$$

Тогда $dl = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\, dt$ (1.11)

$$\int\limits_L f\left(x,y,z\right)dl = \int\limits_\alpha^\beta f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\, dt . \qquad (1.12)$$

<u>Пример 5.</u> Вычислить криволинейный интеграл первого рода:

$\int\limits_{L_{AB}} \left(3x+4y+2z-2\right)dl$, где L - отрезок прямой между точками $A(4;-3;6)$ и $B(2;-5;5)$.

<u>Решение</u>. Запишем уравнение прямой L_{AB} в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = x_A + \left(x_B - x_A\right)t \\ y = y_A + \left(y_B - y_A\right)t \\ z = z_A + \left(z_B - z_A\right)t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4-2t \\ y = -3-2t \\ z = 6-t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1.$$

Вычислим dl по формуле (1.11)

$$dl=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-1)^2}\,dt=\sqrt{4+4+1}\,dt=3dt.$$

Подинтегральная функция примет вид:

$$3x+4y+2z-2=3(4-2t)+4(-3-2t)+2(6-t)-2=$$
$$=12-6t-12-8t+12-2t-2=10-16t.$$

Таким образом

$$\int\limits_{L_{AB}}(3x+4y+2z-2)dl=\int\limits_0^1(10-16t)3dt=3\left(10t-8t^2\right)\Big|_0^1=3\cdot(10-8)=6.$$

Ответ: 6.

Приложения криволинейных интегралов первого рода:

Геометрические приложения

§ Длина дуги L, заключенная между точками AB численно равна криволинейному интегралу первого рода по L_{AB} от $f(x,y)\equiv 1$.

$$l=\int\limits_{L_{AB}}dl\ . \qquad (1.13)$$

§ Если $f(x,y)$ неотрицательна везде вдоль кривой L_{AB}, то $\int\limits_{L_{AB}}f(x,y)dl$ численно равен площади цилиндрической поверхности с образующими параллельными оси Oz и проходящими через точки дуги L_{AB}, ограниченной снизу кривой L_{AB}, сверху кривой - являющейся пересечением цилиндрической поверхности с поверхностью $z=f(x,y)$, а с боков прямыми, проходящими через точки A и B параллельно оси Oz.

Физические приложения криволинейного интеграла 1-го рода.

Если дуга L_{AB} материальна и ее линейная плотность в каждой точке M дуги L задана как $\gamma(x,y,z)$, то

§ Масса материальной дуги L вычисляется по формуле

$$m=\int\limits_{L_{AB}}\gamma(x,y,z)dl. \qquad (1.14)$$

§ Координаты цента масс дуги определяются по формулам

$$x_c=\frac{1}{m}\int\limits_{L_{AB}}x\gamma(x,y,z)dl;\quad y_c=\frac{1}{m}\int\limits_{L_{AB}}y\gamma(x,y,z)dl;$$

$$z_c = \frac{1}{m} \int\limits_{L_{AB}} z\gamma(x, y, z)dl; \tag{1.15}$$

где m вычислена по формуле (1.14)

§ моменты инерции относительно начала координат O, координатных осей Ox, Oy, Oz и координатных плоскостей xOy, xOz, yOz, вычисляются по формулам:

$$I_0 = \int\limits_{L_{AB}} (x^2 + y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dl.$$

$$\left.\begin{array}{l} I_x = \int\limits_{L_{AB}} (z^2 + y^2)\gamma(x, y, z)dl; I_y = \int\limits_{L_{AB}} (x^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dl; \\ I_z = \int\limits_{L_{AB}} (x^2 + y^2)\gamma(x, y, z)dl; \\ I_{xy} = \int\limits_{L_{AB}} z^2\gamma(x, y, z)dl; I_{xz} = \int\limits_{L_{AB}} y^2\gamma(x, y, z)dl; \\ I_{yz} = \int\limits_{L_{AB}} x^2\gamma(x, y, z)dl. \end{array}\right\} (1.16)$$

<u>*Пример 6.*</u> Найти координаты центра тяжести дуги винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, если линейная плотность в точке $M(x, y, z)$ пропорциональна произведению всех ее координат.

<u>Решение</u>. По условию $\gamma = kxyz$, где k - коэффициент пропорциональности. Вычислим массу по формуле (1.14)

$$m = k\int\limits_L xyz\,dl =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} dl = \sqrt{((a\cos t)')^2 + ((a\sin t)')^2 + (bt')^2} = \\ \quad = \sqrt{a^2 sin^2 t + a^2 sin^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \end{array}\right\} =$$

$$= k\int\limits_0^{\pi/2} a\cos t \cdot a\sin t \cdot bt\sqrt{a^2 + b^2}\,dt = \frac{1}{2}ka^2b\sqrt{a^2 + b^2}\int\limits_0^{\pi/2} t\sin 2t\,dt =$$

$$= \left\{\begin{array}{l|l} u = t & du = dt \\ dv = \sin 2t & v = -\frac{1}{2}\cos 2t \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{ka^2b\sqrt{a^2 + b^2}}{2}\left(-\frac{t}{2}\cos 2t\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos 2t\,dt\right) =$$

$$= \frac{ka^2b\sqrt{a^2 + b^2}}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{\pi ka^2b\sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Координаты центра масс вычислим по формулам (1.15)

$$x_c=\frac{8}{k\pi a^2 b\sqrt{a^2+b^2}}k\int\limits_0^{\pi/2} a\cos t\cdot a^2\cos t\cdot\sin t\cdot bt\sqrt{a^2+b^2}\,dt=$$

$$=\frac{8a}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} t\cdot cos^2t\cdot\sin t\,dt=\left\{\begin{array}{c|c} u=t & du=dt \\ dv=cos^2t\sin t & v=-\frac{1}{3}cos^3t\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{8a}{\pi}\left(-\frac{t}{3}cos^3t\Big|_0^{\pi/2}+\frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi/2}cos^3t\,dt\right)=\frac{8a}{3\pi}\int\limits_0^{\pi/2}cos^2t\,d(\sin t)=$$

$$=\left\{\begin{array}{c} \sin t=u, cos^2t=1-u^2 \\ \sin\frac{\pi}{2}=1, \sin 0=0\end{array}\right\}=\frac{8a}{3\pi}\int\limits_0^1(1-u^2)du=\frac{8a}{3\pi}\left(u-\frac{u^3}{3}\right)\Big|_0^1=$$

$$=\frac{8a}{3\pi}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16a}{9\pi}.$$

$$y_c=\frac{8}{k\pi a^2 b\sqrt{a^2+b^2}}k\int\limits_0^{\pi/2} a\sin t\cdot a^2\cos t\cdot\sin t\cdot bt\sqrt{a^2+b^2}\,dt=$$

$$=\frac{8a}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} t\cdot sin^2t\cdot\cos t\,dt=\left\{\begin{array}{c|c} u=t & du=dt \\ dv=sin^2t\cos t & v=\frac{1}{3}sin^3t\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{8a}{\pi}\left(\frac{t}{3}sin^3t\Big|_0^{\pi/2}-\frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi/2}sin^3t\,dt\right)=\frac{8a}{\pi}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi/2}sin^2t\,d(\cos t)\right)=$$

$$=\left\{\begin{array}{c} \cos t=u, sin^2t=1-u^2 \\ \cos\frac{\pi}{2}=0, \cos 0=1\end{array}\right\}=\frac{8a}{\pi}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}\int\limits_0^1(1-u^2)du\right)=$$

$$=\frac{8a}{3\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\left(u-\frac{u^3}{3}\right)\Big|_0^1\right)=\frac{8a}{3\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{4a}{9\pi}(3\pi-4).$$

$$z_c=\frac{8}{k\pi a^2 b\sqrt{a^2+b^2}}k\int\limits_0^{\pi/2} b^2t^2\cdot a^2\cos t\cdot\sin t\cdot\sqrt{a^2+b^2}\,dt=$$

$$=\frac{4b}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} t^2\cdot\sin 2t\,dt=\left\{\begin{array}{c|c} u=t^2 & du=2tdt \\ dv=\sin 2t\,dt & v=-\frac{1}{2}\cos 2t\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{4b}{\pi}\left(-\frac{t^2}{2}\cos 2t\Big|_0^{\pi/2}+\int\limits_0^{\pi/2} t\cos 2t\;dt\right)=\frac{4b}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{8}+\int\limits_0^{\pi/2} t\cos 2t\;dt\right)=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u-t \\ dv=\cos 2t\,dt\end{matrix}\left|\begin{matrix} du=dt \\ v=\frac{1}{2}\sin 2t\end{matrix}\right.\right\}=\frac{4b}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{8}+\frac{t\sin 2t}{2}\Big|_0^{\pi/2}-\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin 2t}{2}\,dt\right)=$$

$$=\frac{4b}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{8}+\frac{\cos 2t}{4}\Big|_0^{\pi/2}\right)=\frac{4b}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}\right)=b\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\right).$$

Ответ: $x_c=\frac{16a}{9\pi}$, $y_c\frac{4a}{9\pi}(3\pi-4)$, $z_c=b\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\right)$.

Задания

Задание 1.1. Вычислить криволинейный интеграл I рода.

1) $\int\limits_L\frac{dl}{x+y}$; L- отрезок прямой, соединяющей точкм $A(2;4)$ и $B(1;3)$.

2) $\int\limits_L\frac{y}{\sqrt{x}}dl$; L - дуга полукубической параболы $y^2=\frac{4x^3}{9}$ от точки $A(3;2\sqrt{3})$ до точки $B\left(8;\frac{32\sqrt{2}}{3}\right)$.

3) $\int\limits_L y^2dl$; L - дуга линии $x=\ln y$ между т. $A(0;1)$ и $B(1;e)$.

4) $\int\limits_L \sin x\sqrt{1+\sin^4 x}dl$; L - дуга кривой $y=ctgx$; $\pi/4\le x\le\pi/2$.

5) $\int\limits_L ydl$; L - первая арка циклоиды $x=3(t-\sin t)$; $y=3(1-\cos t)$.

6) $\int\limits_L\left(3x-2\sqrt[3]{a^2y}\right)dl$; L -часть астроиды $x=a\cos^3t; y=a\sin^3t$ расположенная в первой координатной четверти.

7) $\int\limits_L(x+2y-3z)dl$; L - отрезок прямой между точками $A(1;3;-1)$ и $B(3;5;-1)$.

8) $\int\limits_L\sqrt{1+4y+9xz}dl$; L-дуга кривой $x=t; y=t^2; z=t^3; (0\le t\le 1)$

9) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2+a^2}\,dl$; L - дуга спирали Архимеда $\rho = a\varphi \quad (a>0)$ между точками $A(0;0)$ и $B(a^2;a)$.

10) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$; L - дуга лемнискаты $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ $(x \ge 0; y \ge 0)$.

Задание 1.2. Найти длину:

11) дуги ценной линии $y = (e^x + e^{-x})/2;\ x \in [0;1]$.

12) линии $x = a(\cos t + t\sin t)$; $y = a(\sin t - t\cos t)$; $0 \le t \le \beta$.

13) дуги пространственной кривой $x = cos^3 t$; $y = sin^3 t$; $z = \cos 2t$.

14) дуги линии пересечения поверхностей $x^3 = 3a^2 y$; $2xz = a^2$, заключенной между плоскостями $y = \frac{1}{3}a$ и $y = 9a$.

Задание 1.3.

15) Вычислить массу дуги кривой $\rho = 3\sin\varphi;\quad \varphi \in [0;\pi/4]$, если плотность в каждой ее точке пропорциональна расстоянию до полюса и при $\varphi = \pi/4$ равна 3.

16) Найти массу окружности $x^2+y^2 = ax$, если линейная плотность в каждой точке $\gamma(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

17) Вычислить момент инерции относительно оси Oz однородной дуги первого витка винтовой линии $x = 2\cos t;\quad y = 2\sin t;\quad z = t$.

18) Вычислить координаты центра масс дуги однородной кривой $x = e^t\cos t$; $y = e^t\sin t$; $z = e^t$; $-\infty \le t \le 0$.

Ответы: **1.** $\frac{\sqrt{2}}{2}ln2$; **2.**$\frac{2152}{45}$; **3.** $\frac{1}{3}\left((1+e^2)^{3/2} - 2^{3/2}\right)$; **4.**$\left(\frac{5\sqrt{2}}{12} - ln\left(tg\frac{\pi}{8}\right)\right)$; **5.**96; **6.**$\frac{1}{5}a^2$; **7.**$26\sqrt{2}$; **8.** $\frac{62}{15}$; **9.**$a^3\left(\frac{a^2}{3}+1\right)$; **10.**$\frac{1}{4}a^2\pi$; **11.**$\frac{e^2-1}{2e}$; **12.**$\frac{1}{2}a\beta^2$; **13.**10; **14.**$9a$; **15.**$\frac{9\sqrt{2}}{2}(2-\sqrt{2})$; **16.**$2a^2$; **17.**$8\pi\sqrt{5}$; **18.**$C\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$.

1.2 Криволинейный интеграл второго рода.

Пусть на плоскости xOy задана гладкая кривая L_{AB}. Пусть на этой кривой задана непрерывная функция $z = f(x,y)$. Разобьем кривую L_{AB} на n элементарных частей точками $M_0, M_1, \dots M_n$ $(A = M_0, B = M_n)$.

Обозначим через Δx_i и Δy_i проекции вектора $M_i\vec{M}_{i+1}$ на оси Ox и Oy. На каждой частичной дуге $M_i\vec{M}_{i+1}$ выберем произвольную точку $M_i^*\left(x_i^*, y_i^*\right)$. Составим интегральные суммы для $f\left(x, y\right)$ следующего вида:

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta x_i \text{ и } \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta y_i \ . \tag{1.17}$$

Пределы интегральных сумм (1.17) при $n \to \infty$ называются криволинейными интегралами от $f\left(x, y\right)$ по координатам на кривой L_{AB} или криволинейными интегралами второго рода.

$$\begin{aligned} \int\limits_{L_{AB}} f\left(x, y\right)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta x_i, \\ \int\limits_{L_{AB}} f\left(x, y\right)dy &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta y_i . \end{aligned} \tag{1.18}$$

Пусть на плоскости xOy задана векторная функция $\vec{a}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$, координаты которой - функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ - непрерывные функции на кривой L_{AB}. Проведем разбиение кривой L_{AB} тем же способом, что и указано выше. Вектор $M_i\vec{M}_{i+1}$ обозначим через $\Delta\vec{l}_i = \Delta x_i\vec{i} + \Delta y_i\vec{j}$. Для функции $\vec{a}(x, y)$ построим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{a}\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta\vec{l}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta x_i + Q\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta y_i . \tag{1.19}$$

Отметим, что в правой части равенства (1.19) стоят интегральные суммы типа (1.17) для функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

Криволинейным интегралом второго рода от функции $\vec{a}(x, y)$ называется предел интегральных сумм (1.19) при $n \to \infty$.

$$\int\limits_{L_{AB}}\left(\vec{a}d\vec{l}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{a}\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta\vec{l}_i\right) = \int\limits_{L_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy . \tag{1.20}$$

В случае, если задана пространственная кривая L_{AB}, и векторная функция $\vec{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, криволинейный интеграл второго рода записывается в виде:

$$\int\limits_{l}\vec{a}\,d\vec{l} = \int\limits_{L} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \ . \tag{1.21}$$

Свойства криволинейного интеграла второго рода:

§ Свойство аддитивности:

Если кривая L представляет собой объединение нескольких кривых $L_1, L_2, \ldots L_n$, то

$$\int_L \vec{a}\,\vec{dl} = \int_{L_1} \vec{a}\,\vec{dl} + \int_{L_2} \vec{a}\,\vec{dl} + \ldots + \int_{L_n} \vec{a}\,\vec{dl}\ . \qquad (1.22)$$

§ Свойство линейности:

$$\int_L \left(c_1\vec{a} + c_2\vec{b}\right)\vec{dl} = c_1\int_L \vec{a}\,\vec{dl} + c_2\int_L \vec{b}\,\vec{dl}\,, \qquad (1.23)$$

где c_1 и c_2 - произвольные константы, $\vec{a}$, $\vec{b}$ - заданные непрерывные векторные функции.

§ При изменении направления интегрирования криволинейный интеграл второго рода меняет знак на противоположный:

$$\int_{L_{AB}} \vec{a}\vec{dl} = -\int_{L_{BA}} \vec{a}\vec{dl}\ . \qquad (1.24)$$

Если криволинейный интеграл вычисляется по замкнутому контуру, то положительным принято считать направление обхода против часовой стрелки.

Вычисление криволинейных интегралов второго рода.

Вычисление криволинейных интегралов второго рода сводится к вычислению соответствующих определенных интегралов, полученных по следующим правилам:

§ Если плоская кривая L_{AB} задана явным уравнением L_{AB}: $y = y(x)$, $x_A = a$, $x_B = b$ то

$$\int_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \left[P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)\right]dx\,. \qquad (1.25)$$

§ Если плоская кривая L_{AB} задана параметрическими уравнениями: $x = x(t), \quad y = y(t)$, точке A соответствует значение $t = \alpha$, а точке B - $t = \beta$, тогда

$$\int_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \left[P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\right]dt. \qquad (1.26)$$

§ Если плоская кривая L_{AB} задана в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, причем в т. угол $\varphi = \varphi_A$, в т. B угол $\varphi = \varphi_B$, то

$$dx = \cos\varphi d\rho - \rho\sin\varphi\, d\varphi = \left(\cos\varphi \cdot \rho'(\varphi) - \rho\sin\varphi\right)d\varphi,$$
$$dy = \sin\varphi d\rho + \rho\cos\varphi\, d\varphi = \left(\sin\varphi \cdot \rho'(\varphi) + \rho\cos\varphi\right)d\varphi,$$
и криволинейный интеграл (1.20) примет вид:

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\varphi_A}^{\varphi_A} \left\{ P(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi) \times \right.$$
$$\times\left[\cos\varphi \cdot \rho'(\varphi) - \rho\sin\varphi\right] + Q(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi) \times \qquad (1.27)$$
$$\left.\times\left[\sin\varphi \cdot \rho'(\varphi) + \rho\cos\varphi\right]\right\}d\varphi.$$

§ Если L_{AB} - пространственная кривая, то для вычисления криволинейного интеграла второго рода (1.21) следует записать уравнение кривой в параметрическом виде

$$L_{AB}: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t_A = \alpha, \quad t_B = \beta, \\ z = z(t) \end{cases}$$

и вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \right.$$
$$\left. + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)\right]dt. \qquad (1.28)$$

<u>Пример 7.</u> Вычислить $\int\limits_{L}\left(y + x^2\right)dx + (2x - y)dy$, где L - дуга параболы $y = 2x - x^2$ от точки $(1;1)$ до точки $(3;-3)$.

<u>Решение:</u> Кривая L задана уравнением в явном виде, поэтому для вычисления заданного интеграла воспользуемся формулой (1.25)

$$y' = \left(2x - x^2\right)' = 2 - 2x, \quad a = 1; \quad b = 3.$$

$$\int\limits_{L} (y + x^2)dx + (2x - y)dy =$$
$$= \int\limits_{1}^{3} [2x - x^2 + x^2 + (2x - 2x + x^2)2(1 - x)]dx = \int\limits_{1}^{3} [2x + 2x^2 - 2x^3]dx =$$
$$= \left(x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4\right)\Big|_1^3 = 9 + 18 - \frac{81}{2} - 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{44}{3}.$$

Ответ: $-\dfrac{44}{3}$.

Пример 8. Вычислить $\oint\limits_L dx + xdy$, где L - эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, пробегаемый в положительном направлении.

Решение: Запишем уравнение эллипса в параметрическом виде:

$$\begin{matrix} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{matrix},\ 0 \le t \le 2\pi$$

Вычислим x'_t и y'_t: $x'_t = -a\sin t \quad y'_t = b\cos t$.

Для вычисления заданного интеграла воспользуемся формулой (1.26):

$$\oint\limits_L dx + xdy = \int\limits_0^{2\pi}\left(-a\sin t + a\cos t\cdot b\cos t\right)dt = -a\int\limits_0^{2\pi}\sin tdt +$$

$$+ab\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 tdt = a\cos t\Big|_0^{2\pi} + \frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(1+\cos 2t\right)dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = ab\pi.$$

Ответ: $ab\pi$.

Пример 9. Вычислить $\int\limits_L y^2dx + z^2dy + x^2dz$, если L - линия пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ с цилиндром $x^2+y^2=Rx \quad (z \ge 0)$, пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси Ox.

Решение: Запишем уравнение линии L в параметрическом виде. Для этого

1) Подставим уравнение цилиндра в уравнение сферы

$$z^2 = R^2 - Rx.$$

2) Преобразуем уравнение цилиндра

$$x^2+y^2 = Rx \quad \left(x-\frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}.$$

3) Запишем параметрическое уравнение этого цилиндра:

$$x = \frac{R}{2}+\frac{R}{2}\cos t;\ \ y = \frac{R}{2}\sin t;$$

$$z = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}(1+\cos t)} = \sqrt{\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{2}\cos t} = R\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}} = R\sin\frac{t}{2}.$$

Таким образом, параметрические уравнения заданного контура L имеют вид:

$$x = \frac{R}{2}(1+\cos t); \quad y = \frac{R}{2}\sin t; \quad z = R\sin\frac{t}{2}; \quad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2};$$

$$x'_t = -\frac{R}{2}\sin t; \quad y'_t = \frac{R}{2}\cos t; \quad z'_t = \frac{R}{2}\cos\frac{t}{2}.$$

Тогда, согласно (1.28), получаем:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} y^2dx + z^2dy + x^2dz =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{R^2}{4}sin^2t\left(-\frac{R}{2}\sin t\right) + R^2 sin^2\frac{t}{2}\cdot\frac{R}{2}\cos t + \right.$$

$$\left. + \frac{R^2}{4}(1+cos^2t)^2\frac{R}{2}\cos\frac{t}{2}\right]dt =$$

$$= \frac{R^3}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[-sin^3t + 2(1-\cos t)\cos t + 4cos^3\frac{t}{2}\right]dt =$$

$$= \frac{R^3}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\cos t - cos^2t + 2cos^3\frac{t}{2}\right]dt = \left\{\text{т.к.}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}[-sin^3t]dt = 0\right\} =$$

$$= \frac{R^3}{4}\left[\sin t|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt + 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}cos^2\frac{t}{2}d\left(\sin\frac{t}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{R^3}{4}\left[2 + \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + 4\left(\sin\frac{t}{2} - \frac{1}{3}sin^3\frac{t}{2}\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right]$$

$$= \frac{R^3}{4}\left[2 - \frac{\pi}{2} + 4\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)\right] = \frac{R^3}{4}\left(2 - \frac{\pi}{2} + \frac{10\sqrt{2}}{3}\right).$$

Ответ: $\frac{R^3}{4}\left(2 - \frac{\pi}{2} + \frac{10\sqrt{2}}{3}\right)$.

Приложения криволинейных интегралов второго рода.

§ Площадь S фигуры, расположенной в плоскости xOy и ограниченной замкнутой линией L, находится по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx\ . \qquad (1.29)$$

§ Если $\vec{F} = F_x(x,y,z)\vec{i} + F_y(x,y,z)\vec{j} + F_z(x,y,z)\vec{k}$ переменная сила, то работа силы $\vec{F}$, совершаемая вдоль контура L равна:

$$A = \int_L \vec{F}\,\vec{dl} = \int_L F_x(x,y,z)dx + F_y(x,y,z)dy + F_z(x,y,z)dz\,. \qquad (1.30)$$

Пример 10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной замкнутым контуром L: $y = x^4$; $y^4 = x$.

Решение: Площадь фигуры вычислим по формуле (1.29). Контур L состоит из двух частей: L_1: $y = x^4$ и L_2: $y^4 = x$.

Поэтому

$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_{L_1} xdy - ydx + \frac{1}{2}\int_{L_2} xdy - ydx.$$

$$\int_{L_1} xdy - ydx = \left\{ \begin{matrix} y = x^4, y' = 4x^3, \\ x_В = 1, x_Н = 0. \end{matrix} \right\} = \int_0^1 (x \cdot 4x^3 - x^4)dx = 3\int_0^1 x^4 dx = \frac{3}{5}x^5\Big|_0^1 = \frac{3}{5}.$$

$$\int_{L_2} xdy - ydx = \left\{ \begin{matrix} x = y^4, x' = 4y^3, \\ y_В = 0, y_Н = 1. \end{matrix} \right\} = \int_1^0 (y^4 - y \cdot 4y^3)dy = 3\int_0^1 y^4 dx = \frac{3}{5}y^5\Big|_0^1 = \frac{3}{5}.$$

Таким образом,

$$S = \frac{1}{2}\left[\int_{L_1} xdy - ydx + \frac{1}{2}\int_{L_2} xdy - ydx\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{5} + \frac{3}{5}\right] = \frac{3}{5}.$$

Ответ: $S = 0{,}6(ед)^2$.

Пример 11. Найти работу силы $\vec{F} = xy\vec{i} + zx^2\vec{j} + xyz\vec{k}$, совершаемую вдоль контура L: $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \\ z = t^2 \end{cases}$ из точки $A(1;1;0)$ в точку $B\left(e;\frac{1}{e};1\right)$.

Решение: Работу силы $\vec{F}$ найдем по формуле (1.30)

$$A = \int_L xydx + zx^2dy + xyzdz.$$

Криволинейный интеграл вычислим по формуле (1.28), учитывая, что $x'(t) = e^t$; $y'(t) = -e^{-t}$; $z'(t) = 2t; 0 \le t \le 1$.

$$A=\int_0^1\left[e^t\cdot e^{-t}\cdot e^t-t^2\cdot e^{2t}\cdot e^{-t}+e^t\cdot e^{-t}\cdot t^2\cdot 2t\right]dt=$$

$$=\int_0^1\left[e^t-t^2e^t+2t^3\right]dt=e^t\Big|_0^1+\frac{t^4}{2}\Bigg|_0^1-\int_0^1 t^2e^tdt=\left\{\begin{array}{l|l}u=t^2 & du=2tdt\\ d\upsilon=e^tdt & \upsilon=e^t\end{array}\right\}=$$

$$=e-1+\frac{1}{2}-t^2e^t\Big|_0^1+2\int_0^1 te^tdt=\left\{\begin{array}{l|l}u=t & du=dt\\ d\upsilon=e^tdt & \upsilon=e^t\end{array}\right\}=e-\frac{1}{2}-e+$$

$$+2\left(te^t\Big|_0^1-\int_0^1 e^tdt\right)=-\frac{1}{2}+2\left(e-e^t\Big|_0^1\right)=-\frac{1}{2}+2(e-e+1)=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}.$$

Ответ: $A=1{,}5$.

Задания

Задание 1.4. Вычислить криволинейный интеграл второго рода.

1) $\int\limits_L \cos^3 xdx+ydy$; L - дуга линии $y=\sin x$; $0\le x\le\pi/2$.

2) $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)dx+xydy$; L - дуга кривой $y=e^x$ от $A(0,1)$ до $B(1,e)$.

3) $\int\limits_L x(y-2)dx+y(2-x)dy$; L - контур треугольника с вершинами в точках $(-2,0)$, $(0,0)$, $(0,1)$ (обход против часовой стрелки).

4) $\int\limits_L x^2ydx+x^3dy$; L - контур, ограниченный параболами $y^2=x$, $x^2=y$ при положительном направлении обхода.

5) $\int\limits_L \sin^3 xdx+\dfrac{dy}{y^2}$; L - дуга кривой $y=ctgx$ от $x=0$ до $x=\pi/3$.

6) $\int\limits_L xydx+y^2dy$; L - дуга кривой $x=t^2$; $y=t$; $1\le t\le 2$.

7) $\int\limits_L ydx-xdy$; L - дуга астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$; $0\le t\le\pi/2$.

8) $\int\limits_L y^2dx+x^2dy$; L - первая арка циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

9) $\int\limits_L zdx+ydy+\left(x^2-y^2\right)dz$, L - дуга кривой $x=a\,ch\,t$, $y=a\,sh\,t$; $z=bt$ $(0\le t\le 1)$.

10) $\int\limits_L z dx + x dy - \frac{xy}{z} dz$; L - дуга кривой $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0 \le t \le \pi/2$.

Задание 1.5. Вычислить площади фигур, ограниченных следующими кривыми

11) Эллипсом $x = a\cos t$; $y = a\sin t$.

12) Кардиоидой $x = a(2\cos t - \cos 2t)$; $y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

13) Астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

14) Кривой $(x+y)^3 = axy$. Указание: положить $y = tx$, $0 \le t \le \infty$.

Задание 1.6. Вычислить работу силы $\vec{F}$ при перемещении материальной точки из A в B по заданной кривой.

15) $\vec{F} = x\vec{i} + \frac{1}{y^2}\vec{j}$; $A(1;1)$, $B\left(4;\frac{1}{4}\right)$, по дуге кривой $xy = 1$.

16) $\vec{F} = z^3\vec{i} + x\vec{j} + y^2\vec{k}$, по дуге кривой $x = t^3$, $y = t^2$, $z = t$, $A(0,0,0)$, $A(1,1,1)$.

Ответы: **1.** $\frac{7}{6}$; **2.** $\frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{12}$; **3.** $\frac{1}{3}$; **4.** $\frac{6}{35}$; **5.** $\frac{5}{24} - \sqrt{3}$; **6.** $\frac{-221}{15}$; **7.** $-\frac{3}{16}\pi a^2$; **8.** $a^3\pi(5 - 2\pi)$; **9.** $\frac{1}{2}\pi a(a+1) - ab - \frac{1}{3}a^3$; **10.** $\frac{1}{48}\pi^3 - \frac{5}{8}\pi + 1$; **11.** πab; **12.** $6\pi a^2$; **13.** $\frac{3}{8}\pi a^2$; **14.** $\frac{1}{60}a^2$; **15.** $\frac{9}{2}$; **16.** $\frac{7}{6}$.

1.3 Формула Грина.
Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.

Пусть область D - некоторая замкнутая область на плоскости xOy, ограниченная контуром L. Пусть в области D заданы функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$. Справедлива следующая теорема (теорема Грина).

Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в замкнутой односвязной области D, лежащей в плоскости xOy и ограниченной кусочно-гладкой кривой L, то

$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy, \qquad (1.31)$$

где интегрирование по контуру L выполняется в положительном направлении. Формула (1.31) называется формулой Грина.

Из формулы Грина следует, что если выполняется условие:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad (1.32)$$

то

1. $\oint\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, для любого контура, лежащего в области D.

2. $\oint\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависит от пути интегрирования.

3. Выражение $Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$: $du = Pdx + Qdy$.

Функция $u(x,y)$ называется потенциальной функцией для дифференциального выражения $Pdx + Qdy$.

Функцию $u(x,y)$ можно вычислить по формуле:

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)\Big|_{y=y_0} dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C. \qquad (1.33)$$

Из следствия 2 и формулы (1.33) следует, что

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} Pdx + Qdy = u(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} = u(x_1,y_1) - u(x_0,y_0). \qquad (1.34)$$

Пример 12. Применив формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_{L} 2\left(x^2 + y^2\right)dx + (x+y)^2 dy$, где L- контур треугольника АВС с вершинами в точках $A(1;1)$; $B(2;2)$; $C(1;3)$.

Решение: Построим контур L (рис. 4)

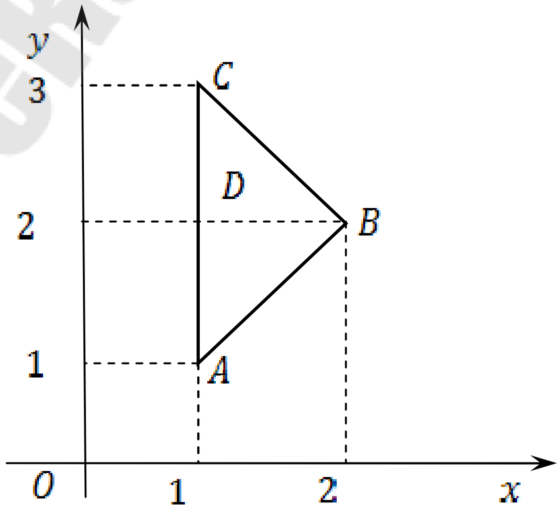


Рис. 4

Найдем уравнения сторон:

$$AB:\quad \frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}\quad \frac{x-1}{2-1}=\frac{y-1}{2-1};\quad y=x.$$

$$BC:\quad \frac{x-x_B}{x_C-x_B}=\frac{y-y_B}{y_C-y_B};\quad \frac{x-2}{1-2}=\frac{y-2}{3-2};\quad \frac{x-2}{-1}=\frac{y-2}{1};\quad y=4-x.$$

$$AC:\quad \frac{x-x_A}{x_C-x_A}=\frac{y-y_A}{y_C-y_A};\quad \frac{x-1}{1-1}=\frac{y-1}{3-1};\quad \frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{2};\quad x=1.$$

Для вычисления интеграла по формуле Грина необходимо вычислить $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\left(2\left(x^2+y^2\right)\right)_y'=4y;\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\left((x+y)^2\right)_x'=2(x+y),$$

таким образом

$$\oint_L 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy=\iint_D(2(x+y)-4y)dxdy=2\iint_D(x-y)dxdy=$$

$$=2\int_1^2dx\int_x^{4-x}(x-y)dy=2\int_1^2\left(xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_x^{4-x}dx=2\int_1^2\left(4x-\frac{3x^2}{2}-\frac{(4-x)^2}{2}\right)dx=$$

$$=2\left(2x^2-\frac{x^3}{3}+\frac{(4-x)^3}{6}\right)\Bigg|_1^2=2\left(8-4+\frac{4}{3}-2+\frac{1}{2}-\frac{2}{9}\right)=-\frac{4}{3}.$$

Пример 13. Проверить, зависит ли криволинейный интеграл от пути интегрирования.

$$\int_L 2xe^{x^2+y^2}dx+3y^2e^{x^2+y^2}dy.$$

Решение: Согласно следствию 2 из формулы Грина криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, если выполняется условие (1.32): $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. По условию

$$P=2xe^{x^2+y^2},\qquad Q=3y^2e^{x^2+y^2}.$$

Вычислим соответствующие частные производные:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\left(2xe^{x^2+y^2}\right)_y'=4xye^{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\left(3y^2e^{x^2+y^2}\right)_x'=6xy^2e^{x^2+y^2}.$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, следовательно, данный криволинейный интеграл зависит от пути интегрирования.

Пример 14. Убедившись, что подинтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл как разность значений потенциальной функции в начальной и конечной точках.

$$\int\limits_{AB}\left(3x^2y-4xy^2\right)dx+\left(x^3-4x^2y+3y^2\right)dy, \qquad \text{где } A(-1;1)B(1;1).$$

Решение: Убедимся, что подинтегральное выражение - полный дифференциал. Для этого проверим выполнение условия (1.32) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

По условию задачи $P(x,y)=3x^2y-4xy^2$, $\quad \dfrac{\partial P}{\partial y}=3x^2-8xy$,

$$Q(x,y)=x^3-4x^2y+3y^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2-8xy.$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, следовательно $du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$,

$$\int\limits_{AB}\left(3x^2y-4xy^2\right)dx+\left(x^3-4x^2y+3y^2\right)dy=\int\limits_{(-1;1)}^{(1;1)}du=u(1;1)-u(-1;1).$$

Определим потенциальную функцию $u(x,y)$, используя формулу (1.33). В качестве (x_0, y_0) выберем (0;0), тогда

$$u(x,y)=\int\limits_0^x\left(3x^2y-4xy^2\right)\Big|_{y=0}dx+\int\limits_0^y\left(x^3-4x^2y+3y^2\right)dy+C=$$

$$=\int\limits_0^x 0\cdot dx+\int\limits_0^y\left(x^3-4x^2y+3y^2\right)dy+C=x^3y-2x^2y^2+y^3\Big|_0^y+C=$$

$$=x^3y-2x^2y^2+y^3+C,$$

где C - произвольная постоянная.

Замечание: Потенциальную функцию $u(x,y)$ можно найти и по-другому.

Учитывая, что $P=\dfrac{\partial u}{\partial x}$, находим

$$u(x,y)=\int\left(3x^2y-4xy^2\right)dx=x^3y-2x^2y^2+\varphi(y),$$

$\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 - 4x^2 y + \varphi'(y)$, но $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$, таким образом

$\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 - 4x^2 y + \varphi'(y) = x^3 - 4x^2 y + 3y^2$, поэтому

$\varphi'(y) = 3y^2$, следовательно, $\varphi(y) = y^3 + C$.

Таким образом, $u(x,y) = x^3 y - 2x^2 y^2 + y^3 + c$.

Итак, зная $u(x,y)$, вычислим заданный криволинейный интеграл:

$$\int_{AB} \left(3x^2 y - 4xy^2\right)dx + \left(x^3 - 4x^2 y + 3y^2\right)dy = u(1;1) - u(-1;1) =$$

$$= \left\{1^3 \cdot 1 - 2\cdot 1^2 \cdot 1^2 + 3\cdot 1^3 + c\right\} - \left\{(-1)^3 \cdot 1 - 2\cdot(-1)^2 \cdot 1^2 + 3\cdot 1^3 + c\right\} = 2.$$

Задания

Задание 1.7. Вычислить криволинейный интеграл. Применяя формулу Грина (направление обхода контура против часовой стрелки).

1) $\oint_L \left(1 - x^2\right)y dx + x\left(1 + y^2\right)dy$; L- окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

2) $\oint_L \ln\left(3 + x^2 \sin^2 x\right)dx + x\cos y dy$; L - замкнутый контур заданный неравенствами $x + y \geq -5$, $x + y \leq -3$, $x \leq 0$, $y \leq 0$.

3) $\oint_L \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 4y^3}}\left(\left(2x - y^2\sqrt{x^2 + 4y^3}\right)dx + \left(12y^2 + x^2\sqrt{x^2 + 4y^3}\right)dy\right)$, L - контур прямоугольника с вершинами $A(a,c)$, $B(b,c)$, $C(b,d)$, $D(a,d)$, причем $0 < a < b$, $0 < c < d$.

4) $\oint_L (x + y)dx - (x - y)dy$; L- эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

5) $\oint_L e^{y^2 - x^2}(\cos 2xy dx + \sin 2xy dy)$; L- окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

6) $\oint_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$; L- эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

7) $\oint_L - x^2 y dx + xy^2 dy$; L- окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

8) $\int_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$; L- окружность $x^2 + y^2 = ax$.

Задание 1.8. Проверить, зависит ли криволинейный интеграл от пути интегрирования.

9) $\int\limits_L y^2z^2dx + x^2z^2dy + x^2y^2dz$.

10) $\int\limits_L 8x\sin\left(4x^2 - 5y^2\right)dx - 10y\sin\left(4x^2 - 5y^2\right)dy$.

11) $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2 - 1}dx + \ln\left(x^2 + y^2 + 1\right)dy$.

12) $\int\limits_L \left(6x^2z + 10x\right)dx + \left(4y^3 - 6x^2y\right)dy + \left(2x^3 + 6zy^2\right)dz$.

Задание 1.9. Вычислить криволинейный интеграл, предварительно определив функцию $u(x,y)$, соответствующим полным дифференциалом которой является подинтегральное выражение.

13) $\int\limits_{AB} \left(4x^3 - 3y^2 + 5y\right)dx + (5x - 6xy - 4y)dy$, где $A(0;0)$; $B(1;1)$.

14) $\int\limits_{AB} e^{y/x}\left(1 - \dfrac{y}{x}\right)dx + \left(1 + e^{y/x}\right)dy$, где $A(2;0)$; $B(0;0)$.

15) $\int\limits_{AB} \left(3y^2 + 4y\right)dx + (6xy + 4x - 4y)dy$, где $A(0;1)$; $B(1;2)$.

16) $\int\limits_{AB} \dfrac{ydx - xdy}{(x+y)^2}$; где $A(4;2)$; $B(5;1)$ вдоль путей, не пересекающих прямую $y = -x$.

Ответы: **1.** $\frac{1}{2}\pi R^4$; **2.** $\cos 3 - \cos 5$; **3.** $\frac{1}{2}(b-a)(d-c)(a+b+c+d)$; **4.** $-2\pi ab$; **5.** 0; **6.** 0; **7.** $\frac{1}{2}\pi R^4$; **8.** $-\frac{1}{8}a^3\pi$; **13.** 1; **14.** -2; **15.** 14; **16.** 1.

2. Поверхностные интегралы.

2.1 Поверхностный интеграл первого рода.

Определение 1: Поверхность называется гладкой, если в каждой ее точке существует касательная плоскость, непрерывно изменяющаяся вдоль поверхности.

Пусть $f(x,y,z)$ - непрерывная функция, заданная на некоторой гладкой поверхности σ. С помощью кусочно-гладких кривых разобьем σ

на n элементарных площадок. Площадь i-й площадки обозначим через $\Delta\sigma_i$, диаметр - d_i. Внутри каждой площадки выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Вычислив значения $f(M_i)$, построим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i \quad . \tag{2.1}$$

Сумма (2.1) называется интегральной суммой для функции $f(x, y, z)$ по поверхности σ_i.

Определение 2: Поверхностным интегралом первого рода называется предел интегральных сумм (2.1) при $n \to \infty$ (или $d_i \to 0$):

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (d_i\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i \, . \tag{2.2}$$

Из определения поверхностного интеграла первого рода следует, что он обладает теми же свойствами, что и кратные интегралы (аддитивность, линейность, теорема о среднем).

Приложения поверхностного интеграла первого рода.

§ Если $f(x, y, z) \equiv 1$, то из (2.2) следует, что

$$\iint\limits_{(\sigma)} d\sigma = S_\sigma \, . \tag{2.3}$$

Поверхностный интеграл от $d\sigma$ равен площади поверхности.

§ Если σ - материальная поверхность с поверхностной плотностью $\gamma(x, y, z)$, то ее масса может быть вычислена по формуле:

$$m_\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} \gamma(x, y, z)d\sigma \, , \tag{2.4}$$

а статические моменты, координаты центра тяжести, моменты инерции вычисляются по формулам, аналогичным (1.15), (1.16).

Вычисление поверхностных интегралов первого рода

Проекция D_{xy} поверхности σ на плоскость xOy называется однозначной, если любая прямая, проведенная параллельно оси Oz, пересекает σ только один раз.

Аналогично определяется однозначность проекций на две другие координатные плоскости.

§ Если проекция D поверхности σ на плоскость xOy однозначна, то поверхность σ можно задать явным уравнением: σ: $z = z(x, y)$.

В этом случае $$d\sigma = \sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dxdy. \qquad (2.5)$$

И вычисление поверхностного интеграла по σ сводится к вычислению двойного интеграла по проекции D_{xy}

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} f\left(x,y,z(x,y)\right)\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dxdy\ . \qquad (2.6)$$

Если уравнение (σ) можно представить в виде: $x = x(y,z)$ или $y = y(x,z)$, то поверхностный интеграл вычисляется по одной из формул:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{D_{yz}} f\left(x,(y,z),y,z\right)\sqrt{1+\left(x'_y\right)^2+\left(x'_z\right)^2}\,dydz. \qquad (2.7)$$

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{D_{xz}} f\left(x,y(x,z),z\right)\sqrt{1+\left(y'_x\right)^2+\left(y'_z\right)^2}\,dxdz. \qquad (2.8)$$

§ Если поверхность σ задана параметрическими уравнениями σ: $x = x(u,\upsilon);\quad y = y(u,\upsilon);\quad z = z(u,\upsilon)$, где функции x,y,z непрерывны вместе со своими первыми частными производными в некоторой замкнутой области D плоскости $uO\upsilon$, то поверхностный интеграл первого рода может быть вычислен по формуле:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{D_{u\upsilon}} f\left(x(u,\upsilon),y(u,\upsilon),z(u,\upsilon)\right)\sqrt{E\cdot G-F^2}\,dud\upsilon, \qquad (2.9)$$

где

$$E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2;$$

$$G = x_\upsilon'^2 + y_\upsilon'^2 + z_\upsilon'^2;$$

$$F = x'_u\ x'_\upsilon + y'_u y'_\upsilon + z'_u z'_\upsilon.$$

Вычисление поверхностного интеграла первого рода проводится по следующей схеме:

§ Определяется координатная плоскость, на которую заданная поверхность проецируется однозначно.

Если такой плоскости нет, то поверхность разбивается на несколько поверхностей, имеющих только общие границы, которые возможно однозначно спроецировать на координатные плоскости, либо делается переход к параметрическим уравнениям поверхности.

§ Строится плоская область D, определяются ее границы, исключив соответствующую переменную из уравнений поверхности σ .

§ Вычисляя необходимые частные производные, найдется $d\sigma$ через ds (ds - площадка на соответствующей координатной поверхности).

- § Поверхностный интеграл выражается через двойной по формулам (2.6)-(2.9).
- § Далее проводится вычисление двойного интеграла.

__Пример 15.__ Вычислить $\iint\limits_{\sigma}(xy+yz+xz)d\sigma$, где σ - часть поверхности конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанная цилиндром $x^2+y^2=2ax$.

<u>Решение:</u> Построим поверхность σ. (Рис. 5).

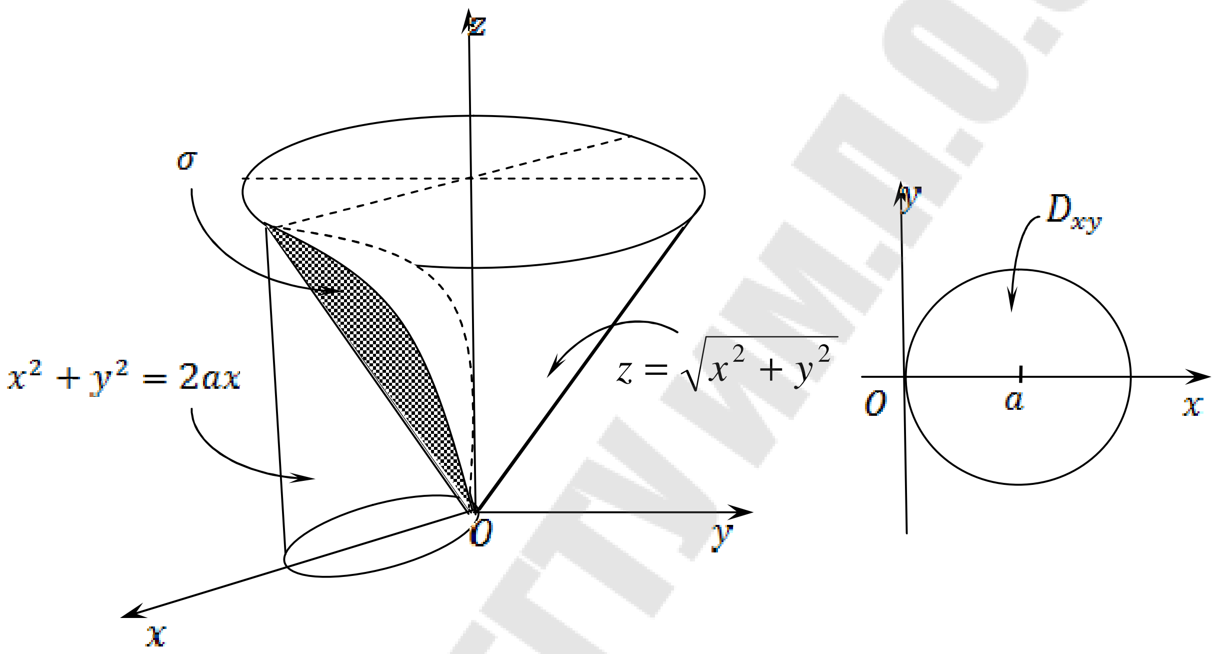


Рис. 5

Поверхность σ однозначно проецируется на плоскость xOy в круг D_{xy} $x^2+y^2=2ax$.

Вычислим z'_x и z'_y:

$$z'_x=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\text{ тогда}$$

согласно (2.5)

$$dz=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}dxdy.$$

Представим заданный поверхностный интеграл через двойной по формуле (2.6)

$$I=\iint\limits_{\sigma}(xy+yz+xz)d\sigma=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}\left(xy+y\sqrt{x^2+y^2}+x\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy.$$

Для вычисления полученного двойного интеграла перейдем к полярным координатам:

$x = \rho\cos\varphi$ $y = \rho\sin\varphi$. Тогда уравнение границы D_{xy} примет вид $\rho = 2a\cos\varphi$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, таким образом

$$I = \sqrt{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{2a\cos\varphi} (\rho^2\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2\cos\varphi + \rho^2\sin\varphi)\rho d\rho =$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\varphi\sin\varphi + \cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi \int\limits_{0}^{2a\cos\varphi} \rho^3 d\rho =$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\varphi\sin\varphi + \cos\varphi + \sin\varphi)\cdot\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{2a\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= 4\sqrt{2}a^4\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\varphi\sin\varphi + \cos\varphi + \sin\varphi)\cdot cos^4\varphi d\varphi =$$

$$= 4\sqrt{2}a^4\left[\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} cos^5\varphi\sin\varphi\, d\varphi + \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} cos^5\varphi d\varphi + \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} cos^4\varphi\sin\varphi\, d\varphi\right] =$$

$$= 8\sqrt{2}a^4\int\limits_{0}^{\pi/2} cos^5\varphi d\varphi = 8\sqrt{2}a^4\int\limits_{0}^{\pi/2} cos^4\varphi d(\sin\varphi) =$$

$$= 8\sqrt{2}a^4\int\limits_{0}^{\pi/2} (1 - sin^2\varphi)^2 d(\sin\varphi) = \begin{Bmatrix} t = \sin\varphi \\ t_В = 1, t_Н = 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= 8\sqrt{2}a^4\int\limits_{0}^{1} (1 - 2t^2 + t^4)dt = 8\sqrt{2}a^4\left.\left(t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right)\right|_0^1 =$$

$$= 8\sqrt{2}a^4\left.\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right)\right|_0^1 = \frac{64\sqrt{2}}{15}a^4.$$

Ответ: $\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4$.

Пример 16. Вычислить площадь поверхности $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = 2a^2xy.$

Решение: Площадь поверхности σ равна согласно (2.3)

$$S = \iint\limits_{\sigma} d\sigma\ .$$

Для вычисления необходимого поверхностного интеграла найдем параметрические уравнения заданной поверхности σ. Для этого перейдем к сферическим координатам:

$$x = r\cos\varphi\,\sin\theta;\quad y = r\sin\varphi\,\sin\theta;\quad z = r\cos\theta\,.$$

Уравнение поверхности примет вид:

$$\left(r^2\right)^2 = 2a^2r^2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta;$$

$$r^2 = a^2\sin 2\varphi\sin^2\theta\,,$$

$r = a\sin\theta\sqrt{\sin 2\varphi}$, из условия $r \ge 0$ находим,

$$\theta \in [0;\pi] \quad \varphi \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right].$$

В силу симметрии достаточно найти площадь поверхности, для которой $\varphi \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, а результат удвоить. Чтобы найти параметрические уравнения $x = x(\varphi,\theta)$, $y = y(\varphi,\theta)$, $z = z(\phi,\theta)$ подставим найденное выражение для r в формулы (2.16):

$$x = r\cos\varphi\,\sin\theta = a\sin^2\theta\sqrt{\sin 2\varphi}\cos\varphi\,,$$

$$y = r\sin\varphi\,\sin\theta = a\sin^2\theta\sqrt{\sin 2\varphi}\sin\varphi\,,$$

$$z = r\cos\theta = a\sin\theta\,\cos\theta\sqrt{\sin 2\varphi}\,,$$

$$x'_\varphi = a\sin^2\theta\left(\frac{1}{2}(\sin 2\varphi)^{-1/2}\cos 2\varphi\cdot 2\cdot\cos\varphi - (\sin 2\varphi)^{1/2}\cdot\sin\varphi\right) =$$

$$= a\sin^2\theta\left(\frac{\cos 2\varphi\cdot\cos\varphi - \sin\varphi\cdot\sin 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}\right) = a\sin^2\theta\,\frac{\cos 3\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}\,;$$

$$x'_\theta = a\sqrt{\sin 2\varphi}\cdot\cos\varphi\cdot 2\sin\theta\,\cos\theta = a\cos\varphi\sqrt{\sin 2\varphi}\,\sin 2\theta\,;$$

$$y'_\varphi = a\sin^2\theta\left(\frac{1}{2}(\sin 2\varphi)^{-1/2}\cos 2\varphi\cdot 2\cdot\sin\varphi + (\sin 2\varphi)^{1/2}\cos\varphi\right) =$$

$$= a\sin^2\theta\,\frac{\sin 3\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}\,;$$

$$y'_\theta = a\sqrt{\sin 2\varphi}\cdot\sin\varphi\cdot 2\sin\theta\,\cos\theta = a\sin\varphi\sqrt{\sin 2\varphi}\,\sin 2\theta\,;$$

$$z'_\varphi = a\sin\theta\,\frac{1}{2}(\sin 2\varphi)^{-1/2}\cos 2\varphi\cdot 2 = \frac{a\sin\theta\cdot\cos 2\varphi\cdot\cos\theta}{\sqrt{\sin 2\varphi}};$$

$$z'_\theta = a\sqrt{\sin 2\varphi}\cos 2\theta.$$

Найдем E, G и F по формулам (2.1.10):

$$E = \left(x'_\varphi\right)^2 + \left(y'_\varphi\right)^2 + \left(z'_\varphi\right)^2 = \frac{a^2\sin^4\theta}{\sin 2\varphi}\cos^2 3\varphi + \frac{a^2\sin^4\theta}{\sin 2\varphi}\sin^2 3\varphi +$$

$$+\frac{a^2\sin^2\theta\cos^2\theta\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi} = \frac{a^2\sin^2\theta}{\sin 2\varphi}\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\cos^2 2\varphi\right);$$

$$G = \left(x'_\theta\right)^2 + \left(y'_\theta\right)^2 + \left(z'_\theta\right)^2 = a^2\sin 2\varphi\cdot\sin^2 2\theta\cos^2\varphi +$$

$$+a^2\sin 2\varphi\sin^2 2\theta\cdot\sin^2\varphi + a^2\sin 2\varphi\cos^2 2\theta = a^2\sin 2\varphi\times$$

$$\times\left(\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta\right) = a^2\sin 2\varphi;$$

$$F = x'_\varphi\cdot x'_\theta + y'_\varphi\cdot y'_\theta + z'_\varphi\cdot z'_\theta = \frac{a\sin^2\theta}{\sqrt{\sin 2\varphi}}\cdot\cos 3\varphi\cdot a\cos\varphi\sqrt{\sin 2\varphi}\sin 2\theta +$$

$$+a\frac{\sin^2\theta}{\sqrt{\sin^2\varphi}}\sin 3\varphi\cdot a\sin\varphi\sqrt{\sin 2\varphi}\sin 2\theta + \frac{a\cos 2\varphi\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\sin 2\varphi}}\cdot a\sqrt{\sin 2\varphi}\times$$

$$\times\cos 2\theta = a^2\sin^2\theta\sin 2\theta(\cos 3\varphi\cos\varphi + \sin 3\varphi\cdot\sin\varphi) +$$

$$+a^2\sin\theta\cos\theta\cos 2\varphi\cos 2\theta = a^2\sin^2\theta\sin 2\theta\cos 2\varphi +$$

$$+a^2\sin\theta\cos\theta\cos 2\varphi\cos 2\theta = a^2\cos 2\varphi\sin\theta\cdot\cos\theta\left(2\sin^2\theta + \cos 2\theta\right) =$$

$$= a^2\cos 2\varphi\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta.$$

Подставляя найденные E, G и F в формулу (2.1.9), получаем:

$$E\cdot G - F^2 = \frac{a^2(\sin\theta)^2}{\sin 2\theta}\left((\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2(\cos 2\varphi)^2\right)\cdot a^2\sin 2\varphi$$
$$-\left(a^2\cos 2\varphi\sin\theta\cos\theta\right)^2 = a^4(\sin\theta)^4$$

$$S = 2\iint_{D_{\varphi\theta}}\sqrt{a^4 sin^4\theta}\,d\varphi d\theta = 2\iint_{D_{\varphi\theta}} a^2 sin^2\theta\,d\varphi d\theta =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_0^{\pi} a^2 sin^2\theta\,d\theta = a^2\varphi\Big|_0^{\pi/2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2\theta)d\theta$$

$$= \frac{a^2\pi}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{a^2\pi^2}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{a^2\pi^2}{2}(ед)^2$.

Пример 17. Найти массу поверхности сферы, радиус которой R, если ее поверхностная плотность в каждой точке равна квадрату расстояния от этой точки до вертикального диаметра.

Решение: Расположим начало координат в центре сферы, а ось Oz направим через вертикальный диаметр. Уравнение поверхности сферы в этом случае примет вид: $x^2+y^2+z^2=R^2$, а поверхностная плотность по условию $\gamma=x^2+y^2$. Массу сферы найдем по формуле (2.4)

$$m=\iint_{\sigma}\left(x^2+y^2\right)d\sigma .$$

Из уравнения сферы находим $z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, где знак «+» определяет верхнюю (σ_1), а «- » нижнюю (σ_2) половину сферы

$$m=\iint_{\sigma_1}\left(x^2+y^2\right)d\sigma+\iint_{\sigma_2}\left(x^2+y^2\right)d\sigma=2\iint_{\sigma_1}\left(x^2+y^2\right)d\sigma .$$

Верхняя половина сферы задана однозначной явной функцией

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2} .$$

Вычислим поверхностный интеграл по формуле (2.6). Проекцией σ_1 на плоскость xOy является D_{xy} - круг $x^2+y^2=R^2$;

$$z'_x=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-yz}};\ z'_y=-\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-yz}},$$

тогда

$$m=\iint_{\sigma_1}\left(x^2+y^2\right)d\sigma=\iint_{D_{xy}}\left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}\times$$

$$\times dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{\left(x^2+y^2\right)R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy.$$

Получившийся двойной интеграл вычислим перейдя к полярным координатам.

$$m=R\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\frac{\rho^2}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho d\rho=\frac{R}{2}\varphi|_0^{2\pi}\int_0^R\frac{\rho^2d\rho^2}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=\{\rho^2=t\}=$$

$$=\pi R\int_0^{R^2}\frac{tdt}{\sqrt{R^2-t}}=\pi R\int_0^{R^2}\frac{t-R^2+R^2}{\sqrt{R^2-t}}dt=$$

$$= \pi R\left[R^2\int_0^{R^2}\frac{dt}{\sqrt{R^2-t}}-\int_0^{R^2}\sqrt{R^2-t}\,dt\right]=$$

$$= \pi R\left[-2R^2\sqrt{R^2-t}\Big|_0^{R^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(R^2-t)^3}\Big|_0^{R^2}\right]=\pi R\left[2R^3+\frac{2}{3}R^3\right]=\frac{8}{3}\pi R^4.$$

Ответ: $m=\frac{8}{3}\pi R^4$.

Задания

Задание 2.1. Вычислить поверхностный интеграл первого рода.

1) $\iint\limits_{\sigma} xyz\,d\sigma$; σ - часть плоскости $x+y+z=1$,лежащая в первом октанте.

2) $\iint\limits_{\sigma} xyz\,d\sigma$; σ - часть поверхности параболоида $z=x^2+y^2$, отсекаемая плоскостью $z=1$.

3) $\iint\limits_{\sigma}\left(7y^2-3x^2-3z^2\right)d\sigma$; σ - часть поверхности конуса $y=\sqrt{x^2+z^2}$, вырезаемая цилиндром $x^2+z^2=2x$.

4) $\iint\limits_{\sigma}\left(x^2+2y^2z^2+y^4+z^4\right)d\sigma$; σ - часть плоскости $x+y+z=2$, вырезаемая цилиндром $y^2+z^2=1$.

5) $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{1+9x^2+9z^2}\,d\sigma$; σ - часть поверхности $y=3xz$, вырезанная цилиндром $\left(x^2+z^2\right)^2=8xz$.

6) $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{1+y^2+z^2}\,d\sigma$; σ - часть поверхности $2x=y^2-z^2$, вырезанная цилиндром $\left(x^2+z^2\right)^2=4\left(y^2-z^2\right)$.

7) $\iint\limits_{\sigma}\left(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2\right)d\sigma$; σ - поверхность о тсеченная от от верхней части конуса $z^2=k^2(x^2+y^2)$, вырезанная цилиндром $x^2+z^2-2ax=0$.

8) $\iint\limits_{\sigma} z\,d\sigma$; σ - часть поверхности геликоида $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=v$ $(0<u<a, 0<v<2\pi)$.

Задание 2.2. Найти площадь поверхности:

9) Сферы $x^2+y^2+z^2=4$, вырезанной цилиндром $x^2+4y^2=4$.

10) $(x^2+y^2+z^2)^2=2a^2xy$.

Задание 2.3. Найти массу поверхности σ

11) σ- полусфера $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\gamma(x,y,z)=x^2y^2$.

12)$\sigma: x+y+z=4$, вырезанная цилиндром $x^2+y^2=4$, если в каждой ее точке поверхностная плотность $\gamma(x,y,z)=x^4+y^2+z^4+2x^2z^2$.

Задание 2.4. Найти центр тяжести поверхности при указанной поверхностной плотности $\gamma=\gamma(x,y,z)$.

13) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанной поверхностью $x^2+y^2=ax$, если $\gamma(x,y,z)=1$.

14) Верхней половины сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, если поверхностная плотность в каждой точке равна расстоянию до оси Oz.

Задание 2.5. Найти моменты инерции поверхности при указанной поверхностной плотности $\gamma=\gamma(x,y,z)$.

15) $\sigma: h^2(x^2+y^2)=a^2z^2 \quad (0\le z\le h)$ относительно оси Oz при $\gamma(x,y,z)=1$.

16) σ - поверхность однородного конуса, ось которого совпадает с осью Oz, а вершина лежит в начале координат относительно координатных плоскостей.

Ответы: **1.** $\frac{160}{3}\pi$; **2.**0; **3.** $6\sqrt{2}\pi$; **4.**$\frac{29}{6}\sqrt{3}\pi$; **5.**$2(2+9\pi)$; **6.**$2(2+\pi)$; **7.**$\frac{1}{24}(80k^2+7)\pi a^6\sqrt{1+k^2}$; **8.** $\pi^2\left(a\sqrt{1+a^2}+ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\right)$; **9.**$\frac{16}{3}\pi$; **10.**$4a^2$; **11.**$\frac{128}{15}\pi$; **12.**$\frac{286}{3}\pi\sqrt{3}$; **13.**$C\left(\frac{a}{2},0,\frac{16}{9\pi}a\right)$; **14.**$C\left(0,0,\frac{3}{8}R\right)$; **15.**$\frac{1}{2}\pi a^3\sqrt{a^2+h^2}$; **16.**$I_{xy}=\frac{1}{2}\pi lh^2R,\ I_{yz}=I_{xz}=\frac{1}{4}\pi lR^3$ (h - высота, R - радиус основания, $l=\sqrt{R^2+h^2}$ - образующая конуса).

2.2 Поверхностный интеграл второго рода.

Определение 1: Поверхность называется двухсторонней, если при перемещении основания вектора нормали вдоль любого замкнутого контура направление нормали при возвращении в исходную точку не меняется. В противном случае, поверхность называется односторонней.

Примерами двусторонних поверхностей являются плоскости, все поверхности второго порядка. Классическим примером односторонней поверхности является лист Мебиуса.

Двусторонняя поверхность, у которой фиксирована одна из сторон называется ориентированной.

Если незамкнутая двухсторонняя поверхность σ однозначно проецируется на плоскость xOy, т.е. ее уравнение можно записать в явном виде $z = z(x, y)$, то за положительную по отношению к оси Oz сторону поверхности σ - «сторону σ_z^+» выбирают ту сторону поверхности σ, которая видна со стороны положительного направления оси z, если смотреть на плоскость xOy. Сторону поверхности σ, которая не видна со стороны положительного направления оси z, называют отрицательной по отношению к оси Oz - σ_z^-.

Аналогично определяются $\sigma_x^{\pm}$, $\sigma_y^{\pm}$.

Если двухсторонняя поверхность σ замкнутая, то за σ^+ принимается внешняя, а σ^- - внутренняя стороны σ.

Пусть σ - гладкая двухсторонняя ориентированная поверхность.

Пусть $R(x, y, z)$ - непрерывная функция, определенная на поверхности σ.

Разобьем σ системой гладких кривых на элементарные площадки σ_i площадью $\Delta\sigma_i$ каждая. Внутри каждой элементарной площадки выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Построим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i \Delta y_i \ . \tag{2.10}$$

$\Delta x_i \Delta y_i$ - площадь проекции $\Delta\sigma_i$ на плоскость Oxy, причем $\Delta x_i \Delta y_i > 0$, если на σ выбрана сторона σ^+ и $\Delta x_i \Delta y_i < 0$, если на σ выбрана сторона σ^-.

Интегральная сумма (2.10) называется интегральной суммой для функции $R(x, y, z)$ на поверхности σ по координатам x, y.

Определение 2: Поверхностным интегралом второго рода (поверхностным интегралом по координатам x, y) от функции $R(x, y, z)$ по ориентированной поверхности σ называется предел интегральной суммы (2.10) при $n \to \infty$:

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z)dxdy = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i \Delta y_i \ . \tag{2.11}$$

Аналогично определяются поверхностные интегралы второго рода по координатам (x, z) и (y, z).

Если на гладкой двухзначной ориентированной поверхности σ заданы три непрерывные функции $R(x, y, z)$, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, то поверхностным интегралом второго рода называют выражение:

$$\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy \ . \qquad (2.12)$$

Поверхностный интеграл второго рода обладает всеми теми же свойствами, что и поверхностный интеграл первого рода за исключением одного: при изменении стороны поверхности, знак интеграла (2.12) меняется на противоположный.

Вычисление поверхностного интеграла второго рода (2.12) сводится к вычислению поверхностного интеграла первого рода следующим образом:

Пусть поверхность σ задана уравнением $F(x,y,z)=0$. Тогда единичный вектор нормали к поверхности σ определяется как

$$\vec{n}^{o} = \pm(grad\ F)/|grad\ F|, \qquad (2.13)$$

где $grad\ F = \dfrac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\vec{k}$.

Знак $\pm$ выбирается в зависимости от того, положительная или отрицательная стороны поверхности выбраны.

Из (2.13) следует, что косинусы углов, которые нормаль образует с координатными осями равны:

$$\cos\alpha = \pm\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{|\vec{n}|}; \quad \cos\beta = \pm\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{|\vec{n}|}; \quad \cos\gamma = \pm\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{|\vec{n}|}. \qquad (2.14)$$

Знак «$\pm$» должен быть согласован с выбранной стороной поверхности.

Учитывая, что $\Delta x_i \Delta y_i = \cos\gamma\Delta\sigma_i$, $\Delta x_i \Delta z_i = \cos\beta\Delta\sigma_i$, $\Delta y_i \Delta z_i = \cos\alpha\Delta\sigma_i$, получаем

$$\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$
$$= \iint\limits_{\sigma}\big(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\big)d\sigma. \qquad (2.15)$$

Далее полученный интеграл (2.15) вычисляется по правилам, изложенным в предыдущем параграфе.

Пусть на гладкой двухсторонней ориентированной поверхности σ задана векторная функция

$$\vec{a}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}\ .$$

Вектор единичной нормали к поверхности имеет вид: $\vec{n}^{o} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$

Тогда поверхностный интеграл (2.12) может быть записан в виде:

$$\iint\limits_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_{\sigma}\left(\vec{a}\cdot\vec{n}^{o}\right)d\sigma\ . \qquad (2.16)$$

Если уравнение поверхности σ задано явно, например, как $z = z(x, y)$, то поверхностный интеграл (2.16) может быть вычислен по формуле

$$\iint\limits_{\sigma} Pdzdy + Qdxdz + Rdxdy = \pm \iint\limits_{D_{xy}} \left(\vec{a} \cdot \vec{n}\right)\Big|_{z=z(x,y)} dxdy \;. \qquad (2.17)$$

Интеграл, стоящий в правой части (2.17) - двойной интеграл по плоской области D_{xy} - проекции σ на координатную плоскость xOy, $\vec{n}$ - вектор нормали: $\vec{n} = \left\{-z'_x, -z'_y, 1\right\}$, запись $\left(\vec{a} \cdot \vec{n}\right)\Big|_{z=z(x,y)}$ означает, что в скалярном произведении переменную z везде следует заменить на $z(x, y)$. Знак перед интегралом выбирается в зависимости от того, по положительной или отрицательной стороне поверхности σ ведется интегрирование.

Если уравнение σ задано явно, как $x = x(y, z)$, то

$$\iint\limits_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \pm \iint\limits_{D_{yz}} \left(\vec{a} \cdot \vec{n}\right)\Big|_{x=x(y,z)} dydz, \qquad (2.18)$$

где D_{yz} - проекция σ на плоскость yOz, $\vec{n} = \left\{1; -x'_y; -x'_z\right\}$.

В случае, если σ : $y = y(x, z)$, то справедлива формула

$$\iint\limits_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \pm \iint\limits_{D_{xz}} \left(\vec{a} \cdot \vec{n}\right)\Big|_{y=y(x,z)} dxdz, \qquad (2.19)$$

где D_{xz} - проекция σ на плоскость xOz, $\vec{n} = \left\{-y'_x; 1; -y'_z\right\}$.

В общем случае, для вычисления поверхностного интеграла второго рода (2.12) необходимо вычислить три интеграла, соответствующих проекциям на три координатные плоскости:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\delta} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy &= \pm \iint\limits_{D_{yz}} P\left(x(y,z), y, z\right)dydz \pm \\ &\pm \iint\limits_{D_{xz}} Q\left(x, y(x,z), z\right)dxdz \pm \iint\limits_{D_{xy}} R\left(x, y, z(x,y)\right)dxdy,\end{aligned} \qquad (2.20)$$

где D_{yz}, D_{xz}, D_{xy} - проекции σ на координатные плоскости. Однако, если поверхность σ задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, которое можно однозначно разрешить относительно одной из переменных, то вместо вычисления трех интегралов в (2.20) можно воспользоваться одной из формул (2.17)-(2.19). Если незамкнутая поверхность σ неоднозначно проецируется на координатные плоскости, то ее следует разбить на части, однозначно проецирующиеся на одну из координатных плоскостей.

<u>*Пример 18.*</u> Вычислить $\iint\limits_{\sigma} (3x + z)dydz + (3x + 3)dxdz + (y + z)dxdy$,

где σ - верхняя часть плоскости $6x + 3y + 2z = 6$, расположенная в первом октанте.

<u>Решение:</u> I-й способ: Обозначим проекции поверхности σ на координатные плоскости через D_{yz}, D_{xz}, D_{xy} - соответственно (рис. 21).

Тогда $\iint\limits_{\sigma} (3x+z)dydz + (3x+3)dxdz + (y+z)dxdy = I_1 + I_2 + I_3$, где

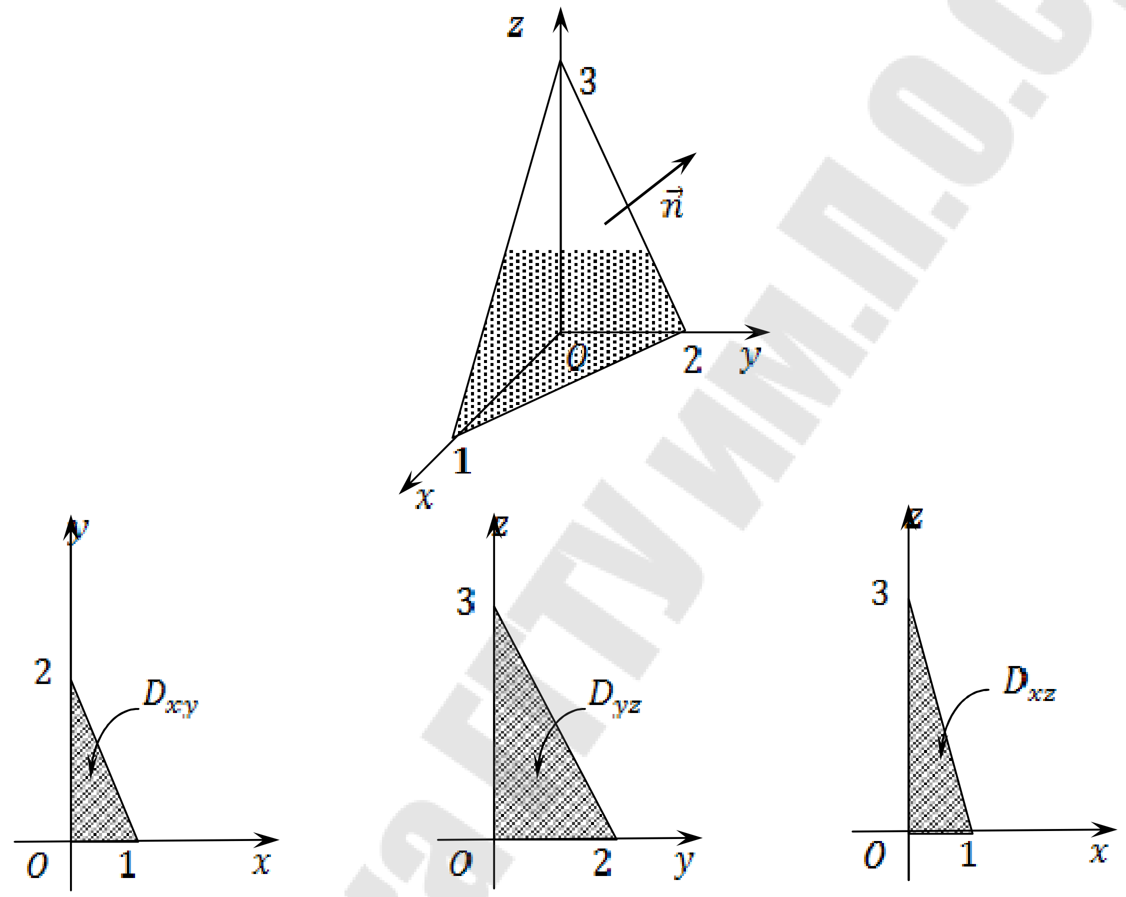


Рис. 21

$$I_1 = \iint\limits_{\sigma} (3x+z)dydz = \iint\limits_{D_{yz}} \left(3\left(1 - \frac{y}{2} - \frac{z}{3}\right) + z\right) dydz = \iint\limits_{D_{yz}} \left(3 - \frac{3y}{2}\right) dydz =$$

$$= 3\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{3-\frac{3}{2}y} \left(1 - \frac{y}{2}\right) dz = 3\int\limits_0^2 \left[\left(1 - \frac{y}{2}\right) \cdot z\Big|_0^{3-\frac{3}{2}y}\right] dy = 9\int\limits_0^2 \left(1 - \frac{y}{2}\right)^2 dy =$$

$$= -9 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3}\left(1 - \frac{y}{2}\right)^3\Big|_0^2 = 6.$$

$$I_2 = \iint_{\sigma}(3x+3)dxdz = 3\iint_{D_{xz}}(x+1)\,dxdz = 3\int_0^1 (x+1)dx\int_0^{3(1-x)} dz =$$

$$= 3\int_0^1\left[(x+1)\cdot z|_0^{3(1-x)}\right]dx = 9\int_0^1(1-x^2)dx = 9\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 6.$$

$$I_3 = \iint_{\sigma}(y+z)dxdy = \iint_{D_{xy}}\left(\left(3-3x-\frac{3}{2}y\right)+y\right)dxdy = \iint_{D_{xy}}\left(3-3x-\frac{y}{2}\right)dxdy =$$

$$= \int_0^1 dx\int_0^{2(1-x)}\left(3(1-x)-\frac{y}{2}\right)dy = 3\int_0^1\left[3(1-x)y--\frac{y^2}{4}\right]\Big|_0^{2(1-x)}dx =$$

$$= \int_0^1(6(1-x)^2-(1-x)^2)dx = 5\int_0^1(1-x)^2dx = -\frac{5}{3}(1-x)^3|_0^1 = \frac{5}{3}.$$

Таким образом,

$$\iint_{\sigma}(3x+z)dydz+(3x+3)dxdz+(y+z)dxdy = 6+6+\frac{5}{3} = \frac{41}{3}.$$

II способ:Рассмотрим векторное поле $\vec{a} = (3x+z)\vec{i} + (3x+3)\vec{j} + (y+z)\vec{k}$.

Найдем z из уравнения поверхности $z = 3-3x-\frac{3}{2}y$;

$z'_x = -3;\quad z'_y = -\frac{3}{2}$, тогда вектор нормали $\vec{n} = \left\{3;\frac{3}{2};1\right\}$. Поверхность σ однозначно проецируется на плоскость xOy, поэтому для вычисления заданного интеграла воспользуемся формулой (2.17)

$$\iint_{\sigma}(3x+z)dydz+(3x+3)dxdz+(y+z)dxdy =$$

$$= \iint_{D_{xy}}\left[3\cdot(3x+z)+\frac{3}{2}(3x+3)+1(y+z)\right]\Bigg|_{z=3-3x-\frac{3}{2}y} dxdy =$$

$$= \iint_{D_{xy}}\left[9x+9-9x-\frac{9}{2}y+\frac{9}{2}x+\frac{9}{2}+y+3-3x-\frac{3}{2}y\right]dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \left(\frac{33}{2} + \frac{3}{2}x - 5y\right) dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2(1-x)} \left(\frac{33}{2} + \frac{3}{2}x - 5y\right) dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{33y}{2} + \frac{3xy}{2} - \frac{5y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2(1-x)} dx = \left(-\frac{33}{2}(1-x)^2 + \frac{3x^2}{2} - x^3\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{33}{2} + \frac{3}{2} - 1 - \frac{10}{3} = \frac{41}{3}.$$

Ответ: $I = \dfrac{41}{3}$.

<u>Пример 19.</u> Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_\sigma zdydz + \left(y + z^2\right)dxdz + \left(x^2 - x\right)dxdy,$$

σ - часть поверхности $y = 1 + x^2 + z^2$, отсеченная плоскостью $y = 3$. Рассмотреть сторону σ, которая видна из начала координат.

<u>Решение:</u> Поверхность σ задана явным уравнением $y = y(x,z)$. На плоскость xOz σ проецируется в круг $D_{xz}: x^2 + z^2 = 2$ По условию, рассматривается сторона, которая видна из начала координат, следовательно, она не видна со стороны положительного направления Oy, поэтому это σ^-. В силу этого, вектор нормали к повепхности выберем в виде $\vec{n} = \{y'_x; -1; y'_z\} = \{2x; -1; 2z\}$.

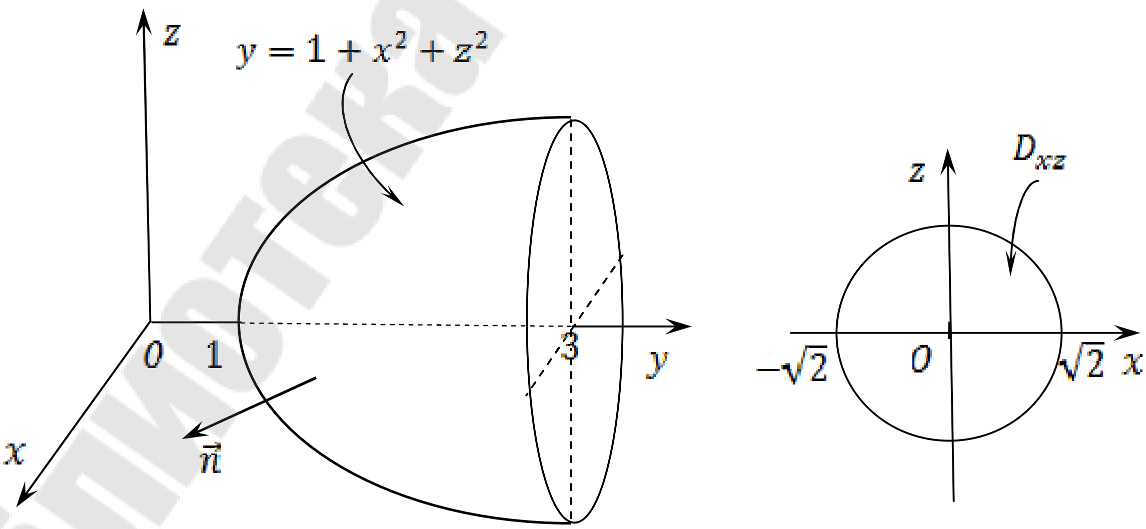


Рис. 22

По условию:

$\vec{a} = z\vec{i} + \left(y + z^2\right)\vec{j} + \left(x^2 - x\right)\vec{k}$, тогда

$\vec{a} \cdot \vec{n} = z \cdot (2x) + \left(y + z^2\right) \cdot (-1) + \left(x^2 - x\right) \cdot (2z) = 2zx^2 - y - z^2.$

$\left(\vec{a} \cdot \vec{n}\right)\Big|_{y=1+x^2+z^2} = 2x^2z - 1 - x^2 - z^2 - z^2 = -1 - x^2 - 2z^2 + 2x^2z.$

Таким образом, согласно (2.19), искомый интеграл равен:

$$I = \iint\limits_{\sigma} zdydz + \left(y + z^2\right)dxdz + \left(x^2 - x\right)dxdy =$$

$$= -\iint\limits_{D_{xz}} \left(1 - 2xz^2 + x^2 + 2z^2\right)dxdz.$$

Полученный двойной интеграл вычислим, переходя к полярным координатам:

$$x = \rho\cos\varphi \quad \varphi \in [0; 2\pi],$$

$$z = \rho\sin\varphi \quad \rho \in \left[0; \sqrt{2}\right],$$

$$I = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (1 - 2\rho^3\cos\varphi\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi + 2\rho^2\sin^2\varphi)\rho d\rho =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{2\rho^5}{5}\cos\varphi\sin^2\varphi + \frac{\rho^4}{4}(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi)\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} d\varphi =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{8\sqrt{2}}{5}\cos\varphi\sin^2\varphi + 1 + \sin^2\varphi\right)d\varphi = -\int_0^{2\pi} (2 + \sin^2\varphi)d\varphi =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left(2 + \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi = -\frac{5\varphi}{2}\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\Bigg|_0^{2\pi} = -5\pi.$$

Ответ: -5π.

Задания

Задание 2.2. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

1) $\iint\limits_{\sigma} yzdydz + xzdzdx + xydxdy;$ σ - внешняя сторона поверхности тетраэдра, ограниченного плоскостями $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = a$.

2) $\iint\limits_{\sigma} \left(y^2 + z^2\right)dxdy;$ σ - внешняя сторона части поверхности $z = \sqrt{9 - x^2}$, отсеченной плоскостями $y = 0;\ y = 2$.

3) $\iint\limits_{\sigma}\left(x^2+z^2+3y^2\right)dxdz;$ σ - внешняя сторона части поверхности $y=\sqrt{x^2+z^2}$, отсеченной плоскостями $y=0;\quad y=1$.

4) $\iint\limits_{\sigma}(2x+3y+4z)dxdy,\sigma$ - верхняя сторона плоскости $x+y+z-6=0$, вырезанная цилиндром $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

5) $\iint\limits_{\sigma}\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}\right)dydz;$ σ - нижняя сторона поверхности $z=4-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}$, отсеченная плоскостью $z=0$.

6) $\iint\limits_{\sigma} zdydz+\left(y+z^2\right)dzdx+\left(x^2-x\right)dxdy;\sigma$ -часть поверхности $y=1+x^2+z^2$, отсеченная плоскостью $y=3$, которая видна из начала координат.

7) $\iint\limits_{\sigma}\left(2x^2+y^4+z^4\right)dydz;$ σ-внешняя сторона поверхности $x=yz\,(y\geq 0, z\geq 0)$, вырезанной цилиндром $(y^2+z^2)^2=2b^2yz$.

8) $\iint\limits_{\sigma}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdz;$ σ - внутренняя сторона части поверхности $y=b^2-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}$, отсеченной плоскостью $y=0$.

Ответы: **1.** 0; **2.**88; **3.** -32π; **4.**144π ; **5.**-96π; **6.**-5π; **7.**$\frac{1}{9}b^6$;**8.**$-\frac{\pi}{2}ab^4c$.

2.3 Поток векторного поля через поверхность. Формула Остроградского-Гаусса.

Пусть в пространственной области V задана векторная функция $\vec{a}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ и некоторая ориентированная поверхность σ .

Пусть $\vec{n}^o$ - вектор единичной нормали к заданной стороне поверхности $\vec{n}^o=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$

Определение: Потоком векторного поля $\vec{a}$ через поверхность σ называется интеграл

$$\Pi_{\sigma}(\vec{a})=\iint\limits_{\sigma}\left(\vec{a}\cdot\vec{n}^o\right)d\sigma. \qquad (2.21)$$

Свойства потока векторного поля $\vec{a}$ через поверхность σ :

§ $\prod_{\sigma^+}(\vec{a}) = \prod_{\sigma^-}(\vec{a})$, где $\sigma^{\pm}$ - положительная и отрицательная стороны поверхности σ.

§ Если σ состоит из нескольких поверхностей $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n$, то $\prod_{\sigma}(\vec{a}) = \prod_{\sigma_1}(\vec{a}) + \prod_{\sigma_2}(\vec{a}) + \dots + \prod_{\sigma_n}(\vec{a})$.

Физический смысл потока зависит от природы векторного поля $\vec{a}$:

Если $\vec{a}$ - поле скоростей несжимаемой жидкости, σ -незамкнутая поверхность с выбранным направлением нормали $\vec{n}^o$, то поток $\prod_{\sigma}(\vec{a})$ равен количеству жидкости, протекающей в единицу времени через поверхность σ. Если σ -замкнутая поверхность, ограничивающая некоторую область V, тогда $\prod_{\sigma}(\vec{a})$ - разность между количеством жидкости, которое втекает и вытекает из V через поверхность σ за единицу времени.

Если $\prod_{\sigma}(\vec{a}) > 0$, это означает, что из области V вытекает больше жидкости, чем втекает, т.е. внутри области V имеются *источники* - точки, из которых жидкость вытекает.

Если $\prod_{\sigma}(\vec{a}) < 0$, это означает, что из области V вытекает жидкости меньше жидкости, чем в нее втекает, т.е. внутри области V имеются *стоки* - точки в которые жидкость втекает.

В случае $\prod_{\sigma}(\vec{a}) = 0$ количество жидкости вытекшей из V равно количеству жидкости втекшей в V.

Если $\vec{a}$ - силовое поле, то говорят, что $\prod_{\sigma}(\vec{a})$ выражает количество силовых (векторных) линий, пронизывающих в единицу времени поверхность σ в направлении нормали $\vec{n}$. Если σ - замкнутая поверхность, то $\prod_{\sigma}(\vec{a})$ равен разности числа векторных линий входящих и выходящих из области G, ограниченной поверхностью σ. Как и в случае с жидкостью, $\prod_{\sigma}(\vec{a}) > 0$ означает, что в области G имеются источники, $\prod_{\sigma}(\vec{a}) < 0$ означает, что в G есть стоки.

Вычисление потока векторного поля $\vec{a}$ через поверхность σ.

Сравнивая формулу (2.21) с (2.17) видим, что вычисление потока векторного поля $\vec{a}$ через поверхность σ состоит в вычислении соответствующего поверхностного интеграла второго рода:

$$\prod_{\sigma}(\vec{a}) = \iint_{\sigma} (\vec{a}\vec{n}^o) d\sigma = \iint_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) d\sigma = \\ = \iint_{\sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy. \qquad (2.22)$$

В случае, если σ - часть цилиндрической поверхности $x^2+y^2=a^2$, ограниченная поверхностями $z=z_1(x,y)$ и $z=z_2(x,y)$ $(z_1(x,y)\le z_2(x,y))$, то поток векторного поля $\vec{a}$ через σ удобно вычислять, переходя к цилиндрическим координатам:

$$\prod_{\sigma}(\vec{a})=\pm\int_{0}^{2\pi}d\varphi\int_{z_1(a\cos\varphi,a\sin\varphi)}^{z_2(a\cos\varphi,a\sin\varphi)}(xP+yQ)\Big|_{\substack{x=a\cos\varphi\\ y=a\sin\varphi\\ z=z}}dz\,. \qquad (2.23)$$

В случае, если σ - часть сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, ограниченная коническими поверхностями $\theta=\theta_1(\varphi)$ и $\theta=\theta_2(\varphi)$ $(\theta_1(\varphi)\le\theta_2(\varphi))$ и полуплоскостями $\varphi=\varphi_1$ и $\varphi=\varphi_2$ $(\varphi_1<\varphi_2)$, поток $\prod_{\sigma}(\vec{a})$ удобно вычислять, используя сферические координаты:

$$\prod_{\sigma}(\vec{a})=\pm a\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)}(xP+yQ+zR)\Big|_{\substack{x=a\cos\varphi\sin\theta\\ y=a\sin\varphi\sin\theta\\ z=a\cos\theta}}\sin\theta d\theta\,. \qquad (2.24)$$

Если компоненты поля $\vec{a}$ - функции P,Q,R имеют частные производные в каждой точке $M(x,y,z)\in V$ по x,y,z соответственно, ограниченной кусочно-гладкой поверхностью σ, то справедлива формула:

$$\oint\!\!\!\oint_{\sigma}\left(\vec{a}\cdot\vec{n}^{o}\right)d\sigma=\iiint_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz\,. \qquad (2.25)$$

Формула (2.25) называется формулой Остроградского-Гаусса.

Учитывая, что поверхностный интеграл, стоящий в левой части (2.25) равен потоку векторного поля $\vec{a}$ через поверхность σ в направлении внешней нормали, а подинтегральное выражение, входящее в тройной интеграл, стоящий в правой части (2.25) - равно дивергенции поля $\vec{a}$:

$$div\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\,, \qquad (2.26)$$

формула Остроградского-Гаусса может быть записана в следующей векторной форме:

$$\prod_{\sigma}(\vec{a})=\iiint_{V}div\vec{a}\,dxdydz\,, \qquad (2.27)$$

т.е. поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность σ во внешнюю ее сторону численно равен тройному интегралу от дивергенции поля $\vec{a}$ по области V, ограниченной поверхностью σ.

<u>*Пример 20.*</u> Вычислить поток векторного поля $\vec{a}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ через нижнюю сторону плоского треугольника с вершинами в точках $A(2;0;0)$ $B(0;2;0)$ $C(0;0;2)$

Решение: Изобразим треугольник ABC и его проекцию D_{xy} на плоскость xOy (рис.23)

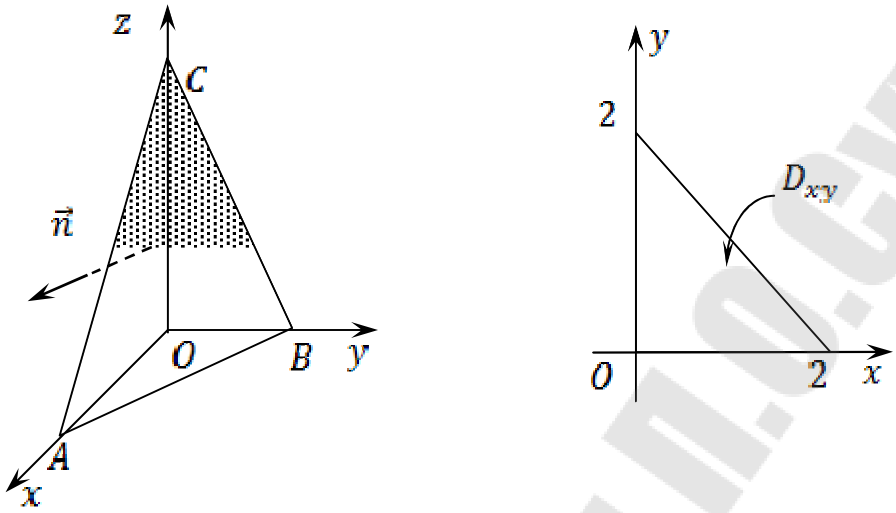


Рис. 23

Поток поля $\vec{a}$ через нижнюю сторону ΔABC равен, согласно (2.21)

$$\prod_{ABC}(\vec{a}) = -\iint_{ABC} \left(\vec{a} \cdot \vec{n}^{o}\right) d\sigma ,$$

ΔABC принадлежит плоскости: $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{2} = 1$, ограниченной плоскостями $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$

Для вычисления поверхностного интеграла воспользуемся формулой (2.17). Для этого выразим z из уравнения поверхности: $z = 2 - x - y$. Тогда $\vec{n} = \{1;1;1\}$, следовательно

$$\prod_{ABC}(\vec{a}) = -\iint_{D_{xy}} (y \cdot 1 + z \cdot 1 + x \cdot 1)\Big|_{z=2-x-y} dxdy =$$

$$= -\iint_{D_{xy}} (y + 2 - x - y + x)dxdy = -2\iint_{D_{xy}} dxdy = -2\int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy =$$

$$= -2\int_0^2 (2 - x)dx = -2\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = -2(4-2) = -4.$$

Ответ: $\prod_{ABC}(\vec{a}) = -4$.

Пример 21. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} + x\vec{j} - z^2 \cos y \vec{k}$ через внешнюю сторону части цилиндра $x^2 + y^2 = 4$, которая лежит в третьем октанте и ограничена плоскостями $z = 0$ и $x + y + z = 4$.

Решение: Для вычисления потока перейдем к цилиндрическим координатам:

$$x = 2\cos\varphi\,,$$
$$y = 2\sin\varphi\,,$$
$$z = z\,.$$

По условию: $\varphi \in \left[\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right]$, $\quad z_1 = 0, \quad z_2 = 4 - x - y; \vec{n} = \{0,1,0\}$.

Поток вычислим по формуле (2.23) (взяв знак «+» перед интегралом).

$$\prod\nolimits_{\sigma}(\vec{a}) = \int_{\pi}^{3\pi/2} d\varphi \int_{0}^{4-x-y} (xy + yx)\Big|_{\substack{x=2\cos\varphi \\ y=2\sin\varphi \\ z=z}} dz =$$

$$= \int_{\pi}^{3\pi/2} d\varphi \int_{0}^{4-2\cos\varphi-2\sin\varphi} 2\cdot 4\cos\varphi\sin\varphi\, dz =$$

$$= 8\int_{\pi}^{3\pi/2} \cos\varphi\sin\varphi\, z\Big|_0^{4-2\cos\varphi-2\sin\varphi} d\varphi =$$

$$= 16\int_{\pi}^{3\pi/2} (\sin 2\varphi - \sin\varphi\, cos^2\varphi - \cos\varphi\, sin^2\varphi)d\varphi = 8\int_{\pi}^{3\pi/2} \sin 2\varphi\, d(2\varphi) +$$

$$+16\int_{\pi}^{3\pi/2} cos^2\varphi d(\cos\varphi) - 16\int_{\pi}^{3\pi/2} sin^2\varphi d(\sin\varphi) =$$

$$= -8\cos 2\varphi\Big|_{\pi}^{3\pi/2} + 16\frac{cos^3\varphi}{3}\Bigg|_{\pi}^{3\pi/2} - 16\frac{sin^3\varphi}{3}\Bigg|_{\pi}^{3\pi/2} =$$

$$= -8(-1-1) + \frac{16}{3}(0+1) - \frac{16}{3}(-1-0) = 16 + \frac{32}{3} = \frac{80}{3}.$$

Ответ: $\prod_{\sigma}(\vec{a}) = \dfrac{80}{3}$.

<u>Пример 22.</u> Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = \left(z^2 - y^2\right)\vec{i} + \left(x^2 y - z^2\right)\vec{j} + \left(zy^2 - x^2\right)\vec{k}$ через замкнутую поверхность σ : $\left\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2; \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$ в направлении внешней нормали.

<u>Решение</u>: Найдем заданный поток с помощью формулы Остроградского-Гаусса (2.27).

$$div\,\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(z^2 - y^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 y - z^2\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(zy^2 - x^2\right) = x^2 + y^2 .$$

Искомый поток равен:

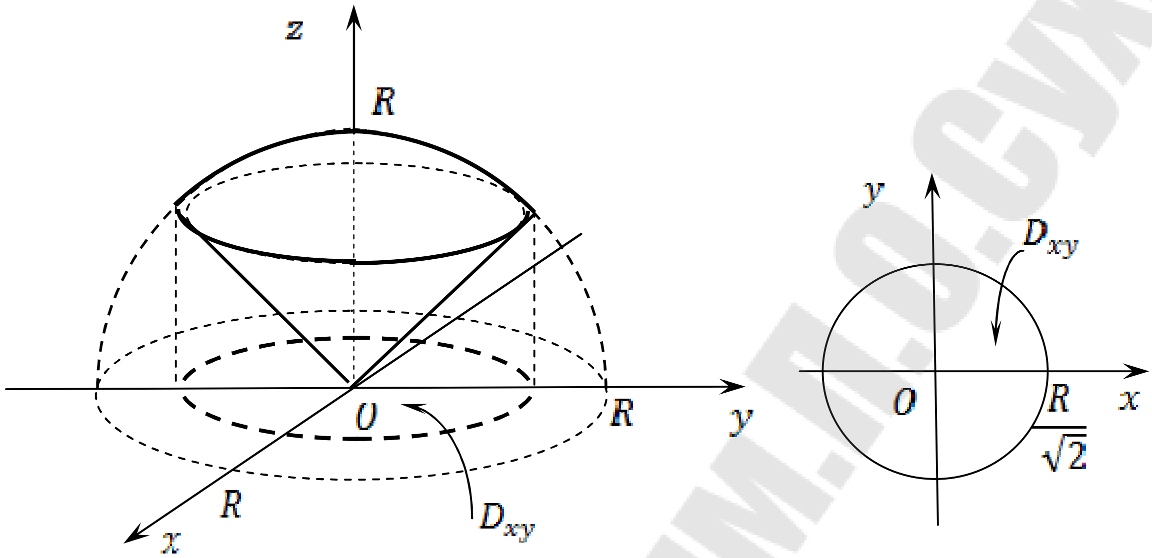


Рис. 24

$$\Pi_\sigma(\vec{a}) = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right)dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \left(x^2 + y^2\right)dz =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \left(x^2 + y^2\right)\left(\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}\right)dxdy.$$

Подставляя уравнение конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в уравнение сферы, получаем: $2\left(x^2 + y^2\right) = R^2$, следовательно, D_{xy}- круг $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{2}$. Для вычисления полученного двойного интеграла перейдем к полярным координатам. Тогда

$$\Pi_\sigma(\vec{a}) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R/\sqrt{2}} \rho^2\left(\sqrt{R^2 - \rho^2} - \rho\right)\rho d\rho =$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^{R/\sqrt{2}} \rho^2\sqrt{R^2 - \rho^2}\,d(\rho^2) - \int\limits_0^{R/\sqrt{2}} \rho^4 d\rho\right) = \left\{\begin{matrix} R^2 - \rho^2 = t^2, \rho^2 = R^2 - t^2, \\ d(\rho^2) - -2tdt, \\ t_н = R, t_в = \frac{R}{\sqrt{2}} \end{matrix}\right\} =$$

$$= 2\pi\left(\int\limits_{R/\sqrt{2}}^{R}(R^2-t^2)t^2dt-\frac{\rho^5}{5}\bigg|_0^{R/\sqrt{2}}\right)=2\pi\left(\left(\frac{R^2t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)\bigg|_{R/\sqrt{2}}^{R}-\frac{R^5}{20\sqrt{2}}\right)=$$

$$=\pi R^5\frac{8-5\sqrt{2}}{30}.$$

Ответ: $\prod_\sigma(\vec{a})=\pi R^5\frac{8-5\sqrt{2}}{30}$.

Задания

<u>*Задание 2.3*</u> Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью (p) и координатными плоскостями, двумя способами:

а) использовав определенные потока;

б) с помощью формулы Остроградского-Гаусса.

1) $a(M)=(y+z)\vec{i}+(2x-z)\vec{j}+(y+3z)\vec{k};(p):2x+y+3z=6$

2) $a(M)=z\vec{i}+(x+y)\vec{j}+y\vec{k};(p):2x+y+2z=2.$

3) $a(M)=(x+z)\vec{i}+z\vec{j}+(2x-y)\vec{k};(p):3x+2y+z=6.$

4) $a(M)=(2y-z)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+y\vec{k};(p):x+3y+2z=6.$

<u>*Задание 8.2.*</u> С помощью формулы Гаусса-Остроградского вычислить следующие поверхностные интегралы.

5) $\iint\limits_\sigma x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, где σ - внешняя сторона поверхности куба $0\le x\le a; 0\le y\le a; 0\le z\le a.$

6) $\iint\limits_\sigma xdydz+ydzdx+zdxdy$, где σ - наружная сторона пирамиды, ограниченной поверхностями $x+y+z=a; x=0; y=0; z=0.$

7) $\iint\limits_\sigma x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$, σ - внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

8) $\iint\limits_\sigma x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$; σ - полная поверхность конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0 \quad (0\le z\le b).$

Ответы: **1.** 18; **2.**$\frac{1}{3}$; **3.** 6; **4.**12; **5.**$3a^4$; **6.**$\frac{1}{2}a^3$; **7.**$\frac{12}{5}\pi R^5$;**8.**$\frac{\pi}{2}a^2b^2$.

2.4 Циркуляция векторного поля. Формула Стокса.

Пусть в области V задано векторное поле $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ и ориентированная гладка кривая L.

Линейным интегралом векторного поля $\vec{a}$ вдоль линии L называется интеграл вида:

$$W = \int_L \left(\vec{a} \cdot \vec{dr} \right), \tag{2.28}$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор точки, $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$. Тогда интеграл (2.28) может быть записан в виде

$$W = \int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \; . \tag{2.29}$$

Если $\vec{a}$ - силовое поле, то линейный интеграл (2.28) равен работе, которую поле совершает при перемещении вдоль ориентированной линии L.

Пусть поле $\vec{a}$ - произвольное векторное поле, а L- замкнутая линия.

Циркуляцией векторного поля $\vec{a}$ вдоль замкнутого контура L называется линейный интеграл от поля $\vec{a}$ по контуру L, проходимому в положительном направлении:

$$Ц_L(\vec{a}) = \oint_{L^+} (\vec{a}d\vec{r}) = \oint_{L^+} Pdx + Qdy + Rdz \; . \tag{2.30}$$

Циркуляция векторного поля характеризует вращательную способность поля на линии. Принято считать, что если $Ц_L(\vec{a}) > 0$, то линия L, расположенная в поле силы $\vec{a}$, вращается под действием силы $\vec{a}$ в положительном направлении. Соответственно, при $Ц_L(\vec{a}) < 0$, вращение происходит в отрицательном направлении. В случае, когда $Ц_L(\vec{a}) = 0$, линия L не вращается. Из (2.30) видно, что вычисление циркуляции поля $\vec{a}$ по контуру L сводится к вычислению соответствующего криволинейного интеграла второго рода. Однако, в большинстве случаев вычисление криволинейного интеграла (2.29) весьма громоздко. Вычисление в ряде случаев заметно упрощается, если воспользоваться формулой Стокса:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\sigma \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\cos\gamma \right) d\sigma , \tag{2.31}$$

где σ - любая незамкнутая поверхность, опирающаяся на контур L. Ориентация σ должна быть согласована с направлением обхода L, таким образом, что на выбранной стороне σ вектор нормали $\vec{n}$ направлен так, что при наблюдении с его конца, обход контура L происходит против часовой стрелки.

Учитывая, что ротор вектора $\vec{a}$ определяется следующим образом:

$$rot\,\vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}, \quad (2.32)$$

формула 9.4. может быть записана в более компактном виде:

$$\oint_L \left(\vec{a}d\vec{r}\right) = \iint_\sigma \left(rot\,\vec{a}\cdot\vec{n}\right)d\sigma. \quad (2.33)$$

Интеграл, стоящий в правой части (2.33) представляет собой, согласно (2.21) поток вектора $rot\,\vec{a}$ через поверхность σ в направлении нормали $\vec{n}^o$. Таким образом справедливо утверждение:

Циркуляция векторного поля $\vec{a}$ вдоль замкнутого контура L численно равна потоку вектора $rot\,\vec{a}$, через ориентированную поверхность σ, опирающуюся на контур L.

Следует отметить, что от поверхности σ требуется, чтобы она опиралась на контур L и только, поэтому, при практических расчетах удобно выбирать σ наиболее простого вида, например, если возможно, то плоскость.

При вычислении потока в (2.33) можно использовать формулы (2.17)-(2.19), заменив в них $\vec{a}$ на $rot\,\vec{a}$.

При вычислении $rot\,\vec{a}$ удобно пользоваться символической формой записи для $rot\,\vec{a}$:

$$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \quad (2.34)$$

Если векторное поле $\vec{a}$ - плоское, т.е. $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j}$, то формула Стокса превращается в формулу Грина (1.31).

<u>*Пример 43.*</u> Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = (x-y)\vec{i} + (y-z)\vec{j} + (z-x)\vec{k}$ вдоль контура L, состоящего из части винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = \dfrac{bt}{2\pi}$ от точки $A(a;0;0)$ до точки $B(a;0;b)$ и отрезка прямой BA.

Решение. Согласно (2.30) $Ц_L(\vec{a}) = \int\limits_L (x-y)dx + (y-z)dy + (z-x)dz$.

L состоит из двух частей, поэтому

$$Ц_L(\vec{a}) = \int\limits_{\substack{x=a\cos t\\ y=a\sin t\\ z=\frac{bt}{2\pi}}} (x-y)dx + (y-z)dy + (z-x)dz +$$

$$+ \int\limits_{BA} (x-y)dx + (y-z)dy + (z-x)dz = I_1 + I_2.$$

Вычислим I_1. Для этого найдем: $x' = -a\sin t$, $y' = a\cos t$, $z' = \dfrac{b}{2\pi}$.

Из условия следует, что $t \in [0;2\pi]$, поэтому, согласно (1.28)

$$I_1 = \int\limits_0^{2\pi} \left\{ (a\cos t - a\sin t)(-a\sin t) + \left(a\sin t - \frac{bt}{2\pi}\right) a\cos t + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{bt}{2\pi} - a\cos t\right)\frac{b}{2\pi} \right\} dt = \int\limits_0^{2\pi} \left\{ a^2\sin^2 t - \frac{bt}{2\pi} a\cos t + \right.$$

$$\left. + \frac{b^2}{(2\pi)^2} t - \frac{ab}{2\pi}\cos t \right\} dt = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi} (1-\cos 2t)dt - \frac{ab}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} t\cos t dt +$$

$$+ \frac{b^2}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi} t dt - \frac{ab}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos t dt = \frac{a^2}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{ab}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} t\cos t dt +$$

$$+ \frac{b^2}{(2\pi)^2}\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{ab}{2\pi}\sin t\Big|_0^{2\pi} = \left\{ \begin{array}{c|c} u = t & du = dt \\ d\upsilon = \cos t dt & \upsilon = \sin t \end{array} \right\} = a^2\pi + \frac{b^2}{2} -$$

$$- \frac{ab}{2\pi}\left[t\sin t\Big|_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi}\sin t dt \right] = a^2\pi + \frac{b^2}{2} - \frac{ab}{2\pi}\cos t\Bigg|_0^{2\pi} = a^2\pi + \frac{b^2}{2}.$$

Вычислим I_2. Найдем уравнение прямой BA:

$$\frac{x-a}{a-a} = \frac{y-0}{0-0} = \frac{z-b}{0-b} \qquad \frac{x-a}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z-b}{b} = t, \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} x = a \\ y = 0 \\ z = b - bt \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \\ z' = -b \end{cases} \quad \begin{matrix} t_B = 1 \\ t_A = 0, \end{matrix}$$ таким образом:

$$I_2 = \int_1^0 -b(b - bt - a)dt = -b\left[(b-a)t - \frac{bt^2}{2}\right]\Bigg|_1^0 =$$

$$= b\left[b - a - \frac{b}{2}\right] = \frac{b}{2}(b - 2a).$$

Складывая I_1 и I_2 окончательно получаем: $Ц_L(\vec{a}) = \pi a^2 + b^2 - ab$.

Ответ: $Ц_L(\vec{a}) = \pi a^2 + b^2 - ab$.

Пример 44. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = (z^3 + 2y^3 + 3y)\vec{i} + (y^3 - 2x^3 - xz^2)\vec{j} + (z^2 - 5xy^2)\vec{k}$ вдоль контура L, являющегося пересечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Вычисление провести непосредственно и с помощью формулы Стокса.

Решение: Найдем явный вид контура L:

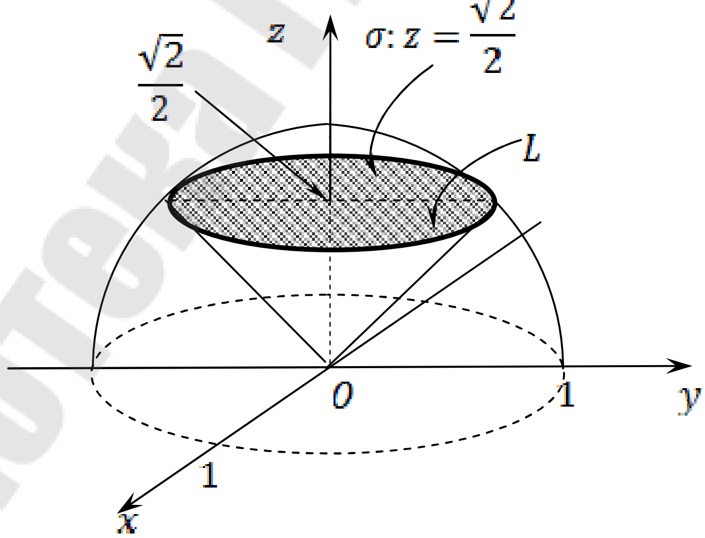


Рис. 25

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ \sqrt{x^2+y^2}=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+\left(x^2+y^2\right)=1 \\ z^2+z^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{1}{2} \\ z=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Таким образом видно, что L- окружность радиуса $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, лежащая в плоскости $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Непосредственное вычисление.

$$Ц_L=\oint\limits_L\left(z^3+2y^3+3y\right)dx+\left(y^3-2x^3-xz^2\right)dy+\left(z^2-5xy^2\right)dz.$$

Запишем параметрические уравнения L:

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t,\quad y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t,\quad z=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad t\in[0;2\pi]$$

Тогда $x'=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin t,\quad y'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t,\quad z'=0.$

Таким образом,

$$Ц_L\left(\vec{a}\right)=\int\limits_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin^3 t+\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin t\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\sin^3 t-\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\sqrt{2}}{2}\cos^3 t-\frac{\sqrt{2}}{4}\cos t\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{5\sqrt{2}}{4}\cos t\sin^2 t\right)\cdot 0\right]dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{4}\sin t-\frac{1}{2}\sin^4 t-\frac{3}{2}\sin^2 t+\frac{1}{4}\sin^3 t\cos t-\frac{1}{2}\cos^4 t-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\cos^2 t\right]dt=\int\limits_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{4}\sin t-\frac{1}{2}\left(\sin^4 t+\cos^4 t\right)-\frac{3}{2}\sin^2 t-\frac{1}{4}\cos^2 t+\right.$$

$$+\frac{1}{4}\sin^3 t\cos t\Big]dt = \frac{1}{4}\cos t\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[\Big(\frac{1-\cos 2t}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{1+\cos 2t}{2}\Big)^2 +$$

$$+\frac{3}{2}(1-\cos 2t)+\frac{1}{4}(1+\cos 2t)\Big]dt+\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^3 t\,d(\sin t) = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2t+$$

$$+\frac{1}{4}\cos^2 2t+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{4}\cos^2 2t+\frac{7}{4}-\frac{5}{4}\cos 2t\Big]dt+$$

$$+\frac{1}{16}\sin^4 t\Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[\frac{9}{4}-\frac{5}{4}\cos 2t+\frac{1}{2}\frac{1}{2}(1+\cos 4t)\Big]dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\Big[\frac{9}{4}t-\frac{5}{8}\sin 2t+\frac{1}{4}t+\frac{1}{16}\sin 4t\Big]\Big|_0^{2\pi} = -\frac{5}{2}\pi.$$

Вычисление по формуле Стокса.

В качестве поверхности, которая опирается на заданный контур L выберем часть плоскости $z=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ограниченной окружностью $x^2+y^2=\frac{1}{2}$. Нормаль $\vec{n}^o=\{0;0;1\}$. Проекцией σ на xOy является круг.

По формуле Стокса:

$$Ц_L(\vec{a}) = \iint_\sigma \left(rot\,\vec{a}\cdot\vec{n}_0\right)d\sigma = \iint_\sigma \left(rot\,\vec{a}\right)_z dxdy,$$

$$\left(rot\,\vec{a}\right)_z = \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^3-2x^3-xz^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(z^3+2y^3+3y\right)=$$

$$=-6x^2-z^2-6y^2-3,$$

таким образом,

$$Ц_L(\vec{a}) = \iint_\sigma\left(-6x^2-z^2-6y^2-3\right)dxdy = -\iint_{D_{xy}}\left(6\left(x^2+y^2\right)+\frac{1}{2}+3\right)dxdy,$$

D_{xy} есть проекция σ на плоскость xOy - круг $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}$.

Вычислим получившийся двойной интеграл, переходя к полярным координатам:

$$Ц_L(\vec{a}) = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(6\rho^2 + \frac{7}{2}\right)\rho d\rho = -\int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{3}{2}\rho^4 + \frac{7}{4}\rho^2\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= -2\pi\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{7}{4}\cdot\frac{1}{2}\right) = -\frac{5\pi}{2}.$$

Ответ: $Ц_L(\vec{a}) = \dfrac{-5\pi}{2}$.

Задания

Задание 2.4. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по замкнутому контуру L двумя способами: а) использовав определение циркуляции; б) с помощью формулы Стокса.

1) $\vec{a}(M) = (2y - 3xz^2)\vec{i} - (2xz - 3y^2)\vec{j} + (y^2 - 3x^2)\vec{k}$, L – контур треугольника с вершинами $A(0,0,2)$, $B(0,1,2)$, $C(3,0,2)$.

2) $\vec{a}(M) = 3x\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (y+z)\vec{k}$, L – контур треугольника , полученного пересечением плоскости (p): $x + 3y + z = 3$ с координатными плоскостями.

3) $\vec{a}(M) = x\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (y+z)\vec{k}$, L – контур треугольника с вершинами $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$.

4) $\vec{a}(M) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$, L –кривая, заданная параметрическими уравнениями $x = Rcos^2 t$, $y = \frac{R}{\sqrt{2}}\sin 2t$, $z = Rsin^2 t$.

Задание 2.5. Применяя формулу Стокса, найти данный интегралы.

5) $\oint_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$, C- контур, полученный пересечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и плоскости $x + y + z = 0$.

6) $\oint_C (3z^2 - y^3)dx + (x^3 - 2y^2z^2)dy + (2xyz - x^2y^2)dz$, C- контур, полученный пересечением цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ и плоскости $2x + z = 4$.

7) $\oint_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$, C- эллипс, полученный пересечением цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ и плоскости $x + z = 1$.

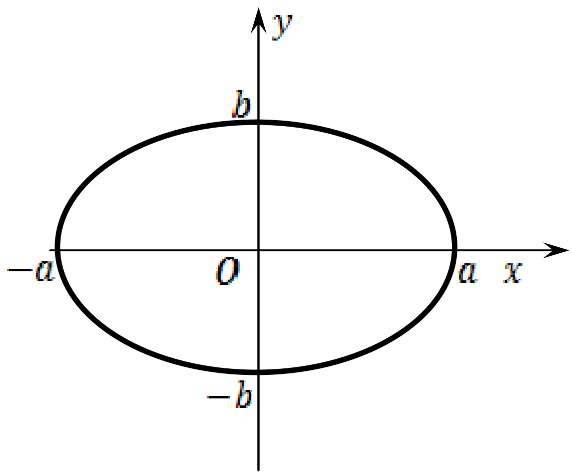
8) $\oint\limits_C y^2dx + z^2dy + x^2dz$, C - контур треугольника ABC с вершинами $A(a;0;0)$, $B(0;a;0)$, $C(0;0;a)$.

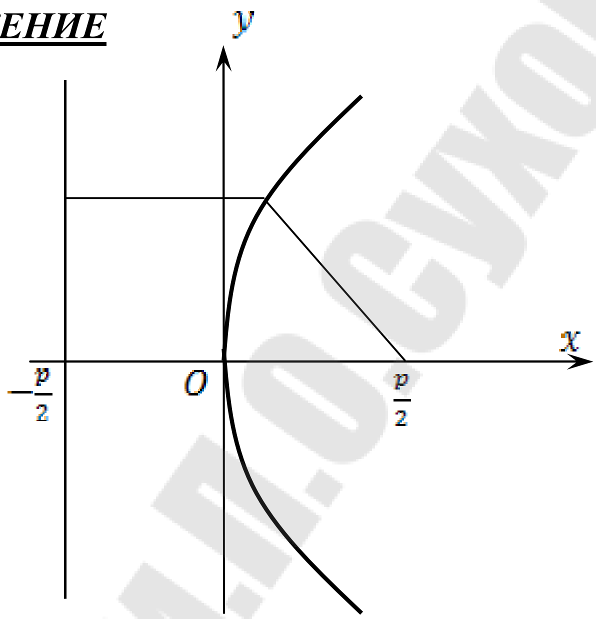
Ответы: **1.** -9; **2.** -6; **3.** $\frac{3}{2}$; **4.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}\pi R^2$; **5.** 0; **6.** 120π; **7.** 4π; **8.** $-a^3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.2. М.: Наука, 1968,1970,1978, 1985
2. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1989
3. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов. Под ред. Демидовича Б.П. М.: Наука, 1972
4. Сборник индивидуальных задач по ВМ, уч.пособие в 3-х частях под ред. Рябушко А.П. Мн.: Выш.шк, 1991
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики,т.2. М.: Наука, 1974
6. Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике, т. 2, Мн.: Высш.шк., 1988

ПРИЛОЖЕНИЕ



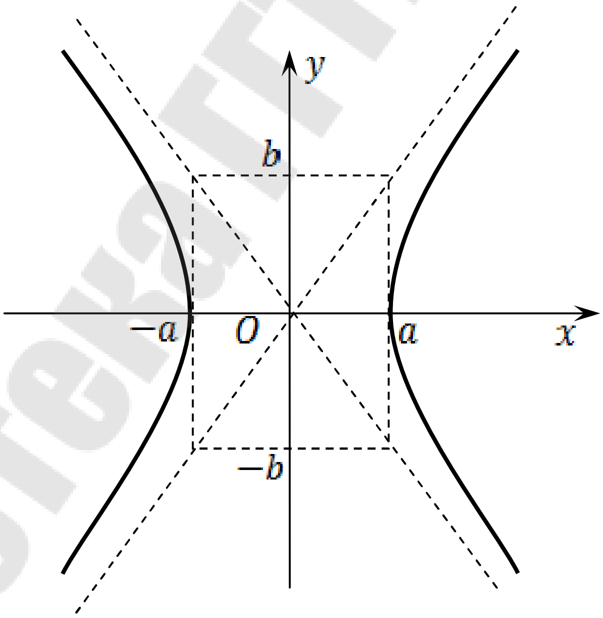


Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

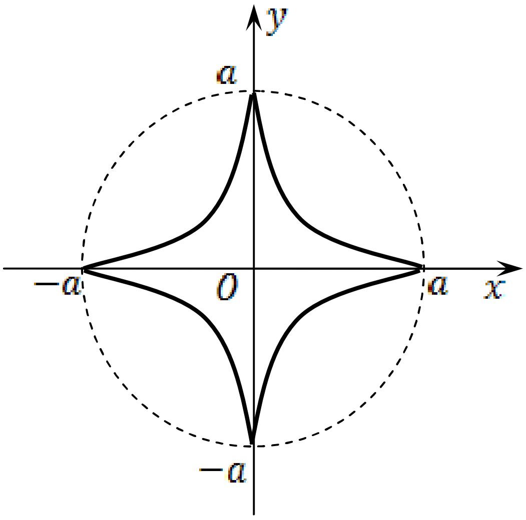
Парабола

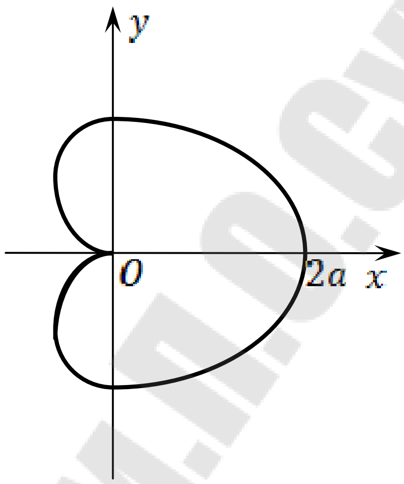
$$y^2 = 2px$$



Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = a\,cht \\ y = b\,sht \end{cases} \quad \text{(для правой ветви)}$$



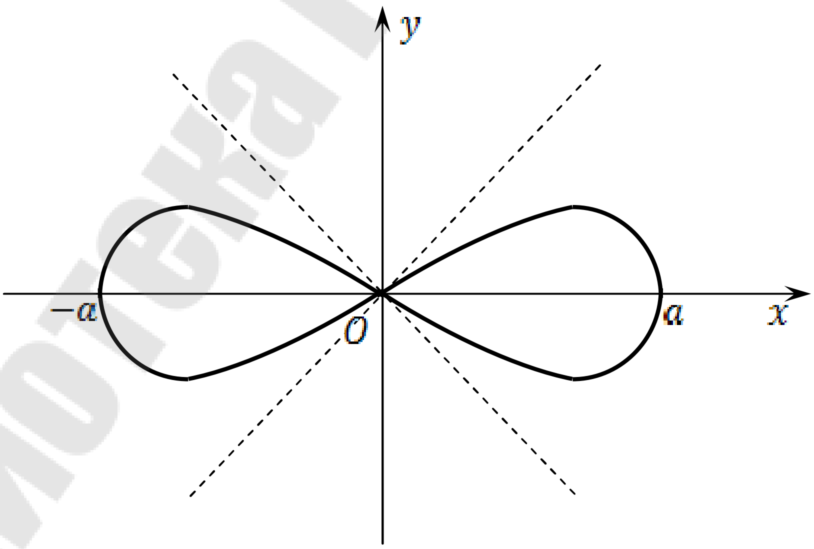


Гипоциклоида (астроида)

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad \text{или} \quad x^{3/2} + y^{3/2} = a^{3/2}$$

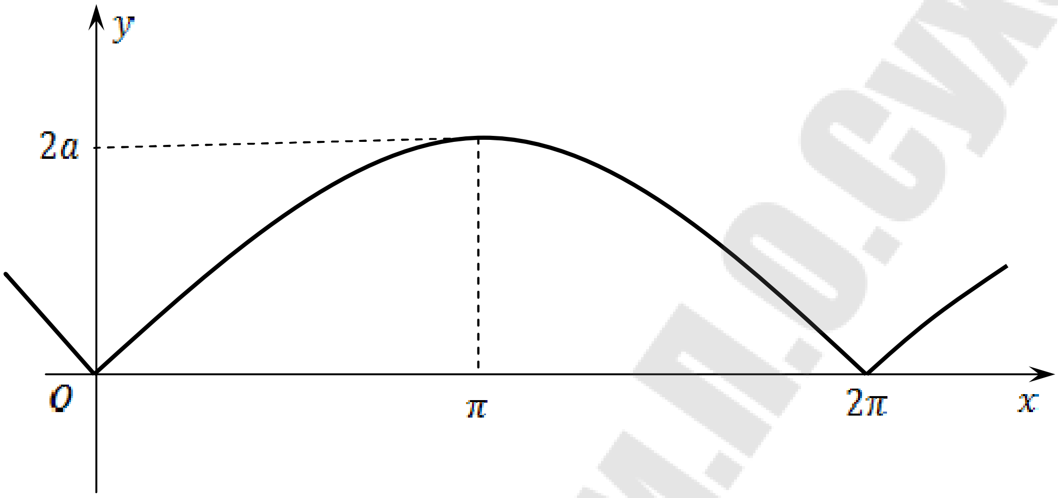
Кардиоида

$$r = a(1+\cos\varphi)$$



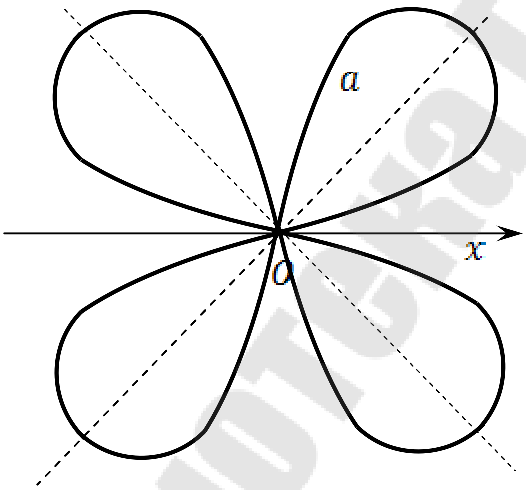
Лемниската Бернулли

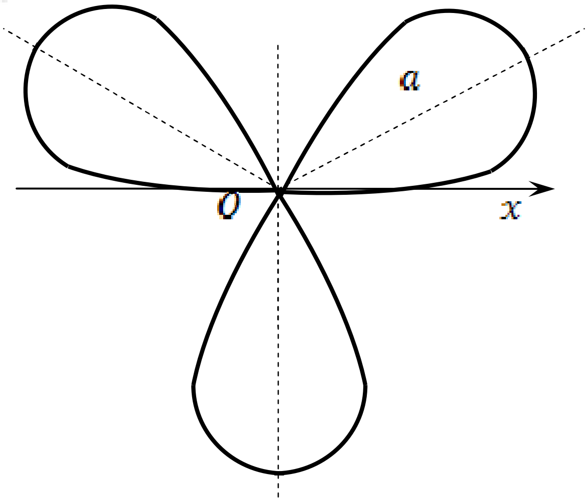
$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad \text{или} \quad r^2 = a^2 \cos 2\varphi.$$



Циклоида

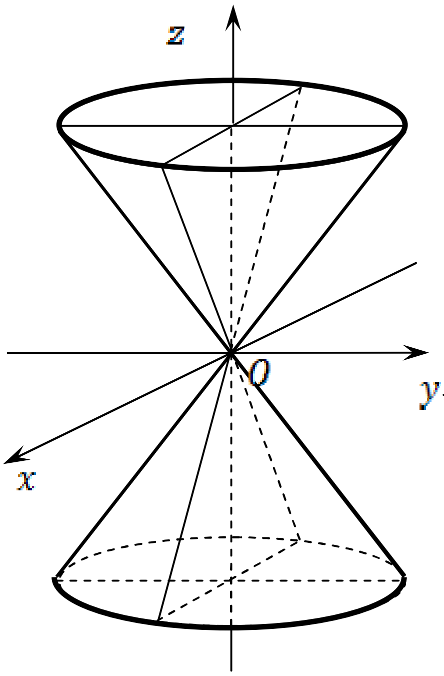
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$





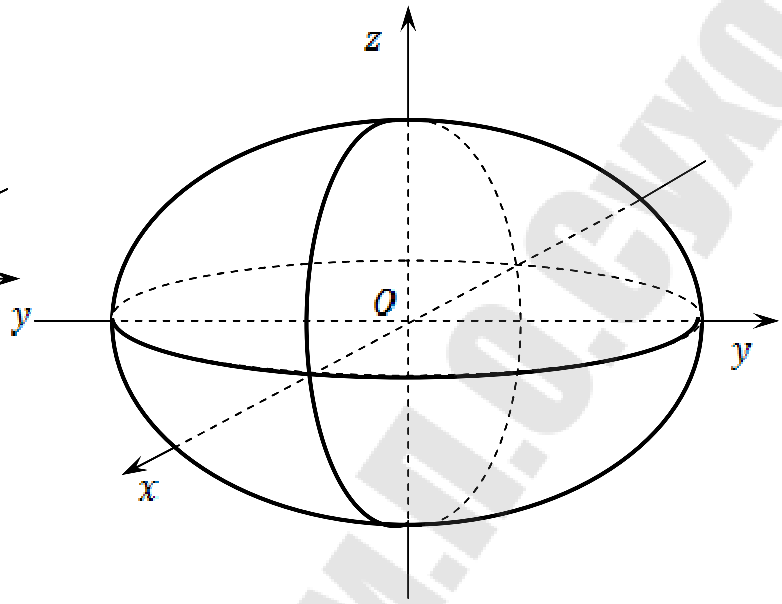
Четырехлепестковая роза ***Трехлепестковая роза***

$r = a\,|\sin 2\varphi\,|$ $r = a \sin 3\varphi$



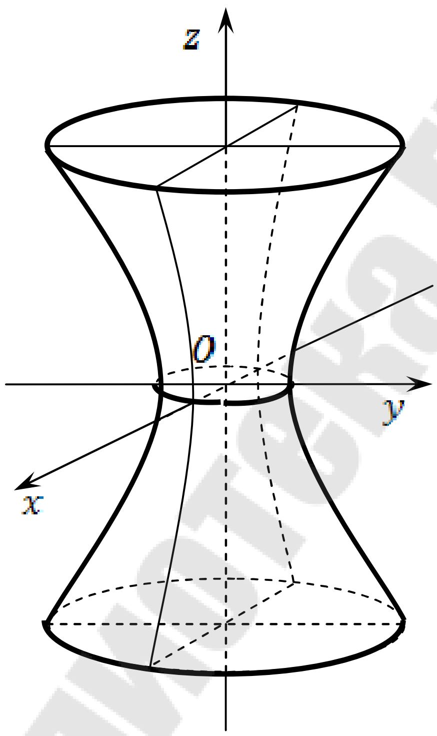
Конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$



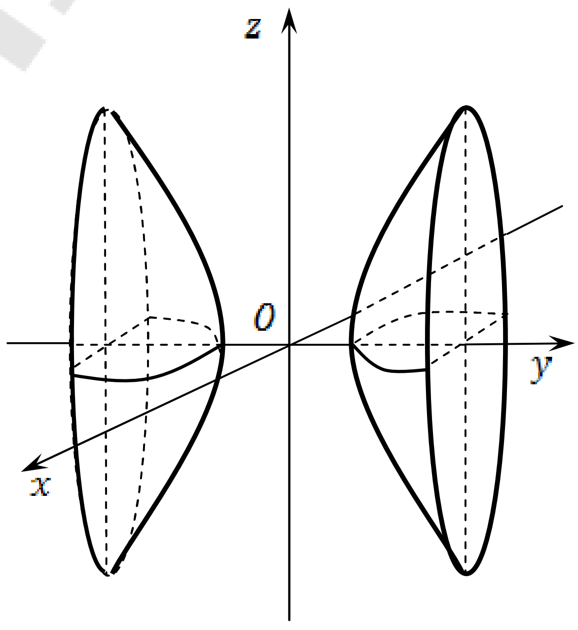
Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



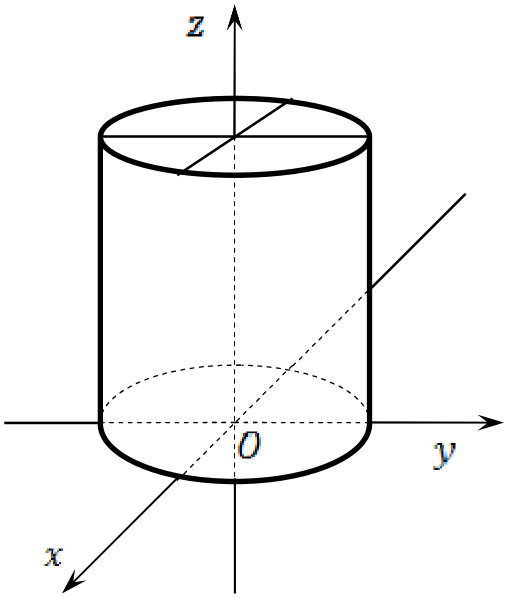
Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



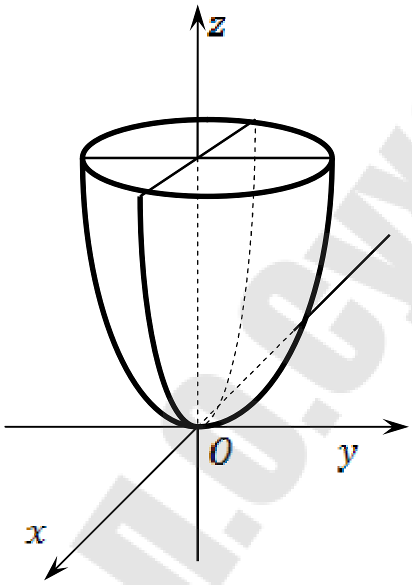
Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



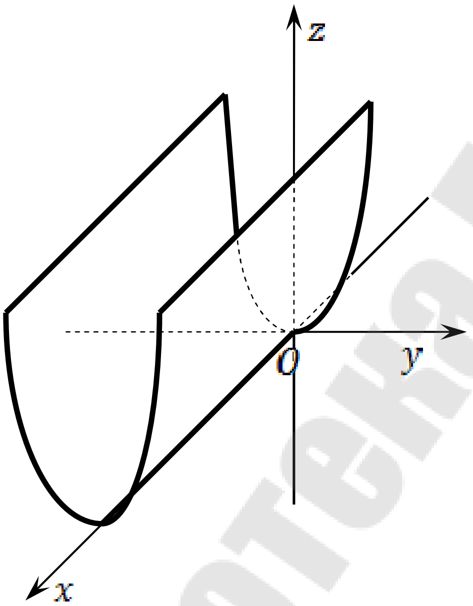
Цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



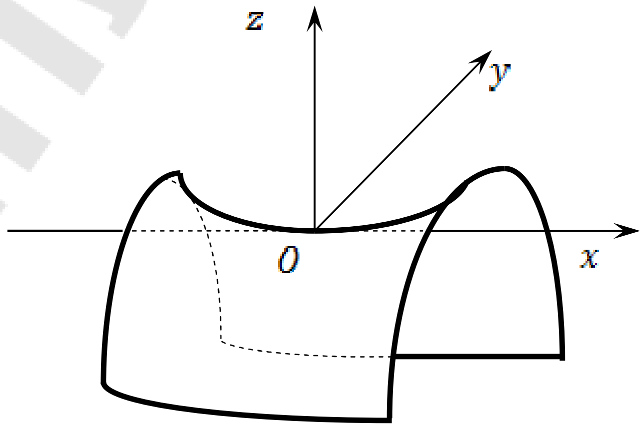
Параболоид

$$x^2+y^2=2pz$$



Параболический цилиндр

$$z=ay^2$$



Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

Авакян Сергей Левонович
Авакян Елена Зиновьевна

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Практикум по выполнению домашних заданий по курсу «Высшая математика» для студентов дневной формы обучения

Подписано в печать 22.10.09.
Формат 60x84/$_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Ризография. Усл. печ. л. 3,72. Уч.-изд. л. 3,32
Тираж 600 экз. Заказ /31.

Отпечатано на цифровом дупликаторе
с макета оригинала авторского для внутреннего использования.
Учреждение образования «Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого».
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.