Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

С. Л. Авакян, Е. З. Авакян

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

ПРАКТИКУМ
по выполнению домашних заданий
по курсу «Высшая математика»
для студентов дневной формы обучения

Гомель 2009

УДК 517.37(075.8)
ББК 22.161.1я73
А18

Рекомендовано научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого
(*протокол № 7 от 10.03.2008 г.*)

Рецензент: зав. каф. «Физика» ГГТУ им. П. О. Сухого д-р физ.-мат. наук, проф. *П. А. Хило*

Авакян, С. Л.

А18 Кратные интегралы : практикум по выполнению домаш. заданий по курсу «Высшая математика» для студентов днев. формы обучения / С. Л. Авакян, Е. З. Авакян. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2009. – 61 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

Представлен теоретический материал по разделу «Криволинейные и поверхностные интегралы». Даны решения основных типов задач, связанных с приложениями, как геометрическими, так и физическими криволинейных и поверхностных интегралов.

Для студентов дневной формы обучения.

УДК 517.373(075.8)
ББК 22.161.1я73

1. Двойной интеграл.

1.1 Двойной интеграл и его вычисление.

Пусть в некоторой замкнутой области D плоскости xOy определена ограниченная функция $z = f(x, y)$.

Разобьем область D произвольным образом на n элементарных ячеек $D_1, D_2, \ldots, D_n$, не имеющих общих внутренних точек. Площадь i-й ячейки обозначим $\Delta\sigma_i$, а диаметр - d_i. Внутри каждой ячейки выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i)$.

Определение 1. Интегральной суммой для функции $f(x, y)$, по области D называется сумма вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i \tag{1.1}$$

Определение 2. Двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D называется предел интегральной суммы (1.1) при $d \to 0$, $d = \max\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ и обозначается

$$\iint_D f(x, y)dxdy.$$

Таким образом, согласно определению 2, справедливо равенство:

$$\lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i = \iint_D f(x, y)dxdy \tag{1.2}$$

Теорема существования двойного интеграла:

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D, то двойной интеграл существует, т.е. существует предел интегральной суммы (1.1), который не зависит от способа дробления области D на элементарные ячейки и от выбора точек $M_i(x_i, y_i)$ в них.

Свойства двойного интеграла:

- Двойной интеграл от суммы двух функций $f(x, y) + g(x, y)$ по области D равен сумме двойных интегралов от каждой из функций в отдельности:

$$\iint_D \big(f(x, y) + g(x, y)\big)dxdy = \iint_D f(x, y)dxdy + \iint_D g(x, y)dxdy \tag{1.3}$$

- Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла: если $c = \text{const}$, то

$$\iint_D cf(x,y)dxdy = c\iint_D f(x,y)dxdy \tag{1.4}$$

- Если область D разбита на две области D_1 *и* D_2, не имеющие общих внутренних точек, и функция $f(x,y)$ непрерывна во всех точках области D, то

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy \tag{1.5}$$

- Теорема о среднем. Для непрерывной функции $f(x,y)$ в области D, площадь которой S_D, всегда найдется хотя бы одна точка $\mathrm{M}(\zeta,\eta) \in D$, такая, что

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(\zeta,\eta)S_D \tag{1.6}$$

Число $f(\zeta,\eta)$ называется средним значением функции $f(x,y)$ в области D.

- Если в области D для непрерывных функций $f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y)$ выполняется неравенство

$$f_1(x,y) \le f_2(x,y) \le f_3(x,y), \text{ то}$$

$$\iint_D f_1(x,y)dxdy \le \iint_D f_2(x,y)dxdy \le \iint_D f_3(x,y)dxdy \tag{1.7}$$

- Если функция $f(x,y) \ne const$ непрерывна в области D, $M = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y), m = \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$, то

$$mS_D < \iint_D f(x,y)dxdy < MS_D \tag{1.8}$$

Вычисление двойного интеграла.

Пусть область D ограничена сверху и снизу соответственно линиями $y = \varphi_2(x)$ и $y = \varphi_1(x)$, а справа и слева прямыми $x = b$ *и* $x = a$ (рис. 1),

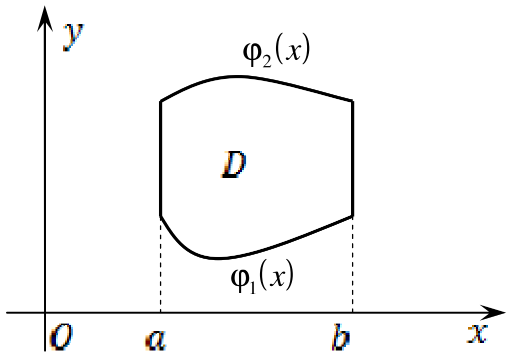


Рис. 1

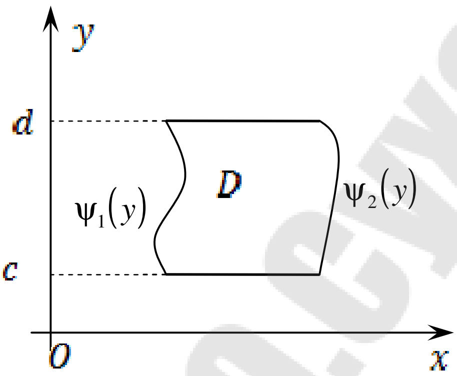


Рис. 2

причем $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x), \quad a < b$. Такую область назовем правильной в направлении Oy.

Пусть область D ограничена справа и слева линиями $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$, а снизу и сверху прямыми $y = c$ *и* $y = d$ (рис. 2), причем $\psi_1(y) \le \psi_2(y), \quad c < d$. Такую область назовем правильной в направлении Ox.

Если область D является правильной в направлении Oy, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \tag{1.9}$$

Правую часть в формуле (1.9) называют повторным или двукратным интегралом от функции $f(x,y)$. Интеграл $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ - внутренним интегралом.

Если область D является правильной в направлении Ox, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \tag{1.10}$$

Процесс расстановки пределов интегрирования для внутреннего и внешнего интегралов называется приведением двойного интеграла к повторному.

Переход от формулы (1.9) к (1.10) (или наоборот) называется изменением порядка интегрирования.

Если область D не является правильной ни в одном из направлений, то ее необходимо разбить на конечное число правильных областей $D_1, D_2, \ldots D_n$, а затем воспользоваться соответствующим свойством двойного интеграла:

Пример разбиения приведен на рис.3.

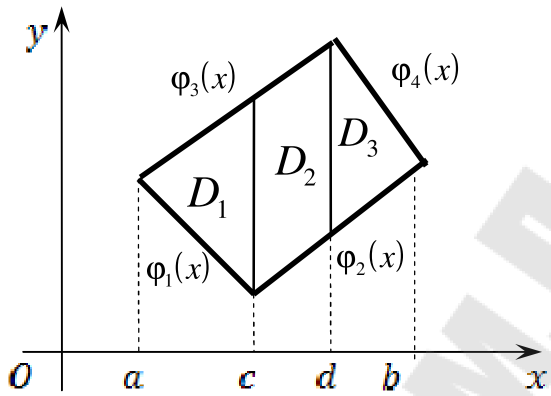


Рис. 3

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_3} f(x,y)dxdy =$$

$$\int\limits_a^c dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} f(x,y)dy + \int\limits_c^d dx \int\limits_{\varphi_2(x)}^{\varphi_3(x)} f(x,y)dy + \int\limits_d^b dx \int\limits_{\varphi_2(x)}^{\varphi_4(x)} f(x,y)dy$$

Таким образом, процесс вычисления двойного интеграла состоит из следующих этапов:

- Построить область интегрирования D.
- Выбрать порядок интегрирования. При этом следует руководствоваться либо соображениями краткости, т.е. выбрать такой порядок, при котором нет необходимости разбивать область D на части, либо соображениями простоты вычисления внутреннего интеграла. В случае необходимости произвести разбиение области D на конечное число правильных областей. Записать двойной интеграл в виде повторного.
- Вычислить внутренний интеграл. В случае (1.9) переменную x, а в случае (1.10) переменную y при интегрировании принять за постоянную величину. Результатом интегрирования в случае (1.9) будет

функция $\Phi(x)$, в случае (1.10) - функция $\Phi(y)$.Вычислить определенный интеграл по отрезку $[a;b]$ или $[c;d]$ от функции, полученной на предыдущем этапе. Результатом вычислений будет постоянное число.

Пример 1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле:

$$\int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$$

Решение: Изобразим область D, по которой производится интегрирование: слева она ограничена прямой $x=0$, справа - прямой $x=1$, снизу кубической параболой $y=x^3$, сверху параболой $y=\sqrt{x}$. Область D изображена на рисунке 4.

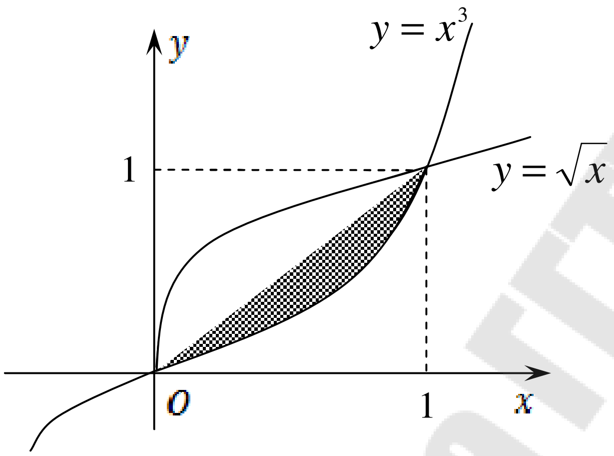


Рис. 4

Для того, чтобы изменить порядок интегрирования, запишем уравнения кривых, ограничивающих область D как функции $x(y)$.

Если $y=x^3$, то $x=y^{1/3}$

Если $y=\sqrt{x}$, то $x=y^2$.

Переменная y меняется от 0 до 1. На отрезке $[0;1]$ $y^2 < y^{1/3}$, поэтому

$$\int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y^{1/3}} f(x,y)dx.$$

Задача решена.

Пример 2. Изобразить область D и свести $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ к повторному двумя способами; D:$\{x=1;\ x=4;\ 3x-2y+4=0;\ 3x-2y-1=0\}$.

Решение: Область D приведена на рисунке 5.

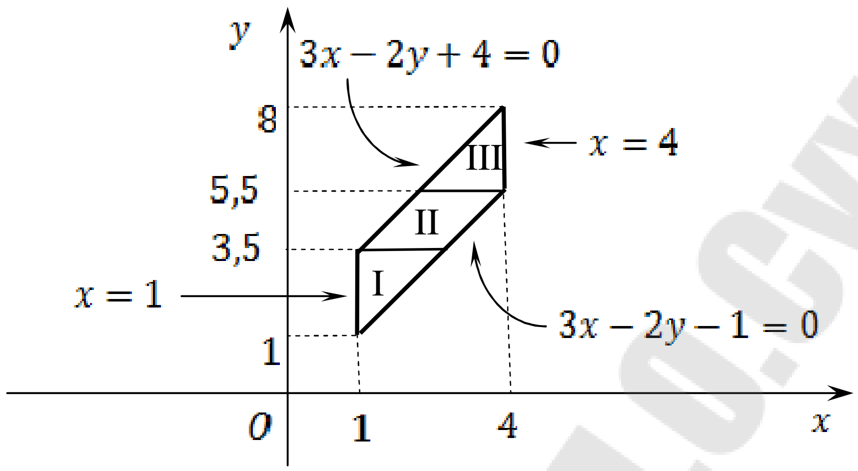


Рис.5

1-й способ. Внешний интеграл по x, внутренний по y. Область слева ограничена прямой $x=1$; справа - прямой $x=4$; снизу – прямой

$3x-2y-1=0,\Rightarrow y=\dfrac{3x-1}{2}$; сверху - прямой $3x-2y+4=0,\Rightarrow y=\dfrac{3x+4}{2}$. Область является правильной в направлении Oy. Таким образом,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_1^4 dx\int\limits_{\frac{3x-1}{2}}^{\frac{3x+4}{2}} f(x,y)dy$$

2-й способ. Область D не является правильной в направлении Ox, т.к. при $y\in[0;3{,}5]$ она слева ограничена прямой $x=1$, справа - прямой $3x-2y-1=0$, $x=\dfrac{2y+1}{3}$; при $y\in[3{,}5;5{,}5]$ область слева ограничена прямой $3x-2y+4=0, x=\dfrac{2y-4}{3}$; справа - прямой $x=\dfrac{2y+1}{3;}$;

при $x\in[5{,}5;8]$ область слева ограничена прямой $x=\dfrac{2y-4}{3}$, справа - прямой $x=4$.

Проведем прямые $y = 3{,}5$ и $y = 5{,}5$. Они разобьют область D на три правильные в направлении Ox области. Таким образом

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_3} f(x,y)dxdy =$$

$$\int\limits_0^{3,5} dy \int\limits_1^{\frac{2y+1}{3}} f(x,y)dx + \int\limits_{3,5}^{5,5} dy \int\limits_{\frac{2y-4}{3}}^{\frac{2y+1}{3}} f(x,y)dx + \int\limits_{5,5}^{8} dy \int\limits_{\frac{2y-4}{3}}^{4} f(x,y)dx.$$

Задача решена.

Пример 3. Вычислить двойной интеграл по области D от функции $f(x,y)$, если $D{:}\left\{y = x^2,\ x = y^2\right\}$, $\quad f(x,y) = x^2 + y.$

Решение: Область D изображена на рисунке 6. Найдем координаты точек пересечения кривых $y = x^2$ и $x = y^2$: $\quad x^2 = \left(x^2\right)^2$; $\quad x^2\left(x^2 - 1\right) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

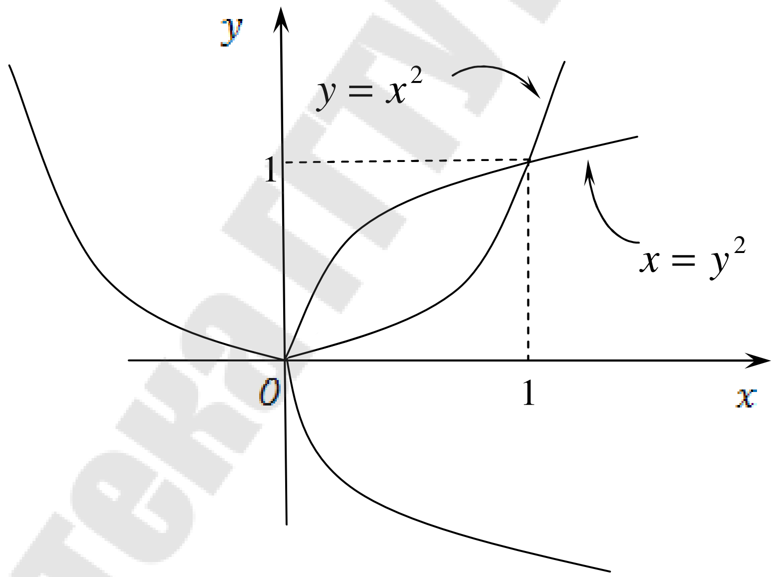


Рис. 6

$$\iint\limits_D \left(x^2 + y\right)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(x^2 + y\right)dy$$

Вычислим внутренний интеграл

$$\Phi(x)=\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\left(x^2+y\right)dy=\left(x^2y+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}}=x^2\cdot\sqrt{x}+\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2}-$$

$$-\left(x^2\cdot x^2+\frac{\left(x^2\right)^2}{2}\right)=x^{5/2}+\frac{x}{2}-\left(x^4+\frac{x^4}{2}\right)=x^{5/2}+\frac{x}{2}-\frac{3}{2}x^4.$$

Подставим $\Phi(x)$ в повторный интеграл:

$$\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\left(x^2+y\right)dy=\int_0^1\left(x^{5/2}+\frac{x}{2}-\frac{3}{2}x^4\right)dx=\left(\frac{2x^{7/2}}{7}+\frac{x^2}{4}-\frac{3}{10}x^5\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{2}{7}+\frac{1}{4}-\frac{3}{10}=\frac{33}{140}.$$

Ответ: $\frac{33}{140}$.

Задания

Задание 1.1. Вычислить повторные интегралы:

1) $\int_0^1 dx\int_3^5\left(x^2y+xy\right)dy$; 2) $\int_0^{\pi/2} dx\int_0^x \cos y\,dy$;

3) $\int_0^1 dy\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} xy\,dx$; 4) $\int_1^2 dx\int_0^{2/x}\sqrt{4-x^2y^2}\,dy$.

Задание 1.2. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле.

5) $\int_{-1}^2 dx\int_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy$. 6) $\int_0^1 dx\int_{2x}^{3x} f(x,y)dy$.

7) $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$. 8) $\int_0^3 dx\int_0^{x/3} f(x,y)dy+\int_3^4 dx\int_0^{4-x} f(x,y)dy$.

Задание 1.3. Изобразить область интегрирования D и свести двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ к повторному двумя способами, если:

9) $D: \{x^2 + y^2 = 4, y = 2x - x^2, x \geq 0\}$.

10) $D: \{y = x^2,\ y = 5x^2,\ x + y - 6 = 0,\ x > 0,\ y > 0\}$.

11) D - треугольник ABC с вершинами A(-2;-2); B(1;2); C(6;2).

12) $D: \{x^2 + y^2 \geq 1;\quad x^2 + y^2 \leq 2;\}$.

Задание 1.4. Вычислить $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, если

13) $D: \{0 \leq y \leq \pi;\quad 0 \leq x \leq \sin y\}\quad f(x,y) = x + y$;

14) $D: \{y = 4x + 6, y = \frac{1}{2}x - 1, x = -1\}\quad f(x,y) = x + 2y$;

15) D - треугольник с вершинами $O(0,0), A(10,1), B(1,1)$

$$f(x,y) = \sqrt{xy - y^2};$$

16) $D: \{y = \sqrt{x};\ y = x\}\quad f(x,y) = e^{x/y}$.

Ответы: **1.** $\frac{20}{3}$; **2.**1; **3.** $\frac{1}{12}$; **4.** $\pi \cdot ln2$; **13.**$\frac{5}{4}\pi$; **14.**$-\frac{49}{12}$; **15.**6; **16.**$\frac{1}{2}e - 1$.

1.2 Замена переменной в двойном интеграле.

Пусть прямоугольные координаты x,y преобразуются к новым (криволинейным) координатам u и υ, которые связаны с x и y соотношениями:

$$x = x(u,\upsilon);\ y = y(u,\upsilon), \tag{1.11}$$

где $x(u,\upsilon)$ и $y(u,\upsilon)$ - непрерывные и дифференцируемые функции.

Функциональный определитель

$$J(u,\upsilon)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial \upsilon}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial \upsilon}\end{vmatrix}. \qquad (1.12)$$

называется ***якобианом*** преобразования (1.11).

Если функции $x(u,\upsilon)$ и $y(u,\upsilon)$ осуществляют однозначное отображение области D, лежащей в плоскости xOy, на область D', лежащую в плоскости $uO\upsilon$, что равносильно условию $J(u,\upsilon)\neq 0$, то имеет место следующая формула замены переменных в двойном интеграле:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'} f\left(x(u,\upsilon);y(u,\upsilon)\right)\left|J(u,\upsilon)\right|dud\upsilon. \qquad (1.13)$$

Таким образом для замены переменных в двойном интеграле необходимо сделать следующее:

Используя выражения $x=x(u,\upsilon)$, $y=y(u,\upsilon)$ найти границы области D' в плоскости $uO\upsilon$. Изобразить область D' на плоскости $uO\upsilon$.

Вычислить якобиан преобразования по формуле (1.12).

Подставить D', $x(u,\upsilon)$, $y(u,\upsilon)$ $\left|J(u,\upsilon)\right|$ в формулу (1.13). Вычислить получившийся в правой части равенства двойной интеграл по переменным u и υ.

<u>*Пример 4.*</u> Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{D}\left(x^2-y^2\right)\sin 2\pi(x+y)^2dxdy$,

где D - параллелограмм с вершинами в точка $A\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$; $B(2;0)$; $C(3;1)$; $E\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$

<u>Решение</u>: Построим область D (рис.7а)

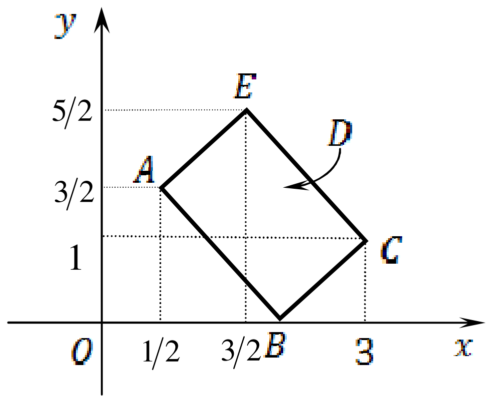


Рис.7а

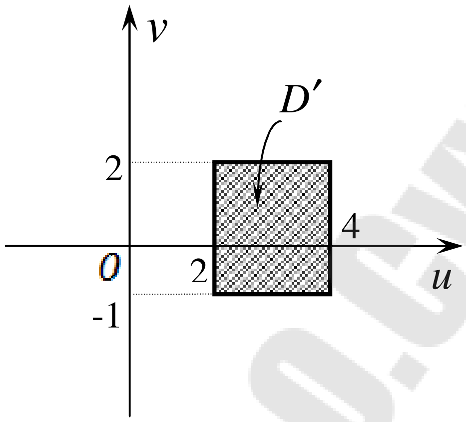


Рис.7б

Непосредственное вычисление интеграла громоздко, поскольку область интегрирования не является правильной ни в направлении Ox, ни в направлении Oy и, следовательно, для вычисления интеграла ее придется разбить на три правильные области. Однако, вычисления заметно упростятся, если сделать подходящую замену переменных.

Найдем уравнения прямых, на которых лежат стороны параллелограмма:

Отрезок AB: $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}$; $\dfrac{x-\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}}=\dfrac{y-\frac{3}{2}}{0-\frac{3}{2}}$; $x+y=2\cdot$

Отрезок AE: $\dfrac{x-x_A}{x_E-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_E-y_A}$; $\dfrac{x-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}=\dfrac{y-\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}$; $x-y=-1\cdot$

Отрезок BC: $\dfrac{x-x_B}{x_C-x_B}=\dfrac{y-y_B}{y_C-y_B}$; $\dfrac{x-2}{3-2}=\dfrac{y-0}{1-0}$; $x-y=2$.

Отрезок CE: $\dfrac{x-x_C}{x_E-x_C}=\dfrac{y-y_C}{y_E-y_C}$; $\dfrac{x-3}{\frac{3}{2}-3}=\dfrac{y-1}{\frac{5}{2}-1}$; $x+y=4\cdot$

Таким образом, область D ограничена линиями $x+y=2$; $x+y=4$; $x-y=-1$; $x-y=2$.

Введем новые переменные: $\begin{cases} u = x + y \\ \upsilon = x - y \end{cases}$

Тогда область D плоскости xOy отобразится в область D' плоскости $uO\upsilon$, которая представляет собой прямоугольник $2 < u < 4, -1 < \upsilon < 2$. (рис.7б). Выразим x и y через u и υ:

$$x = \frac{u+\upsilon}{2}; \quad y = \frac{u-\upsilon}{2}.$$

Вычислим якобиан преобразования по формуле (1.12)

$$J(u,\upsilon) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow |J(u,\upsilon)| = \frac{1}{2}.$$

Тогда, по формуле (1.13) заданный интеграл преобразуется к виду:

$$\iint\limits_D (x^2 - y^2)\sin 2\pi(x+y)^2 dxdy = \iint\limits_{D'} uv\sin(2\pi u^2)\frac{1}{2}dudv =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{2} vdv \int\limits_{2}^{4} \sin(2\pi u^2)udu = \frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{2}\Big|_{-1}^{2}\cdot\frac{1}{4\pi}\int\limits_{2}^{4}\sin(2\pi u^2)\,d(2\pi u^2) =$$

$$= \frac{3}{16\pi}(-\cos(2\pi u^2))|_2^4 = -\frac{3}{16\pi}(\cos 32\pi - \cos 8\pi) = 0.$$

Ответ: 0.

Переход к полярным координатам

Переход к полярным координатам осуществляется по следующим формулам:

$$\begin{aligned} x = \rho\cos\varphi; &\quad y = \rho\sin\varphi; \\ \rho \ge 0; &\quad 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{aligned} \tag{1.14}$$

По формулам (1.12) находим якобиан преобразования $|J| = \rho$.

Таким образом

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi. \qquad (1.15)$$

При переходе к повторному интегралу в правой части формулы (1.15) следует руководствоваться следующими правилами.

- Если полюс O (начало координат) находится вне области D (рис.8а), а область D ограничена лучами $\varphi=\varphi_1$ и $\varphi=\varphi_2$, $\varphi_1<\varphi_2$ кривыми $\rho=\rho_1(\varphi)$ и $\rho=\rho_2(\varphi)$ $\rho_1<\rho_2$, то

$$\iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\, d\rho. \qquad (1.16)$$

- Если полюс O находится внутри области интегрирования D' (рис. 8б), а уравнение ее границы имеет вид $\rho=\rho(\varphi)$, тогда

$$\iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\, d\rho. \qquad (1.17)$$

- Если полюс O лежит на границе области D' (рис.8в) и уравнение ее границы имеет вид $\rho=\rho(\varphi)$, тогда

$$\iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{0}^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\, d\rho, \qquad (1.18)$$

где значения α и β определяются непосредственно из вида D'.

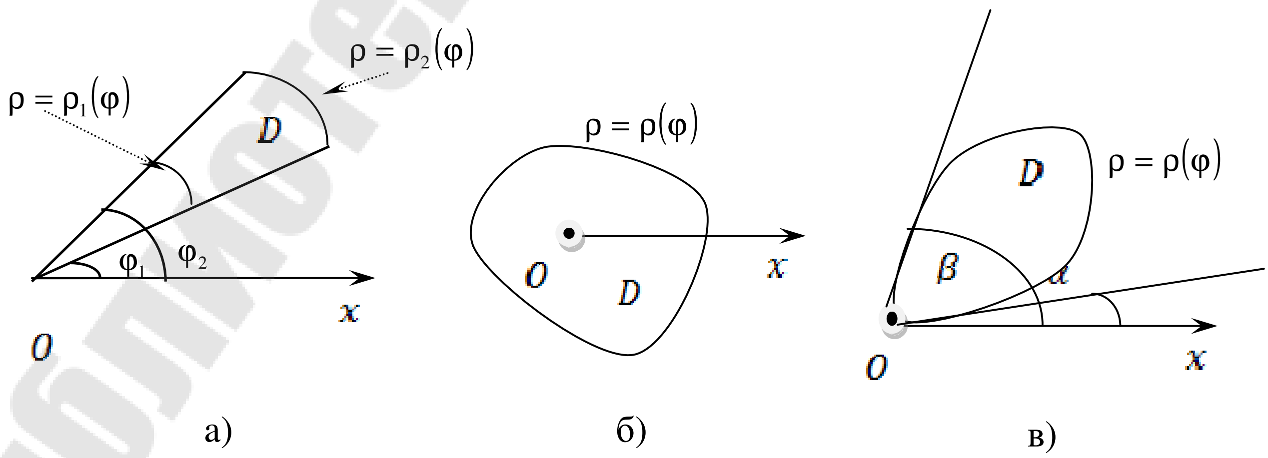


Рис. 8

Переход к полярным координатам удобно использовать, если D есть круг или часть круга.

Пример 5. Вычислить $\iint\limits_D arctg\,\frac{y}{x}dxdy$, где D - часть кольца, ограниченного линиями $x^2+y^2=1$; $x^2+y^2=9$; $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$; $y=\sqrt{3}x$.

Решение: Изобразим область D (рис. 9). Перейдем к полярным координатам по формулам (1.14) $x=\rho\cos\varphi$ $y=\rho\sin\varphi$. Запишем границы области D в полярных координатах

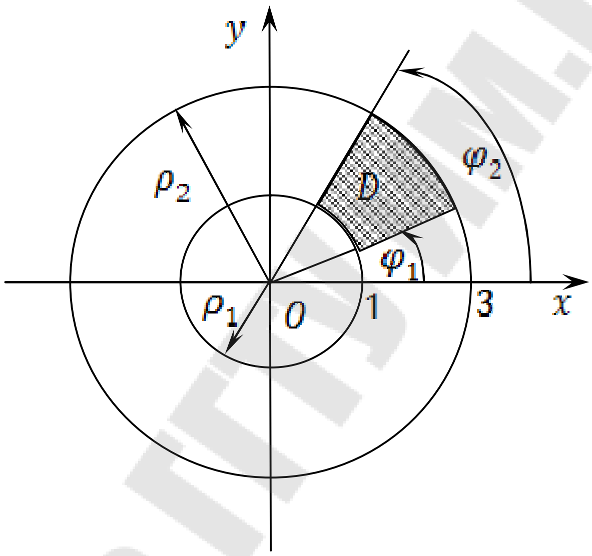


Рис. 9

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow (\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2=1 \Rightarrow \rho^2=1 \Rightarrow \rho_1=1,$$

$$x^2+y^2=9 \Rightarrow (\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2=9 \Rightarrow \rho^2=9 \Rightarrow \rho_2=3,$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x \Rightarrow \rho\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}\rho\cos\varphi \Rightarrow tg\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi_1=\frac{\pi}{6},$$

$$y=\sqrt{3}x \Rightarrow \rho\sin\varphi=\sqrt{3}\rho\cos\varphi \Rightarrow tg\varphi=\sqrt{3} \Rightarrow \varphi_2=\frac{\pi}{3}.$$

Полюс O лежит вне области D, поэтому, согласно (1.15) и (1.16) имеем:

$$\iint\limits_D arctg\frac{y}{x}dxdy = \iint\limits_{D'} arctg\left(\frac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi}\right)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \varphi\rho d\rho =$$

$$= \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \varphi d\varphi \int\limits_1^3 \rho d\rho = \frac{\varphi^2}{2}\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/3} \cdot \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_1^3 = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{36}\right)(9-1) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Пример 6. Вычислить $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, где D - область, ограниченная линиями $x^2-2x+y^2=0$; $x^2-4x+y^2=0$; $y=x$; $y=0$.

Решение: Изобразим область D (рис. 10).

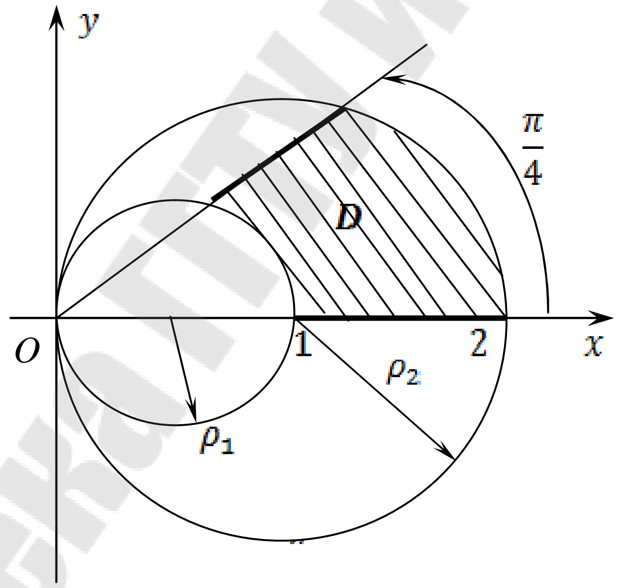


Рис. 10

$x^2-2x+y^2=0 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1$ - окружность с центром $O(1,0)$, радиусом $\rho_1=1$.

$x^2-4x+y^2=0 \Rightarrow (x-2)^2+y^2=4$ - окружность с центром $O(2,0)$, радиусом $\rho_2=2$.

$y=x$ – биссектриса первого квадранта; $y=0$ - ось Ox.

Перейдем к полярным координатам и запишем границы области D в полярных координатах.

$$x^2-2x+y^2=0 \Longrightarrow (\rho\cos\varphi)^2-2\rho\cos\varphi+(\rho\sin\varphi)^2=0,$$
$$\rho_1=2\cos\varphi;$$

$$x^2-4x+y^2=0 \Longrightarrow (\rho\cos\varphi)^2-4\rho\cos\varphi+(\rho\sin\varphi)^2=0,$$
$$\rho_2=4\cos\varphi;$$

$$y=0 \Rightarrow \rho\sin\varphi=0 \Rightarrow tg\varphi=0 \Rightarrow \varphi_1=0,$$

$$y=x \Rightarrow \rho\sin\varphi=\rho\cos\varphi \Rightarrow tg\varphi=1 \Rightarrow \varphi_2=\frac{\pi}{4}.$$

Полюс O лежит вне области D, поэтому, согласно (1.15) и (1.16) имеем:

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_{D'} \sqrt{(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2}\rho d\rho d\varphi=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2}\rho^2d\rho=$$
$$=\int\limits_0^{\pi/4}d\varphi\int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}\rho^2d\rho=\int\limits_0^{\pi/4}\left(\frac{\rho^3}{3}\bigg|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}\right)d\varphi=\frac{56}{3}\int\limits_0^{\pi/4}cos^3\varphi d\varphi=$$
$$=\frac{56}{3}\int\limits_0^{\pi/4}cos^2\varphi d(\sin\varphi)=\frac{56}{3}\int\limits_0^{\pi/4}(1-sin^2\varphi)d(\sin\varphi)=\frac{56}{3}\left(\sin\varphi-\frac{sin^3\varphi}{3}\right)\bigg|_0^{\pi/4}=$$
$$=\frac{56}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{12}\right)=\frac{70\sqrt{2}}{9}.$$

Ответ: $\frac{70\sqrt{2}}{9}$.

Обобщенные полярные координаты.

Обобщенными полярными координатами (эллиптическими) называются переменные ρ и φ, связанные с прямоугольными координатами x и y соотношениями:

$$x=a\rho\cos\varphi \quad y=b\rho\sin\varphi. \tag{1.19}$$

$$\rho\geq 0;\ 0\leq\varphi\leq 2\pi; \quad a>0, b>0;\ a\neq b.$$

Якобиан преобразования J в этом случае имеет вид:

$$J(\rho,\varphi) = ab\rho \ . \tag{1.20}$$

Таким образом, согласно (1.13) двойной интеграл в обобщенных полярных координатах принимает вид:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = ab\iint\limits_{D'} f(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi \ . \tag{1.21}$$

При расстановке пределов интегрирования в повторном интеграле в (1.21) следует руководствоваться теми же правилами, что и в случае перехода к полярным координатам. Переход к обобщенным полярным координатам удобнее в случае, когда или уравнение границы области, или подынтегральная функция, или то и другое одновременно содержат выражение $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^k$.

<u>*Пример 7.*</u> Вычислить $\iint\limits_D xydxdy$, если область D ограничена эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и прямыми $x=0,\ y=0\ (x\geq 0, y\geq 0)$.

<u>Решение:</u> Изобразим область D (рис. 11). Перейдем к обобщенным полярным координатам по формулам (1.18): $x = a\rho\cos\varphi \quad y = b\rho\sin\varphi$.

Тогда граница области D примет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \Rightarrow \frac{a^2\rho^2\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{b^2\rho^2\sin^2\varphi}{b^2}=1 \quad \Rightarrow \rho^2=1, \quad \rho=1,$$

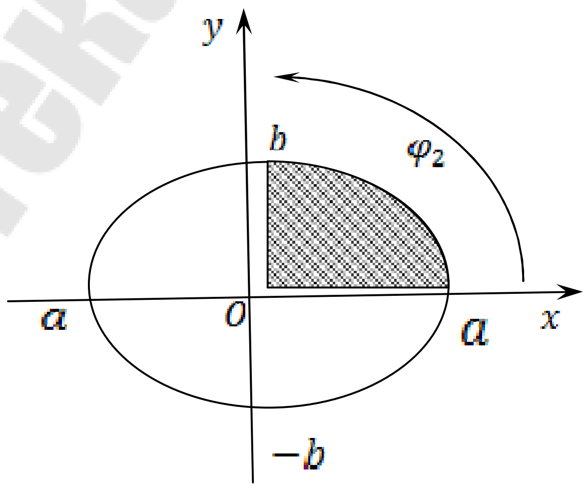


Рис. 11

$$y = 0 \quad \Rightarrow a\rho \sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \varphi_1 = 0,$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow a\rho \cos\varphi = 0 \quad \Rightarrow \cos\varphi = 0 \quad \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Полюс O лежит на границе области, поэтому воспользуемся формулой, аналогичной (1.18). Таким образом:

$$\iint\limits_D xydxdy = ab \iint\limits_{D'} a\rho\cos\varphi \cdot b\rho\sin\varphi \cdot \rho d\rho d\varphi =$$

$$= a^2b^2 \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3 \cos\varphi \sin\varphi \, d\rho = \frac{a^2b^2}{2} \int\limits_0^{\pi/2} \sin 2\varphi \, d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3 d\rho =$$

$$= \frac{a^2b^2}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\Big|_0^{\pi/2}\right)\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{a^2b^2}{16}(-\cos\pi + \cos 0) = \frac{a^2b^2}{8}.$$

Ответ: $\dfrac{a^2b^2}{8}$.

Задания

<u>Задание 1.5.</u> С помощью надлежащей замены переменных вычислить двойной интеграл.

1) $\iint_S (x+y)^3 dxdy$,

S - ограничена линиями: $x + y = 1$; $x + y = 3$; $y = 5x$; $y = 10x$.

2) $\iint_S (x+y)^3 (x-y)^2 dxdy$,

S - квадрат с вершинами $A(0,1); B(1,0); C(2,1); D(1,2)$.

3) $\iint\limits_S \dfrac{dxdy}{(x+y)^4}$; S ограничена линиями:

$x + y = 1$; $x + y = 2$; $3x - y = 0$, $4x - y = 0$.

4) $\iint\limits_S (x+y)dxdy;$ S ограничена линиями:

$2x+y=1;\ 2x+y=3;\ x-y=-1,\ x-y=2.$

<u>Задание 1.6.</u> Вычислить двойной интеграл по указанной области:

5) $\iint\limits_S \sin 2\varphi\, d\rho\, d\varphi;$ S определена неравенствами

$\pi/4 \le \varphi \le \pi/2;\quad 3 \le \rho \le 5.$

6) $\iint\limits_S \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi;$ S - ограничена линиями:

$\rho = 1;\quad \rho = 2+\cos\varphi$, полярной осью и расположена выше этой оси.

7) $\iint_S \rho\cos\varphi\, d\rho d\varphi$, где S - круговой сектор, ограниченный линиями $\rho = R,\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}.$

8) $\iint\limits_S \rho^3 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi;$ S - область ограничена полярной осью, линией $\rho = 1+\cos\varphi$ и расположенная выше полярной оси.

<u>Задания 1.7.</u> Переходя к полярным координатам вычислить интегралы:

9) $\iint\limits_S (x^2+y^2)dxdy;$ S: $x^2+y^2=2ax$.

10) $\iint\limits_S xydxdy;$ S – ограничена линиями

$y=-x,\ y=\sqrt{3}x,\ x^2+y^2=ax;\ x^2+y^2=bx$, $(b>a)$.

11) $\iint\limits_S \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy;$ S ограничена лемнискатой:

$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2).$

12) $\iint\limits_S \frac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$;S - круг $x^2+y^2 \le 16$.

Задание 1.8. Переходя к обобщенным полярным координатам вычислить интегралы.

13) $\iint\limits_S \sqrt{25-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}}dxdy; S$ - ограничена линией $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$.

14) $\iint\limits_S \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy;$ S - ограничена эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

15) $\iint\limits_S \frac{dxdy}{\sqrt{4-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}}};$ S - ограничена эллипсом $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

16) $\iint\limits_S \sin\pi\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)dxdy; S$ - ограничена эллипсами

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1;\quad \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1.$

Ответы: **1.** $\frac{11}{3}$; **2.**$\frac{20}{3}$; **3.** $\frac{3}{160}$; **4.** $\frac{7}{3}$; **5.**1; **6.**6; **7.** $\frac{R^2}{2}$; **8.** $\frac{8}{3}$; **9.**$2a^4\pi$; **10.**$\frac{7(b^4-a^4)}{1536}$; **11.**$\frac{a^4}{3}$; **12.**4π; **13.**$\frac{40}{3}\pi\left(125-24\sqrt{24}\right)$; **14.**$\frac{2\pi ab}{3}$; **15.**$24\pi\left(2-\sqrt{3}\right)$; **16.**$-12$.

1.3 Геометрические приложения двойного интеграла.

Вычисление площадей плоских фигур.

Площадь плоской фигуры D вычисляется по формуле

$$S_D=\iint\limits_D dxdy \qquad (1.22)$$

Пример 8. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:

$x+y=4;\ x-3y=0;\ x+y=8;\ 3x-y=0$

Решение: Построим область (рис.12), площадь которой необходимо вычислить.

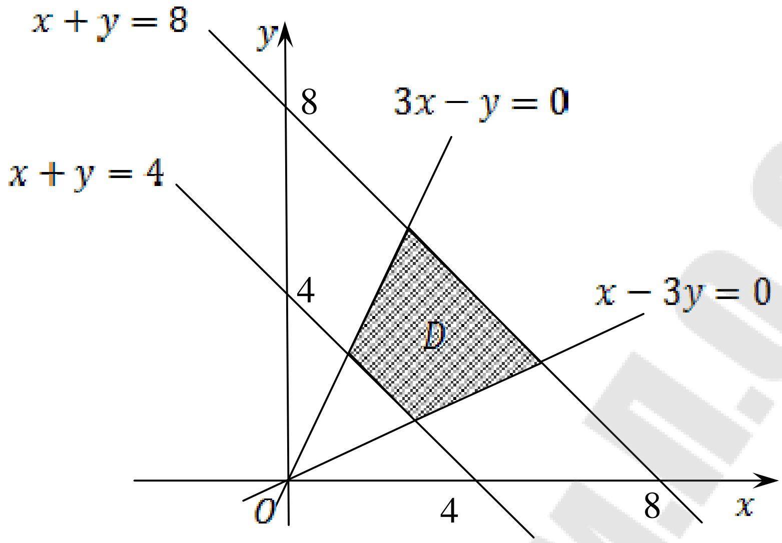


Рис. 12

Согласно (1.22) искомая площадь $S_D = \iint\limits_D dxdy$

Для вычисления двойного интеграла сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} x + y = u \\ \dfrac{y}{x} = \upsilon \end{cases}, \quad \text{тогда} \quad \begin{cases} x = \dfrac{u}{1+\upsilon} \\ y = \dfrac{u\upsilon}{1+\upsilon} \end{cases}$$

Область D' на плоскости $uO\upsilon$ примет вид: $4 \le u \le 8$, $\dfrac{1}{3} \le \upsilon \le 3$ - прямоугольник.

Якобиан преобразования вычислим по формуле (1.12)

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{1+\upsilon} & -\dfrac{u}{(1+\upsilon)^2} \\ \dfrac{\upsilon}{1+\upsilon} & \dfrac{u}{(1+\upsilon)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(1+\upsilon)^3} + \frac{u\upsilon}{(1+\upsilon)^3} = \frac{u}{(1+\upsilon)^2}.$$

Таким образом:

$$S_D = \iint\limits_{D'} \frac{u}{\left(1+\upsilon\right)^2} dud\upsilon = \int\limits_4^8 udu \int\limits_{1/3}^3 \frac{d\upsilon}{\left(1+\upsilon\right)^2} = \frac{u^2}{2}\Bigg|_4^8 \left(-\frac{1}{1+\upsilon}\right)\Bigg|_{1/3}^3 =$$

$$= \frac{64-16}{2} \cdot \left[-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right] = \frac{48}{2} \cdot \frac{1}{2} = 12.$$

Ответ: $S_D = 12\ e\partial^2$.

<u>*Пример 9.*</u> Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линией: $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2xy$.

<u>Решение:</u> Согласно (1.22)

$$S_D = \iint\limits_D dxdy,$$

перейдем к полярным координатам по формулам (1.14) $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, тогда уравнение границы имеет вид:

$$\left(\rho^2\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi\right)^2 = 2a^2\rho\cos\varphi\rho\sin\varphi,$$

$$\rho^4 = 2a^2\rho^2\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$\rho^2 = a^2\sin 2\varphi, \qquad \rho = a\sqrt{\sin 2\varphi},$$

$$\rho^2 \geq 0, \Rightarrow \sin 2\varphi \geq 0 \quad 2\pi n \leq 2\varphi \leq \pi + 2\pi n,$$

$$\pi n \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + \pi n, \text{ при } n = 0 \ \ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{при } n = 1 \quad \pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Таким образом, область D, представляет собой две симметричные области, лежащие в I и III четвертях (рис. 13).

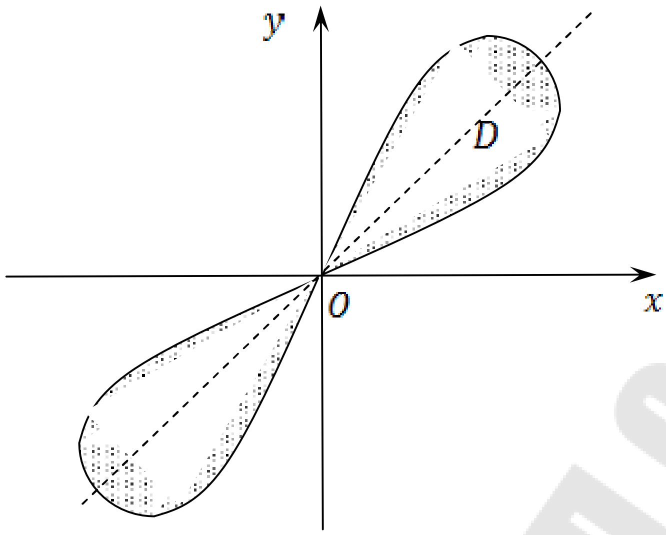


Рис. 13

Таким образом искомая площадь равна:

$$S = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho\, d\rho = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} = \int_0^{\pi/2} a^2 \sin 2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(-\cos 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}\left(-\cos\pi + \cos 0\right) = a^2.$$

Ответ: $S = a^2 (ед)^2$.

Вычисление объемов тел.

Объем тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, плоскостью $z = 0$ и цилиндрической поверхностью, направляющей которой служит граница области D плоскости xOy равен двойному интегралу от функции $f(x, y)$по области D.

$$V = \iint_D f(x, y) dxdy. \qquad (1.23)$$

Если тело, объем которого ищется ограничено сверху поверхностью $z = f_2(x, y) \geq 0$, а снизу $z = f_1(x, y) \geq 0$,причем проекцией обеих поверхностей на плоскость xOx является одна и та же область D, тогда объем тела определяется формулой

$$V=\iint\limits_{D}\left[f_2(x,y)-f_1(x,y)\right]dxdy\ . \qquad (1.24)$$

Если внутри области D функция $f(x,y)$ меняет знак, то область D надо разбить на две области: D_1, где $f(x,y)\geq 0$ и D_2, где $f(x,y)\leq 0$.

Пример 10. Вычислить объемы тел, ограниченных указанными поверхностями: плоскостями $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=4,\ y=4$ и параболоидом $z=1+x^2+y^2$.

Решение: Построим заданное тело и его проекцию на плоскость xOy. (рис. 14)

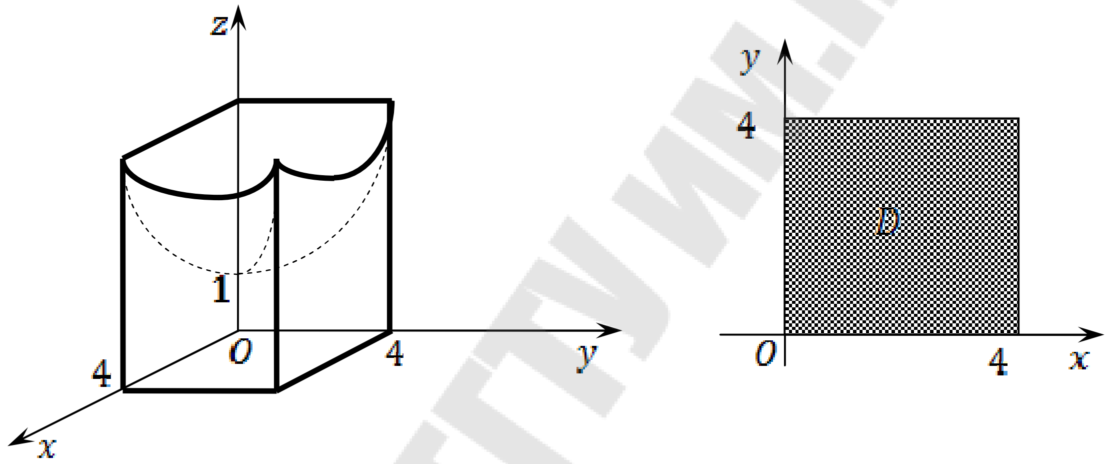


Рис.14

Искомый объем найдем по формуле (1.23)

$$V=\iint\limits_{D}\left(1+x^2+y^2\right)dxdy=\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^4\left(1+x^2+y^2\right)dy=\int\limits_0^4 dx\left(y+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^4=$$

$$=\int\limits_0^4\left(4+4x^2+\frac{64}{3}\right)dx=\int\limits_0^4\left(\frac{76}{3}+4x^2\right)dx=\left(\frac{76}{3}x+\frac{4}{3}x^3\right)\Bigg|_0^4=$$

$$=\frac{76\cdot 4}{3}+\frac{4\cdot 64}{3}=\frac{560}{3}.$$

Ответ: $V=\dfrac{560}{3}ед^3$.

Вычисление площадей поверхности.

Пусть в области D_z плоскости xOy задана непрерывная функция $z = f(x,y)$, имеющая непрерывные частные производные. Функция $f(x,y)$ определяет гладкую поверхность Q_z, проекцией которой на плоскость xOy является область D_z. Площадь поверхности Q_z определяется формулой:

$$Q_z = \iint_{D_z} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy. \tag{1.25}$$

В случае, когда гладкая поверхность задается функциями $x = f(y,z)$ (в области D_x плоскости yOz) или $y = f(y,z)$ (в области D_y плоскости xOz), то ее площадь вычисляется по формулам, аналогичным (1.25):

$$Q_x = \iint_{D_x} \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz. \tag{1.26}$$

$$Q_y = \iint_{D_y} \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dxdz. \tag{1.27}$$

Пример 11. Вычислить площадь части плоскости $6x+3y+2z=12$, которая расположена в первом октанте.

Решение: Изобразим заданную поверхность и ее проекцию D_z на плоскость xOy (рис.15).

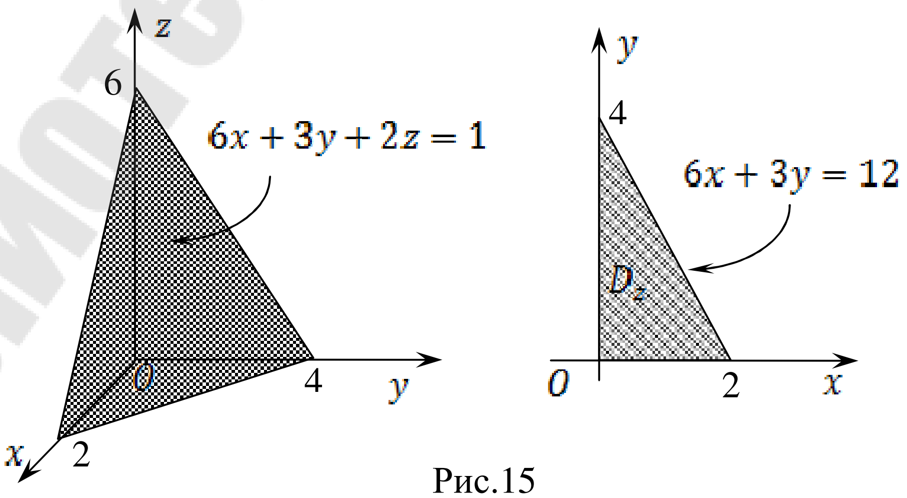


Рис.15

Выразим z из заданного уравнения плоскости:

$$z = 6 - 3x - \frac{3}{2}y.$$

Вычислим $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$: $\frac{\partial z}{\partial x} = -3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3}{2}$.

По формуле (1.25) находим:

$$Q_z = \iint_D \sqrt{1 + 9 + \frac{9}{4}}dxdy = \frac{7}{2}\iint_D dxdy = \frac{7}{2}\int_0^2 dx \int_0^{4-2x} dy = \frac{7}{2}\int_0^2 dx y\Big|_0^{4-2x} =$$

$$= \frac{7}{2}\int_0^2 (4 - 2x)dx = 7\int_0^2 (2 - x)dx = 7\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = 7(4 - 2) = 14$$

Ответ: $Q_z = 14ед^2$.

Задания

Задание 1.8. Вычислить площадь плоской области D, ограниченной заданными линиями:

1) D: $y = \sqrt{x}$; $y = 2\sqrt{x}$; $x = 4$.

2) D: $y^2 = 10x + 25$; $y^2 = -6x + 9$.

3) $D: x^2 + y^2 = 4; y = 2x - x^2; (x \geq 0, y \geq 0)$.

4) $D: y = \frac{a}{x^3}; y = \frac{b}{x^3}; (0 < a < b), y^2 = cx, y^2 = dx (0 < c < d)$.

Задание 1.9. С помощью двойных интегралов вычислить в полярных координатах площадь плоской фигуры, ограниченной указанными линиями:
5) $D: x^2 + y^2 = 2ax;\ x^2 + y^2 = 2ay$.

6) $D: (x^2 + y^2)^2 = 8(x^2 - y^2)$.

7) $D: \rho = (2 - \cos\varphi);\ \rho = 2$ (вне кардиоиды).

8) $D: (x^2 + y^2)^3 = 16x^4$.

Задание 1.10. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями.

9) $2x + y - z = 0;\ x - 2y + 5 = 0;\ 2x + 3y - 18 = 0;\ z = 0$.

10) $x^2 + y^2 - z + 2 = 0; x^2 + y^2 = 1;\ z = 0$.

11) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1;\ z = x^2 + y^2$.

12) $z = x^2 + y^2;\ (x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy;\ z = 0$.

Задание 1.11. Найти площадь поверхности:

13) Плоскости $x + y + z = 6$, отсекаемой плоскостями $x = 0, y = 0, x = 3$.

14) Плоскости $x + y + z = 2a$, вырезаемой цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$.

15) Конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, расположенного внутри цилиндра

$x^2 + y^2 = 1$.

16) Части параболоида $2x = z^2 + y^2$, лежащего внутри цилиндра $z^2 + y^2 = 1$.

Ответы: **1.** $\frac{16}{3}$; **2.**$\frac{16\sqrt{15}}{3}$; **3.** $\pi - \frac{4}{3}$; **4.** $\frac{7}{6}\left(b^{3/7} - a^{3/7}\right)\left(d^{2/7} - c^{2/7}\right)$;

5. $a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$; **6.**8; **7.** $8 - \pi$; **8.** 6π; **9.**$388\frac{5}{24}$; **10.**$\frac{5}{2}\pi$; **11.**$\frac{5}{2}\pi$; **12.**$\frac{1}{8}\pi a^4$; **13.**$\frac{27}{2}\sqrt{3}$; **14.**$\pi a^2\sqrt{3}$; **15.**π; **16.**$\frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$.

1.4 Физические приложения двойного интеграла

Вычисление массы плоской фигуры.

Пусть D - область (пластинка) на плоскости xOy, на которой распределена масса с поверхностной плотностью $\gamma = \gamma(x, y)$. Тогда масса пластинки m_D определяется формулой:

$$m_D = \iint\limits_D \gamma(x, y) dxdy. \qquad (1.28)$$

<u>Пример 12.</u> Найти массу пластинки, ограниченной линиями $xy = 9, \quad xy = 16, \quad y^2 = 2x, \quad y^2 = 3x$, если в каждой точке поверхностная плотность пропорциональна среднему геометрическому ее координат.

<u>Решение</u>: Изобразим область D, ограниченную линиями на плоскости xOy (рис.16):

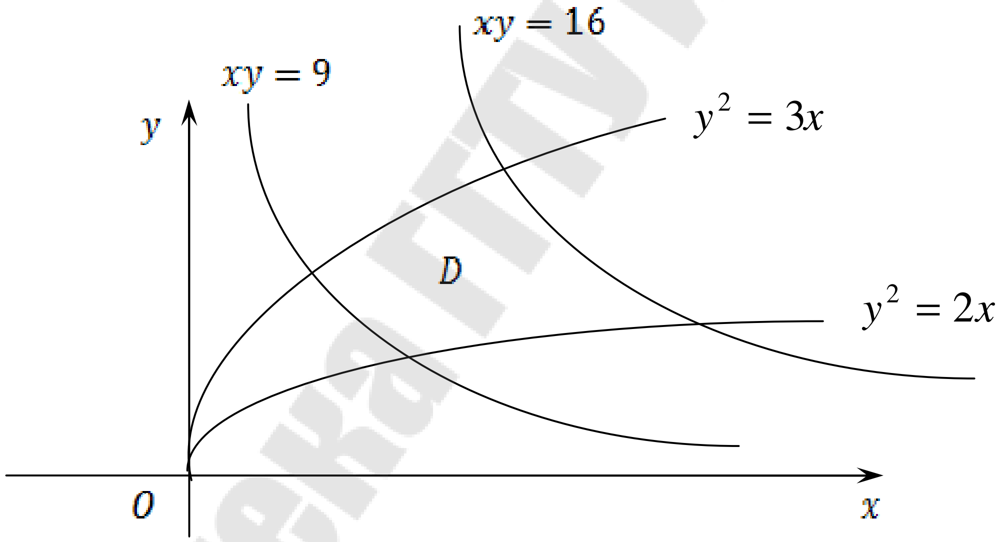


Рис. 16

По условию $\gamma(x, y) = \sqrt{xy}$, тогда, согласно (1.28) масса пластинки равна:

$$m = \iint\limits_D \sqrt{xy} dxdy.$$

Для вычисления интеграла сделаем замену переменных $\begin{cases} yx = u \\ \dfrac{y^2}{x} = \upsilon \end{cases}$

тогда область D плоскости xOy перейдет в область D' плоскости $uO\upsilon$. D' представляет собой прямоугольник $9 \le u \le 16; \quad 2 \le \upsilon \le 3.$

Выразим x и y через u и υ:

$$\begin{cases} x = \dfrac{u^{2/3}}{\upsilon^{1/3}} \\ y = u^{1/3}\upsilon^{1/3} \end{cases}.$$

Якобиан преобразования вычислим по формуле (1.12)

$$J(u,\upsilon) = \begin{vmatrix} \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{u^{1/3}\upsilon^{1/3}} & -\dfrac{1}{3}\dfrac{u^{2/3}}{\upsilon^{4/3}} \\ \dfrac{1}{3}\dfrac{\upsilon^{1/3}}{u^{2/3}} & \dfrac{1}{3}\dfrac{u^{1/3}}{\upsilon^{2/3}} \end{vmatrix} = \frac{2}{9}\frac{1}{u^{1/3}\upsilon^{1/3}}\frac{u^{1/3}}{\upsilon^{2/3}} + \frac{1}{9}\frac{u^{2/3}}{\upsilon^{4/3}}\frac{\upsilon^{1/3}}{u^{2/3}} =$$

$$= \frac{2}{9}\frac{1}{\upsilon} + \frac{1}{9}\frac{1}{\upsilon} = \frac{1}{3\upsilon}.$$

Таким образом, с учетом формулы (1.13), получаем

$$m = \iint\limits_{D'} \sqrt{\frac{u^{2/3}}{\upsilon^{1/3}} \cdot u^{1/3} \cdot \upsilon^{1/3}}\, \frac{1}{3\upsilon} du d\upsilon = \frac{1}{3}\int_9^{16}\sqrt{u}du\int_2^3 \frac{d\upsilon}{\upsilon} = \frac{2}{9}u^{3/2}\Big|_9^{16} \cdot \ln\upsilon\Big|_2^3 =$$

$$= \frac{2}{9}\left(16^{3/2} - 9^{3/2}\right)\left(\ln 3 - \ln 2\right) = \frac{2}{9}\cdot 37 \cdot \ln\frac{3}{2} = \frac{74}{9}\ln\frac{3}{2}.$$

Ответ: масса пластинки $m = \dfrac{74}{9}\ln\dfrac{3}{2}$.

Вычисление статических моментов и координат центра тяжести плоских фигур.

Статические моменты плоской фигуры с поверхностной плотностью $\gamma = \gamma(x, y)$ относительно осей координат определяются по формулам:

$$S_x = \iint\limits_D y\gamma(x,y)dxdy,$$

$$S_y = \iint\limits_D x\gamma(x,y)dxdy. \qquad (1.29)$$

Координаты центра тяжести плоской фигуры определяются формулами:

$$x_c = \frac{S_y}{m} = \frac{\iint\limits_D x\gamma(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \gamma(x,y)dxdy},$$

$$y_c = \frac{S_x}{m} = \frac{\iint\limits_D y\gamma(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \gamma(x,y)dxdy}. \qquad (1.30)$$

Пример 13. Определить центр масс пластины, ограниченной кордеоидой $\rho = 1 + \cos\varphi$, считая плотность $\gamma(x, y) = 1$.

Решение: Вычислим массу пластинки по формуле (1.28). Пластина, ограниченная заданной кривой изображена на рисунке 17.

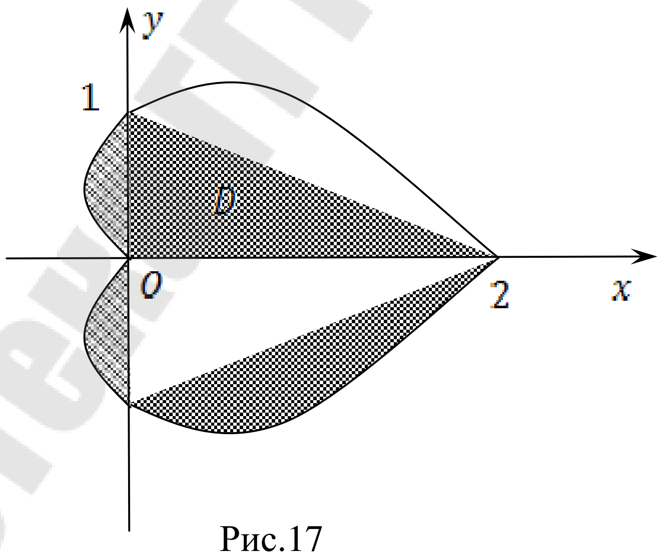


Рис.17

Полюс $O(0,0)$ лежит на границе области, область симметрична относительно оси Oy, поэтому, согласно (1.18), двойной интеграл по области D' преобразуется к повторному следующим образом:

$$m=\gamma\iint\limits_{D'}\rho d\rho d\varphi=2\gamma\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{1+\cos\varphi}\rho d\rho=\gamma\int\limits_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi=$$

$$=\gamma\int\limits_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi=\gamma\int\limits_0^{\pi}\left(1+\cos\varphi+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\gamma\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi=\gamma\left(\frac{3}{2}\varphi-2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi}=\pi\gamma\,\frac{3}{2}.$$

Вычислим статические моменты пластинки по формулам (1.29):

$$S_x=\iint\limits_{D}y\gamma dxdy=\gamma\iint\limits_{D'}\rho\sin\varphi\rho d\rho d\varphi=\gamma\int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^{1+\cos\varphi}\rho^2 d\rho=$$

$$=\frac{1}{3}\gamma\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^3\sin\varphi d\varphi=-\frac{1}{3}\gamma\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^3 d(\cos\varphi)=$$

$$=-\frac{1}{12}\gamma(1+\cos\varphi)^4\Bigg|_0^{2\pi}=0.$$

$$S_y=\iint\limits_{D}x\gamma dxdy=\gamma\iint\limits_{D'}\rho\cos\varphi\,\rho d\rho d\varphi=\gamma\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{1+\cos\varphi}\rho^2 d\rho=$$

$$=\frac{\gamma}{3}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^3\cos\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{\gamma}{3}\int\limits_0^{2\pi}(\cos\varphi+3\cos^2\varphi+3\cos^3\varphi+\cos^4\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{\gamma}{3}\int\limits_0^{2\pi}\left(\cos\varphi+\frac{3}{2}(1+\cos 2\varphi)+3(1-\sin^2\varphi)\cos\varphi+\frac{1}{4}(1+\cos 2\varphi)^2\right)d\varphi=$$

$$=\frac{\gamma}{3}\left[\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi+\frac{3}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi+3\int\limits_0^{2\pi}(1-\sin^2\varphi)d(\sin\varphi)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}(1+2\cos 2\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi\right]=\frac{\gamma}{3}\left[\sin\varphi|_0^{2\pi}+\frac{3}{2}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}+\right.$$

$$\left.+3\left(\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}+\left(\frac{\varphi}{4}+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}+\frac{1}{8}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos 4\varphi)d\varphi\right]=$$

$$= \frac{\gamma}{3}\left[3\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{8}\left(\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}\right] = \frac{\gamma}{3}\left(3\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi\gamma}{4}.$$

Координаты центра тяжести вычислим по формулам (1.30)

$$x_C = \frac{S_y}{m} = \frac{5\pi\gamma}{4} : \frac{3\pi\gamma}{2} = \frac{5}{6};\; y_C = \frac{S_x}{m} = 0.$$

Ответ: центр масс кардиоиды находится в точке $\left(\frac{5}{6};0\right)$.

Вычисление моментов инерции материальной пластинки.

Моменты инерции относительно начала координат, осей Ox и Oy материальной пластинки D, с непрерывно распределенной поверхностной плотностью $\gamma(x,y)$ определяются по следующим формулам:

$$I_0 = \iint_D \left(x^2 + y^2\right)\gamma(x,y)dxdy,$$

$$I_x = \iint_D y^2\gamma(x,y)dxdy, \qquad (1.31)$$

$$I_y = \iint_D x^2\gamma(x,y)dxdy.$$

Пример 14. Вычислить моменты инерции относительно начала координат и координатных осей пластинки, плотностью $\gamma(x,y) = x^2 y$, лежащей в плоскости xOy и ограниченной линиями $y = x^2$, $\quad y = 1$.

Решение: Изобразим область D:

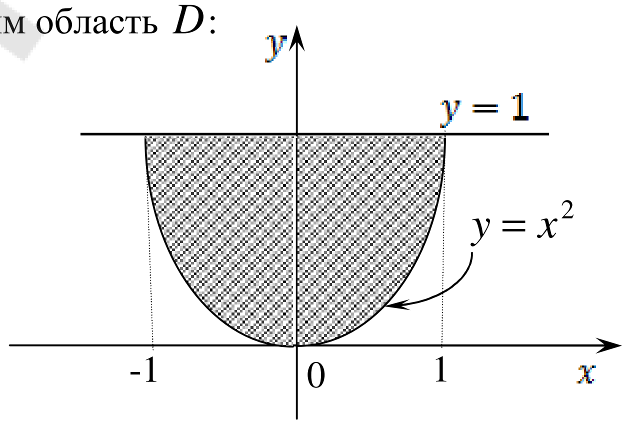


Рис. 18

Момент инерции найдем по формуле (1.31)

$$I_0 = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) x^2 y dxdy = 2\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 \left(x^4 y + x^2 y^3\right) dy =$$

$$= 2\int_0^1 dx \left(\frac{x^4 y^2}{2} + \frac{x^2 y^4}{4}\right)\Bigg|_{x^2}^1 = 2\int_0^1 dx \left(\frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^8}{2} - \frac{x^{10}}{4}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{x^5}{10} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^9}{18} - \frac{x^{11}}{44}\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \frac{1}{18} - \frac{1}{44}\right) = \frac{104}{495}.$$

$$I_x = \iint_D y^2 x^2 y dxdy = 2\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 x^2 y^3 dy = 2\int_0^1 dx \frac{x^2 y^4}{4}\Bigg|_{x^2}^1 = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2 - x^{10}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^{11}}{11}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{11}\right) = \frac{4}{33}.$$

$$I_y = \iint_D x^2 x^2 y dxdy = 2\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 x^4 y dy = 2\int_0^1 dx \frac{x^4 y^2}{2}\Bigg|_{x^2}^1 = \int_0^1 \left(x^4 - x^8\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^9}{9}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}.$$

Ответ: $I_0 = \dfrac{104}{495}$; $\quad I_x = \dfrac{4}{33}$; $\quad I_y = \dfrac{4}{45}$.

Задания

<u>*Задание 1.12.*</u> Вычислить массу плоской фигуры D, поверхностная плотность которой равна γ :

1) D: $\quad x + y = 1; \quad x + y = 2; \quad 2x - y = 0; \quad 4x - y = 0; \quad \gamma(x, y) = 1.$

2) D: $\quad x^2 + y^2 \ge 9; \quad x^2 + y^2 \le 16; \quad x \ge 0; \quad y \le 0; \quad \gamma = xy.$

3) Вычислить массу квадратной пластины со стороной a, в каждой точке которой поверхностная плотность пропорциональна сумме ее расстояний до диагоналей квадрата.

4) Вычислить массу пластинки, ограниченной лемнискатой $\left(x^2+y^2\right)^2=8xy$, если поверхностная плотность пластинки в каждой точке равна квадрату расстояния от этой точки до начала координат.

Задание 1.13. Найти координаты центра тяжести однородных пластин, ограниченных линиями:

5) $x-y=0; x+y-4=0; x-2y-4=0$.

6) $y^2=4x+4; y^2=-2x+4$.

7) $\rho=a\sin 2\varphi$ (одной петли).

8) $x^2+y^2=2Rx; x^2+y^2=Rx$

Задание 1.14. Найти моменты инерции следующих однородных плоских фигур:

9) $x^2+y^2\le x$ относительно оси Ox.

10) $y=2\sqrt{x}; x+y=3; x=0; y=0$ относительно оси Ox.

11) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ относительно его большей оси.

12) $\rho=a(1-\cos\varphi)$ относительно начала координат.

Ответы: **1.** $\frac{1}{5}$; **2.** $\frac{175}{8}$; **3.** $\frac{\sqrt[3]{2}}{3}ka$; **4.** 2π; **5.** $C\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$; **6.** $C\left(\frac{2}{5};0\right)$;

7. $C\left(\frac{128a}{105\pi};\frac{128a}{105\pi}\right)$; **8.** $C\left(\frac{7}{6}R;0\right)$; **9.** $\frac{1}{64}\pi$; **10.** 2,4; **11.** $\frac{1}{4}\pi ab^3$; **12.** $\frac{35}{16}\pi a^4$.

2. Тройной интеграл

2.1 Тройной интеграл и его вычисление прямоугольных координатах.

Пусть функция $u = f(x, y, z)$ непрерывна в замкнутой области $V \in R^3$, ограниченной некоторой кусочно-гладкой поверхностью S. С помощью произвольных гладких поверхностей разобьем область V на n элементарных ячеек V_i. Объем каждой ячейки обозначим через ΔV_i, диаметр - через d_i. Внутри каждой ячейки V_i выберем произвольную точку $P_i(x_i, y_i, z_i)$ и построим сумму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i \ . \qquad (2.1)$$

Построенная сумма называется n-ой интегральной суммой для функции $f(x, y, z)$ в области V.

Определение: Тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области V называется предел интегральных сумм (2.1) при $d \to 0$, где $d = \max\{d_1, d_2, ..., d_n\}$

Таким образом, согласно определению

$$\iiint_V f(x, y, z) dxdydz = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i \ . \qquad (2.2)$$

Свойства тройного интеграла полностью аналогичны свойствам двойного интеграла. (см. 1.1)

Геометрический смысл тройного интеграла

Тройной интеграл по трехмерной области V от $f(x, y, z) = 1$ равен объему области V.

$$V = \iiint_V dxdydz. \qquad (2.3)$$

Физические приложения тройного интеграла

- Если $\gamma(x, y, z)$ считать объемной плотностью вещества, распределенного в области V, то тройной интеграл (2.2) численно равен массе всего вещества, заключенного в объеме V:

$$m = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\, dxdydz\ . \tag{2.4}$$

- Статические моменты тела относительно координатных плоскостей равны:

$$S_{xy} = \iiint\limits_V z\gamma(x, y, z)\, dxdydz; \quad S_{xz} = \iiint\limits_V y\gamma(x, y, z)\, dxdydz;$$

$$S_{yz} = \iiint\limits_V x\gamma(x, y, z)\, dxdydz. \tag{2.5}$$

- Координаты центра масс тела:

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m} = \frac{\iiint\limits_V x\gamma(x, y, z)\, dxdydz}{\iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\, dxdydz},$$

$$y_c = \frac{S_{xz}}{m} = \frac{\iiint\limits_V y\gamma(x, y, z)\, dxdydz}{\iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\, dxdydz}, \tag{2.6}$$

$$z_c = \frac{S_{xy}}{m} = \frac{\iiint\limits_V z\gamma(x, y, z)\, dxdydz}{\iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\, dxdydz}.$$

- Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат:

$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2\gamma(x, y, z)\, dxdydz; \quad I_{xz} = \iiint\limits_V y^2\gamma(x, y, z)\, dxdydz;$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_V x^2\gamma(x, y, z)\, dxdydz; \tag{2.7}$$

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}; \quad I_y = I_{xy} + I_{yz}; \quad I_z = I_{xz} + I_{yz}; \tag{2.8}$$

$$I_0 = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz}\ . \tag{2.9}$$

Вычисление тройных интегралов.

Пусть область V ограничена сверху и снизу однозначными и непрерывными поверхностями $z = z_2(x, y)$ и $z = z_1(x, y)$, а с боков цилиндрической поверхностью, параллельной оси Oz. Она обладает следующими свойствами:

- Всякая прямая, проведенная через внутреннюю точку области V параллельно оси Oz пересекает границу области ровно два раза.
- Вся область V проецируется на плоскость xOy в двумерную область D.

Аналогичным образом определяется область правильная в направлении Ox и Oy. Область правильная в направлениях Ox, Oy, Oz одновременно называется правильной областью. Если область является правильной в направлении Oz (ограниченной сверху и снизу функциями $z_2(x, y)$ и $z_1(x, y)$) и проектируется в область D_{xy} плоскости xOy (рис.19), то тройной интеграл по области V вычисляется следующим образом:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz. \tag{2.10}$$

Если область D ограничена сверху и снизу кривыми $y = y_2(x)$ и $y = y_1(x)$, а справа и слева прямыми $x = a$ и $x = b$, то тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$ по области V вычисляется следующим образом:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz \tag{2.11}$$

Интеграл стоящий в правой части (2.11) называется трехкратным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области V.

Если область V не является правильной ни в одном из направлений, то проведя плоскости, параллельные координатным плоскостям, ее разбивают на конечное число правильных областей.

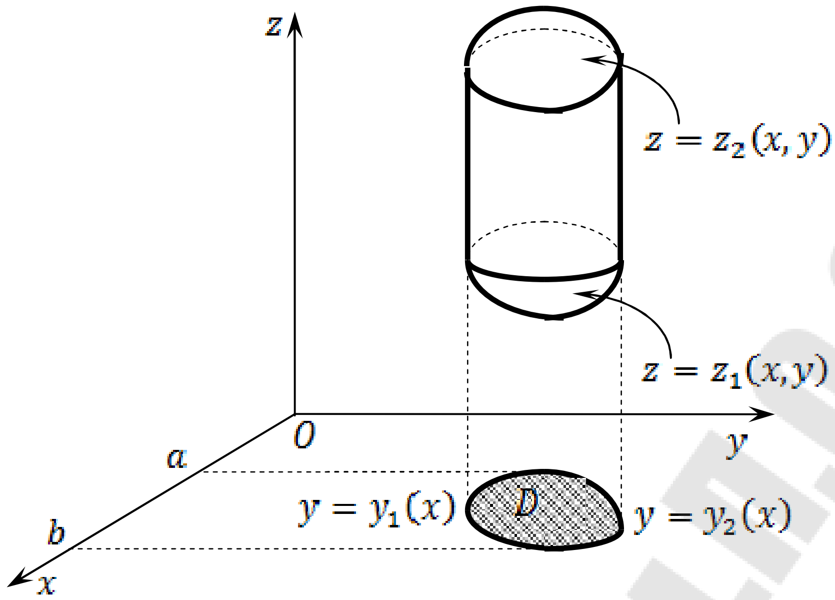


Рис. 19

Таким образом, для вычисления тройного интеграла от функции $f(x, y, z)$ по области V следует:

- Изобразить область интегрирования. Определить, является ли она правильной. Если область не является правильной, разбить ее на конечное число правильных областей. Найти явные выражения для границ области.
- Построить проекцию области на соответствующую координатную плоскость (построить двумерную проекцию D). Определить границы области D.
- Записать тройной интеграл либо в виде (2.10), либо в виде (2.11). Вычислить внутренний интеграл. Например, в случае области, правильной в направлении Oz вычисляется внутренний интеграл по переменной z при фиксированных, но произвольных в области D_{xy} x и y. В результате получается некоторая функция $f_1(x, y)$.
- Вычисляем получившийся двойной интеграл по правилам, изложенным ранее.

Пример 15. Вычислить трехкратный интеграл

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(4x + 3y + z - 2)^6}.$$

Решение: Вычисляем внутренний интеграл по z

$$\int\limits_0^{1-x-y}\frac{dz}{(4x+3y+z-2)^6}=\int\limits_0^{1-x-y}\frac{d(4x+3y+z-2)}{(4x+3y+z-2)^6}=$$

$$=-\frac{1}{5}\frac{1}{(4x+3y+z-2)^5}\Bigg|_0^{1-x-y}=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{(4x+3y+1-x-y-2)^5}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(4x+3y-2)^5}\right)=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{(3x+2y-1)^5}-\frac{1}{(4x+3y-2)^5}\right).$$

Найденную функцию $f_1(x,y)$ подставим в заданный трехкратный интеграл:

$$I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\left(-\frac{1}{5}\right)\left[\frac{1}{(3x+2y-1)^5}-\frac{1}{(4x+3y-2)^5}\right]dy=$$

$$=-\frac{1}{5}\int\limits_0^1\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{(3x+2y-1)^4}\Bigg|_0^{1-x}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{(4x+3y-2)^4}\Bigg|_0^{1-x}\right]=$$

$$=\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(\frac{1}{(3x+2(1-x)-1)^4}-\frac{1}{(3x-1)^4}\right)dx-$$

$$-\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{3}\int\limits_0^1\left(\frac{1}{(4x+3(1-x)-2)^4}-\frac{1}{(4x-2)^4}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{20}\left[\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(\frac{1}{(x+1)^4}-\frac{1}{(3x-1)^4}\right)dx-\frac{1}{3}\int\limits_0^1\left(\frac{1}{(x+1)^4}-\frac{1}{(4x-2)^4}\right)dx\right]=$$

$$=\frac{1}{20}\left[\int\limits_0^1\left(\frac{1}{6}\frac{1}{(x+1)^4}-\frac{1}{2}\frac{1}{(3x-1)^4}+\frac{1}{3}\frac{1}{(4x-2)^4}\right)dx\right]=$$

$$=\frac{1}{20}\left[\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{(x+1)^3}\Bigg|_0^1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{(3x-1)^3}\Bigg|_0^1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{(4x-2)^3}\Bigg|_0^1\right]=$$

$$=-\frac{1}{60}\left[\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{8}\right]=-\frac{1}{144}$$

Пример 16. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями:

$y = x, \quad y = 0, x = 1, \quad z = 1, \quad z = 1 + x^2 + y^2$.

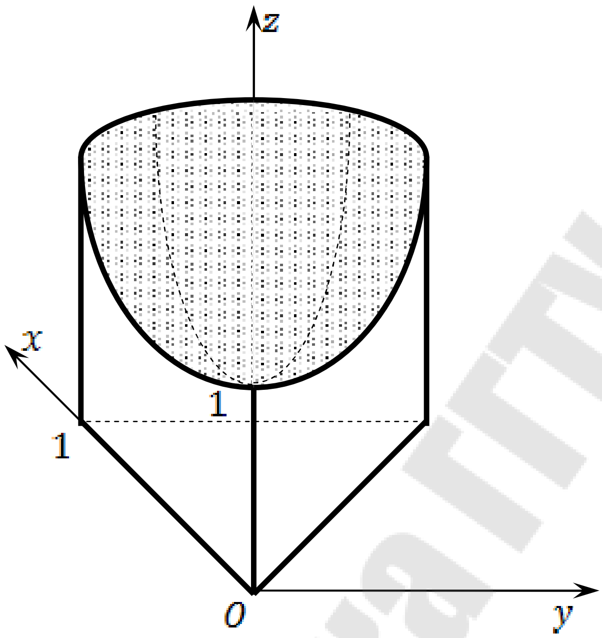
Решение: Построим заданную область и ее проекцию D на плоскость xOy (рис.20), учитывая, что $y = x$ - плоскость пересекающая плоскость xOy по прямой $y = x$, параллельная оси Oz.

$y = 0$ - плоскость xOz

$x = 1$ - плоскость, параллельная yOz , xOy проходящая через $x = 1$

$z = 1$ - плоскость, параллельная xOy, проходящая через $z = 1$

$z = 1 + x^2 + y^2$ - параболоид с вершиной в т. $(0;0;1)$.



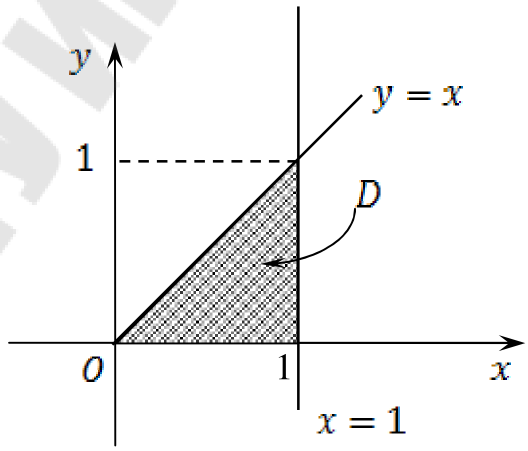


Рис. 20

Тогда

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_1^{1+x^2+y^2} f(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_1^{1+x^2+y^2} f(x,y,z)dz.$$

Пример 17. Найти объем области, ограниченной указанными поверхностями:
$V: \quad 2z = y^2, \quad 3x + 2y = 12, \quad x = 0, \quad z = 0.$

Решение: Построим заданную область V, учитывая, что
$2z = y^2$ - параболический цилиндр (желоб), «надетый» на ось Ox,
$3x + 2y = 12$ - плоскость, параллельная оси Oz, $x = 0$ - плоскость yOz
$z = 0$ - плоскость xOy. Таким образом: (рис.21)

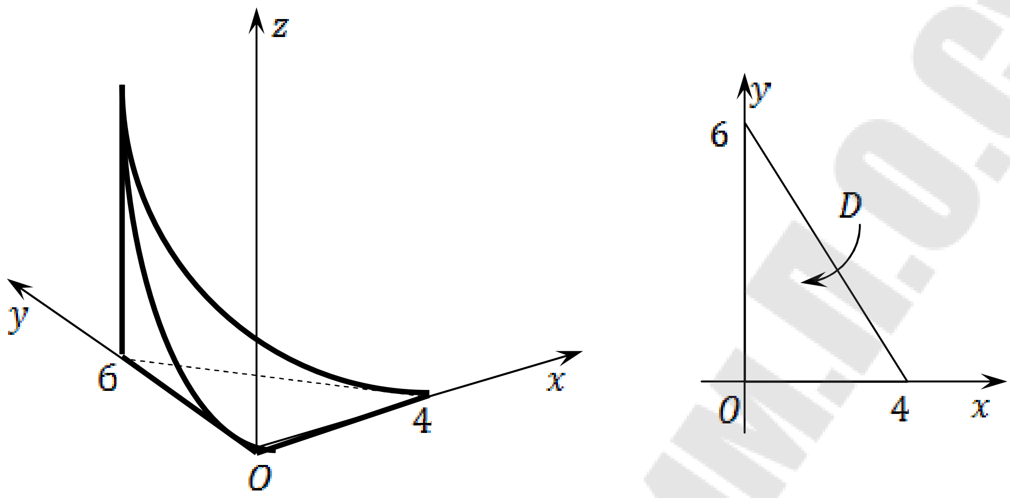


Рис. 21

Согласно (2.3) искомый объем равен:

$$V = \iiint_V dxdydz = \iint_D dxdy \int_0^{y^2/2} dz = \iint_D dxdy z\Big|_0^{y^2/2} = \frac{1}{2}\iint_D y^2 dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 dx \int_0^{6-\frac{3}{2}x} y^2 dy = \frac{1}{2}\int_0^4 dx \frac{y^3}{3}\Big|_0^{6-\frac{3}{2}x} = \frac{1}{6}\int_0^4 \left(6 - \frac{3}{2}x\right)^3 dx =$$

$$\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{4}\left(6 - \frac{3}{2}x\right)^4\Big|_0^4 = -\frac{1}{36}\left[(6-6)^4 - 6^4\right] = 36\ ед^3.$$

Пример 18. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного плоскостями $x + y + z = a, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$

Решение: Для решения задачи воспользуемся формулами (2.6)

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{S_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{S_{xy}}{m},$$

$$m = \iiint_V \gamma(x, y, z)\,dxdydz,$$

$$S_{yz} = \iiint_V x\gamma(x, y, z)\,dxdydz, S_{xz} = \iiint_V y\gamma(x, y, z)\,dxdydz, S_{xy} = \iiint_V z\gamma(x, y, z)\,dxdydz.$$

По условию задачи $\gamma(x, y, z) = \gamma$.

Построим область V и ее проекцию на плоскость xOy - область D (рис.22).

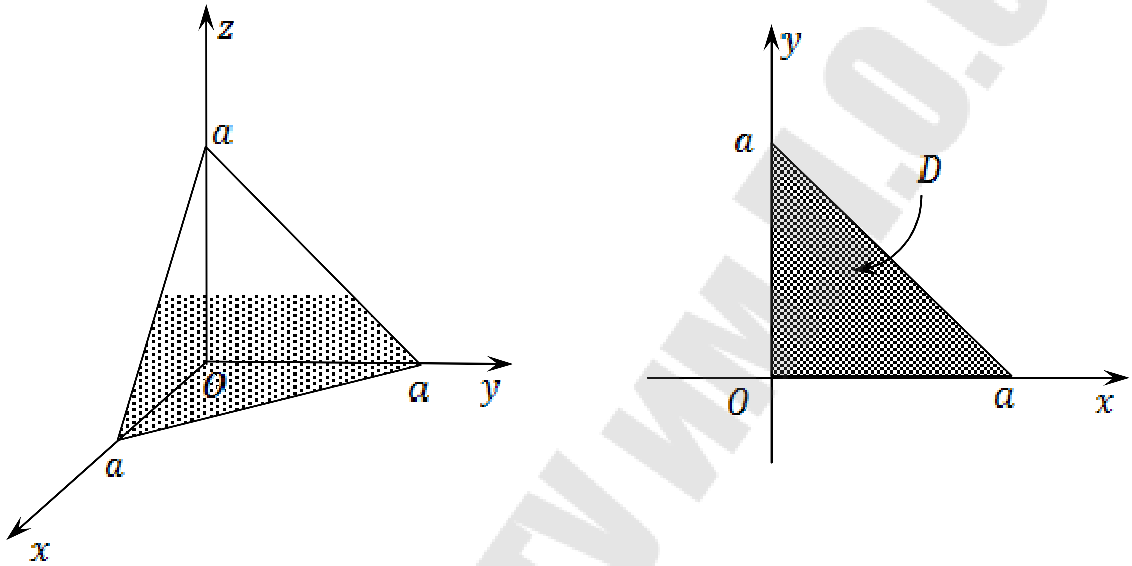


Рис. 22

В силу симметрии области $S_{xy} = S_{xz} = S_{yz}$

$$m = \iiint_V \gamma dxdydz = \gamma \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{a-x-y} dz = \gamma \int_0^a dx \int_0^{a-x} (a - x - y)dy =$$

$$= \gamma \int_0^a dx \left[(a-x)y - \frac{y^2}{2} \right]\Bigg|_0^{a-x} = \gamma \int_0^a \left[(a-x)^2 - \frac{(a-x)^2}{2} \right] dx =$$

$$= \frac{\gamma}{2} \int_0^a (a-x)^2\, dx = -\frac{\gamma}{2} \frac{(a-x)^3}{3} \Bigg|_0^a = \frac{\gamma a^3}{6}.$$

$$S_{yz}=\iiint\limits_V x\gamma\,dxdydz=\gamma\int\limits_0^a xdx\int\limits_0^{a-x}dy\int\limits_0^{a-x-y}dz=\gamma\int\limits_0^a xdx\int\limits_0^{a-x}(a-x-y)dy=$$

$$=\gamma\int\limits_0^a \frac{x(a-x)^2}{2}dx=\frac{\gamma}{2}\int\limits_0^a\left(xa^2-2ax^2+x^3\right)dx=\frac{\gamma}{2}\left(\frac{a^2x^2}{2}-\frac{2ax^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^a=$$

$$=\frac{\gamma}{2}\left(\frac{a^4}{2}-\frac{2a^4}{3}+\frac{a^4}{4}\right)=\frac{\gamma\,a^4}{24}.$$

Таким образом $x_c=\dfrac{\gamma a^4}{24}\Big/\dfrac{\gamma a^3}{6}=\dfrac{a}{4};\quad x_c=y_c=z_c$.

Ответ: координаты центра масс тела $\left(\dfrac{a}{4};\dfrac{a}{4};\dfrac{a}{4}\right)$.

Задания

Задание 2.1. Изобразить область V и расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями:

1) $V:\quad -1\le x\le 1;\quad 0\le y\le 1;\quad 0\le z\le 2$.
2) $V:\quad x+y+z=1\quad x=0;\quad y=0;\quad z=0$.
3) $V:\quad z=2-x^2\quad x+y=1;\quad x=0;\quad y=0;\quad z=0$.
4) $V:\quad z=\sqrt{1-x^2-y^2};\quad z=0;\quad y=x;\quad y=2x$.

Задание 2.2. Вычислить следующие тройные интегралы:

5) $\iiint\limits_V(2x+3y+z+1)dxdydz$, где (V) куб $0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1;\ 0\le z\le 1$.

6) $\iiint\limits_V(x+y+z+1)dxdydz$, где (V) - призма, ограниченная плоскостями $x+y=a,\quad z=0,\quad z=c,\quad x=0,\quad y=0.$

7) $\iiint\limits_V\dfrac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, где (V) - треугольная пирамида, ограниченная координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=1$.

8) $\iiint\limits_{V} xyzdxdydz$, где (V)- ограничена поверхностями: $z = xy$, $z = 0$, $y = x^2$ и $x = y^2$.

Задание 2.3. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями:

9) $x + y = 2$; $y = 3$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

10) $y^2 = 4x + 4$; $y^2 = -2x + 4$; $z = 3$; $z = 0$.

11) $6x + 4y + 3z = 12$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

12) $z = 1 - y^2$; $z = \sqrt{1 - y^2}$; $x = 0$; $x = 6$.

Задание 2.4. Найти координаты центра масс тела, ограниченного указанными поверхностями, при заданной плотности $\gamma(x, y, z)$.

13) $2x + 3y - 12 = 0$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $z = \frac{1}{2}y^2$; $\gamma(x, y, z) = 1$.

14) $0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1;\ 0 \le z \le 1;$
$\gamma(x, y, z) = x^{(2a-1)/(1-a)} y^{(2b-1)/(1-b)} z^{(2c-1)/(1-c)}$.

Задание 2.5.

15) Найти момент инерции относительно оси Ox однородного тела, ограниченного поверхностями $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

16) Вычислить момент инерции относительно плоскости yOz тела, ограниченного плоскостями $x + 2y - z = 5$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$, если его плотность $\gamma(x, y, z) = x$.

Ответы: **5.** 4; **6.** $\frac{ca^2}{12}(6 + 4a + 3c)$; **7.** $\frac{1}{2}\left(ln2 - \frac{5}{8}\right)$; **8.** $\frac{1}{96}$; **9.** 4; **10.** 6;

11. 24; **12.** $8 + 3\pi$; **13.** $C\left(\frac{6}{5}; \frac{12}{5}; \frac{8}{5}\right)$; **14.** $C(a; b; c)$; **15.** $\frac{abc}{60}(b^2 + c^2)$; **16.** $\frac{4}{15}$.

2.2 Замена переменных в тройном интеграле.

Пусть в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ прямоугольные координаты x, y, z преобразуются к новым координатам u, υ, w, связанным с x, y, z соотношениями:

$$x = x(u;\upsilon;w); \quad y = y(u;\upsilon;w); \quad z = z(u;\upsilon;w); \tag{2.11}$$

При этом область V пространства $Oxyz$ отображается на область V' пространства $O'u\upsilon w$.

Если функции (2.11) имеют в V' непрерывные частные производные и якобиан преобразования

$$J(u,\upsilon,w) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial \upsilon} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial \upsilon} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial \upsilon} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \tag{2.12}$$

не обращается в ноль, то отображение V на V' взаимно-однозначно. Справедлива следующая формула замены переменных в тройном интеграле:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f\left(x(u,\upsilon,w), y(u,\upsilon,w), z(u,\upsilon,w)\right) \times$$
$$\times \left|J(u,\upsilon,w)\right| du d\upsilon\, dw. \tag{2.13}$$

В практических расчетах наиболее частым является переход к цилиндрическим и сферическим координатам.

Цилиндрические координаты.

В цилиндрических координатах положение точки $M(x_0, y_0, z_0)$ в пространстве определяется следующими тремя величинами (рис. 23).

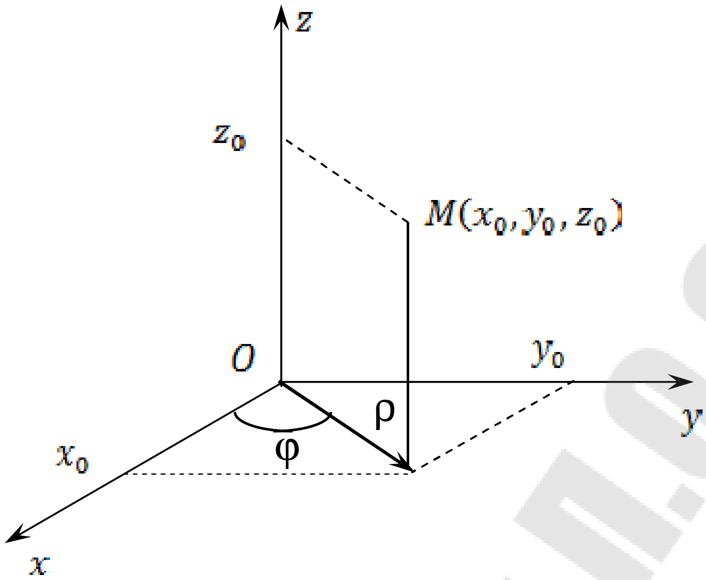


Рис. 23

- ρ - модулем радиус-вектора ρ проекции точки M на выбранную плоскость $\rho \geq 0$
- углом φ между радиус-вектором проекции точки М на плоскость и выбранным на ней направлением полярной оси Ox $\quad 0 \leq \varphi < 2\pi$
- расстоянием z от точки М до выбранной плоскости $-\infty < z < +\infty$.

Если в качестве плоскости выбрать плоскость xOy, а в качестве полярной оси Ox, то согласно рисунку 23, цилиндрические и декартовы координаты связаны следующими соотношениями:

$$x = \rho\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z. \qquad (2.14)$$

Якобиан преобразования, вычисленный по формуле (2.12) равен $J(\rho, \varphi, z) = \rho$, поэтому переход к цилиндрическим координатам осуществляется, согласно (2.13) по формуле

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{V'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz. \qquad (2.15)$$

Следует отметить, что переход к цилиндрическим координатам целесообразен в случае, когда область V проецируется на одну из координатных плоскостей в виде круга или его части.

Пример 19. Вычислить тройной интеграл, перейдя к цилиндрическим координатам

$\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz;$ $\quad (V)$ ограничена цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$, плоскостями $z = 0, \quad z = c$.

Решение: Проекцией области V на плоскость xOy будет круг $x^2+y^2=a^2$, сверху и снизу область V ограничена плоскостями $z=0$, $z=c$ (рис. 24). Перейдем к цилиндрическим координатам по формулам (2.14) и (2.15).

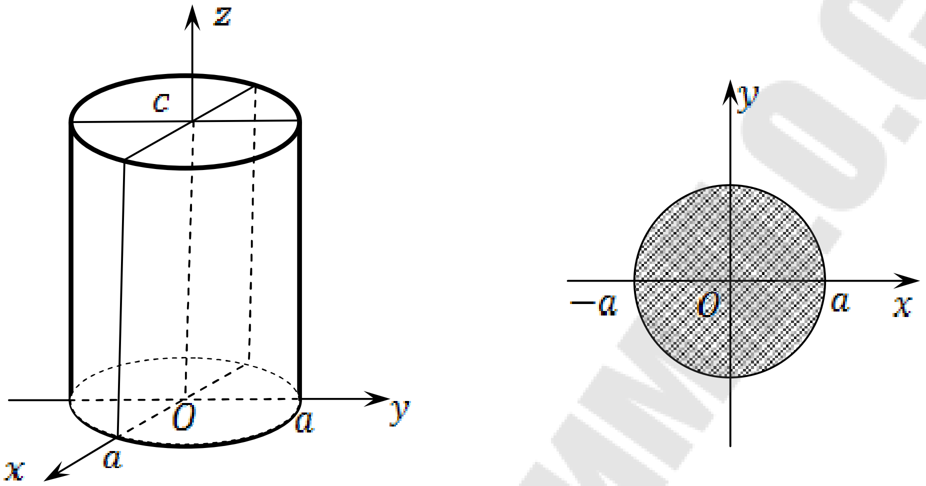


Рис. 24

$$\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=\iiint\limits_{V'}\left(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi+z^2\right)\rho d\rho d\varphi dz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\rho d\rho\int\limits_0^c\left(\rho^2+z^2\right)dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\rho d\rho\left.\left(\rho^2 z+\frac{z^3}{3}\right)\right|_0^c=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\left(\rho^3c+\rho\frac{c^3}{3}\right)d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left.\left(\frac{\rho^4}{4}c+\frac{\rho^2}{6}c^3\right)\right|_0^a=\left(\frac{a^4c}{4}+\frac{a^2c^3}{6}\right)\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=$$

$$=\left.\frac{a^2c\left(3a^2+2c^2\right)}{12}\varphi\right|_0^{2\pi}=\frac{a^2c}{6}\left(3a^2+2c^2\right)\pi.$$

Ответ: $\dfrac{a^2c}{6}\left(3a^2+2c^2\right)\pi$.

Сферические координаты.

Сферическими координатами точки $M(x_0, y_0, z_0)$ в пространстве являются следующие 3 величины (рис. 25).

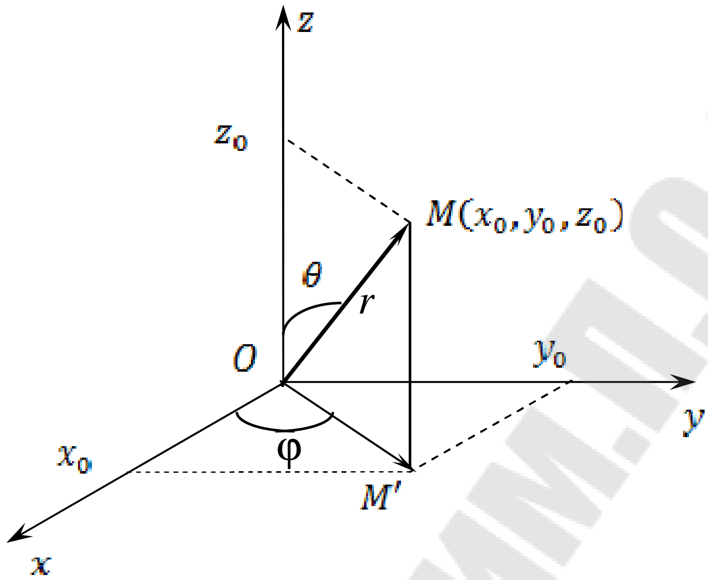


Рис. 25

- Длина r радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$, где O - выбранное начало координат, $z \geq 0$.
- Угол φ между проекцией радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ на выбранную плоскость, содержащую начало координат, и выбранным на этой плоскости направлением полярной оси $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.
- Угол θ между радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ и положительным направлением прямой, перпендикулярной выбранной плоскости и проходящей через 0. $0 \leq \theta \leq \pi$.

Если в качестве заданной плоскости выбрать плоскость xOy, в качестве полярной оси выбрать ось Ox, а положительным направлением прямой считать направление оси Oz, то декартовы координаты точки M связаны со сферическими соотношениями:

$$x = r\cos\varphi\sin\theta; \quad y = r\sin\varphi\sin\theta; \quad z = r\cos\theta. \qquad (2.16)$$

Вычисляя якобиан преобразования по формуле (2.12), находим $|J(r,\varphi,\theta)| = r^2\sin\theta$. Таким образом, при переходе к сферическим координатам, формула (2.13) принимает вид:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)r^2 \times$$
$$\times\sin\theta dr d\varphi d\theta. \qquad (2.17)$$

Переход к сферическим координатам удобен, если или уравнение границы области, или подинтегральная функция, или и то и другое одновременно содержат выражение $\left(x^2+y^2+z^2\right)^k$, которое в сферических координатах принимает вид $\left(x^2+y^2+z^2\right)^k = r^{2k}$.

Если уравнение границы области или подинтегральная функция, или и то и другое одновременно содержат выражение вида $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^k$, то целесообразно переходить к **обобщенным сферическим координатам** (эллиптическим) по следующим формулам:

$$x = ar\cos\varphi\sin\theta; \quad y = br\sin\varphi\sin\theta; \quad z = cr\cos\theta. \qquad (2.18)$$
$$r \ge 0;\ 0 \le \varphi \le 2\pi;\ 0 \le \theta \le \pi;\ a,b,c > 0$$

Модуль якобиана такого преобразования равен:

$|J(r,\varphi,\theta)| = abcr^2\sin\theta$ и формула (2.13) принимает вид:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = abc\iiint\limits_{V'} f(ar\cos\varphi\sin\theta, br\sin\varphi\sin\theta, cr\cos\theta)r^2 \times$$
$$\times\sin\theta dr d\varphi d\theta. \qquad (2.19.)$$

Пример 20. Перейдя к сферическим координатам, вычислить тройной интеграл

$\iiint\limits_V \sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}dxdydz$; (V)- верхняя половина шара $x^2+y^2+z^2 \le R^2$.

Решение: Перейдем к сферическим координатам по формулам (2.16). По условию задачи $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (верхняя половина шара $z \ge 0$) (рис. 26). Тогда, согласно (2.17)

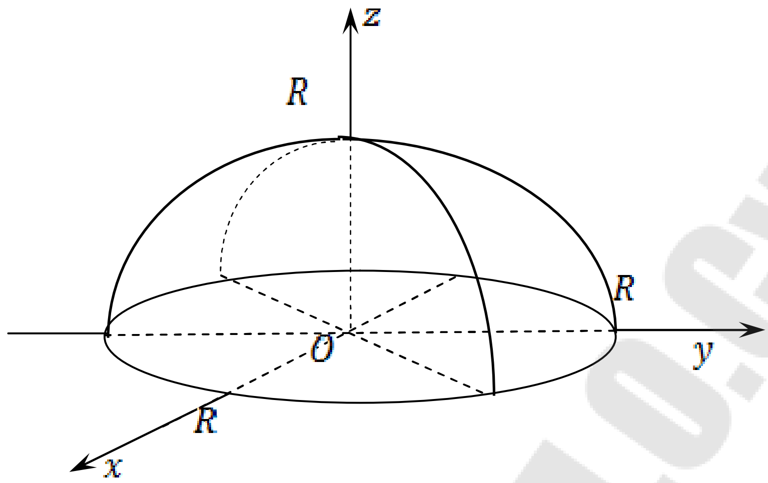


Рис. 26

$$\iiint\limits_V \sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}\,dxdydz = \iiint\limits_{V'} r^3 r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int\limits_0^R r^5 dr = \varphi\Big|_0^{2\pi} \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi/2} \frac{r^6}{6}\Big|_0^R = \frac{\pi R^6}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi R^6}{3}$.

<u>*Пример 21.*</u> Вычислить объем пространственной области V, если

$$V: \left\{ \left(\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{5} \right)^2 = xyz \right\}$$

<u>Решение.</u> Объем пространственной области V равен, согласно (2.3)

$$V = \iiint\limits_V dxdydz.$$

Для вычисления тройного интеграла перейдем к сферическим координатам по формулам (2.18)

$$x = \sqrt{3} r \cos\varphi \sin\theta; \quad y = 2r \sin\varphi \sin\theta; \quad z = \sqrt{5} r \cos\theta.$$

$$\left| J(r,\varphi,\theta) \right| = 2\sqrt{15} r^2 \sin\theta.$$

Область V отобразится в область V', ограниченную:

$$r^4 = 2\sqrt{15} r^3 \sin\varphi \cos\varphi \sin^2\theta \cos\theta \quad \text{или}$$

$$r = 2\sqrt{15} \sin\varphi \cos\varphi \sin^2\theta \cos\theta.$$

Из условия $r \geq 0$, получаем следующие разрешенные области для θ и φ

$$\begin{cases} 0<\theta<\dfrac{\pi}{2} \\ 0<\varphi<\dfrac{\pi}{2} \end{cases};\quad \begin{cases} 0<\theta<\dfrac{\pi}{2} \\ \pi<\varphi<\dfrac{3\pi}{2} \end{cases};\quad \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi \\ \dfrac{\pi}{2}<\varphi<\pi \end{cases};\quad \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi \\ \dfrac{3\pi}{2}<\varphi<2\pi \end{cases};$$

Очевидно, что объем всей области $V' = 4V_1$, где V_1' - объем области V_1:

$0 \le r \le \sqrt{15}\sin 2\varphi \sin^2\theta\cos\theta$,

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$,

$0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$.

Таким образом,

$$V = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^{\sqrt{15}\sin 2\varphi \sin^2\theta\cos\theta} 2\sqrt{15} r^2 dr =$$

$$= \frac{8\sqrt{15}}{3}\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta\, r^3 \Big|_0^{\sqrt{15}\sin 2\varphi \sin^2\theta\cos\theta} =$$

$$\frac{8\cdot 225}{3}\int_0^{\pi/2} \sin^3 2\varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^7\theta\cos^3\theta\, d\theta;$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 2\varphi d\varphi = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\varphi\, d(\cos 2\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \left(\cos^2 2\varphi - 1\right) d(\cos 2\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\cos^3 2\varphi}{3} - \cos 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos^3\pi}{3} - \cos\pi - \frac{\cos^3 0}{3} + \cos 0\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1\right) = \frac{2}{3}.$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^7\theta\cos^3\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^7\theta\cos^2\theta d(\sin\theta) = \{\sin\theta = t\} =$$

$$= \int_0^1 \left(1-t^2\right) t^7 dt = \int_0^1 \left(t^7 - t^9\right) dt = \left(\frac{t^8}{8} - \frac{t^{10}}{10}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{10} = \frac{1}{40}.$$

Таким образом, искомый объем V равен:

$$V = \frac{8\cdot 225}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{40} = 10\,(ed)^3$$

Задания

Задание 2.6. Вычислить тройной интеграл, переходя к цилиндрическим координатам.

1) $\iiint\limits_V (5x-3z)dxdydz$, где (V) ограничена цилиндром $x^2+y^2=1$ и плоскостями $z=4,\ 2x-3y+z=0$.

2) $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, где (V) ограничена цилиндром $x^2+y^2=2x$ и плоскостями $y=0,\ z=0,\ z=3$.

3) $\iiint\limits_V \frac{xzdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где (V) ограничена цилиндром $x^2+y^2=4y$ и плоскостями $y+z=4,\ z=0\,(z\geq 0)$.

4) $\iiint\limits_V x^2y^2dxdydz$, где (V) ограничена цилиндром $x^2+y^2=1$; параболоидом $z=x^2+y^2$ и плоскостью $z=0$.

Задание 2.7. Вычислить тройной интеграл, переходя к сферическим координатам.

5) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, (V) ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=R^2$.

6) $\iiint\limits_V xyzdxdydz,$ (V) ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=1$ и координатными плоскостями.

7) $\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz,$ где (V) - шар радиуса R с центром в точке $O(a,b,c)$.

8) $\iiint\limits_V (x+y+z)^2dxdydz,$ (V) - общяя часть параболоида $z\geq\frac{x^2+y^2}{2a}$ и шара $x^2+y^2+z^2\leq 3a^2$.

Задание 2.8. Переходя к цилиндрическим или сферическим координатам, вычислить объемы заданных областей:

9) $V\colon x^2+y^2=Rx;\ x^2+y^2+z^2=R^2;\ z=0.$

10) $V\colon 2-z-x^2-y^2=0;\ \ z=\sqrt{x^2+y^2}.$

11) V - область, полученная удалением из шара $x^2+y^2+z^2\leq R^2$, конуса $3(x^2+y^2)\leq z^2$.

12) $V: (x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$.

Задание 2.9.

13) Найти массу шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2x$, плотность которого в каждой точке равна расстоянию от этой точки до начала координат.

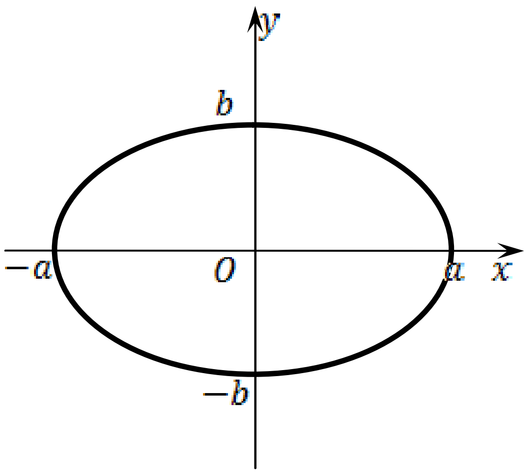
Задание 2.10.

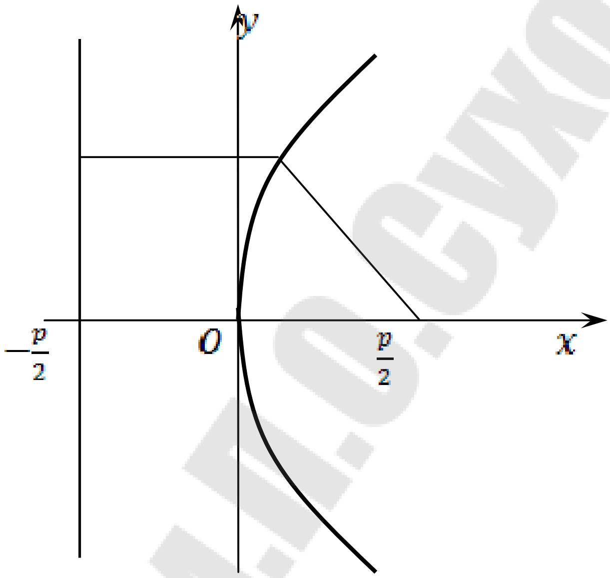
14) Определить момент инерции однородного $(\gamma = 1)$ цилиндра, высота которого h и радиус основания R, относительно диаметра основания и относительно оси цилиндра, считая, что ось цилиндра направлена по оси Ox.

Ответы: **1.** $-\frac{133}{8}\pi$; **2.** 8; **3.** $\frac{64}{3}$; **4.** $\frac{\pi}{32}$; **5.** πR^4; **6.** $\frac{1}{48}$; **7.** $\frac{4}{3}\pi R^3(a+b+c)$; **8.** $\frac{1}{5}\pi a^5\left(18\sqrt{3} - \frac{97}{6}\right)$; **9.** $\frac{R^3}{9}(3\pi - 4)$; **10.** $\frac{5}{6}\pi$; **11.** $\frac{2}{3}\pi R^3\sqrt{3}$; **12.** $\frac{1}{2}$; **13.** $\frac{8}{5}\pi$;

14. $I_z = \frac{1}{12}\pi R^2 h(4h^2 + 3R^2)$; $I_x = \frac{1}{2}\pi R^4 h$.

ПРИЛОЖЕНИЕ



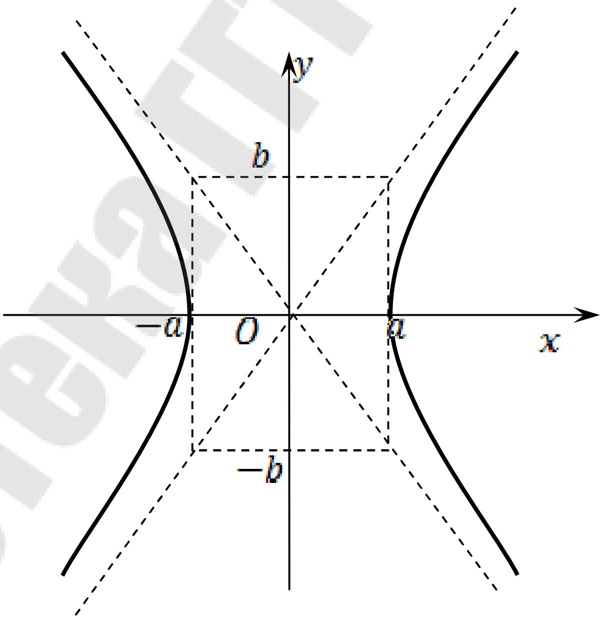


Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

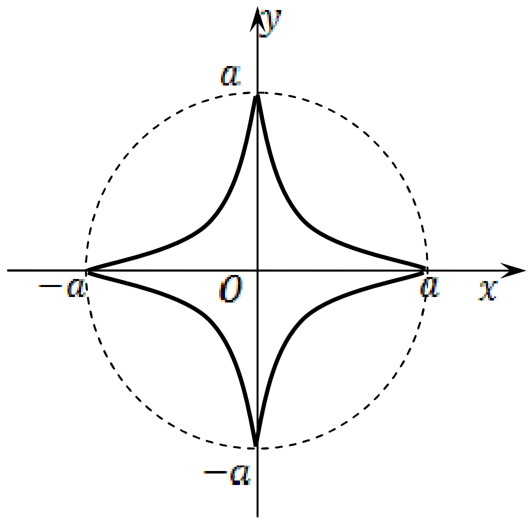
Парабола

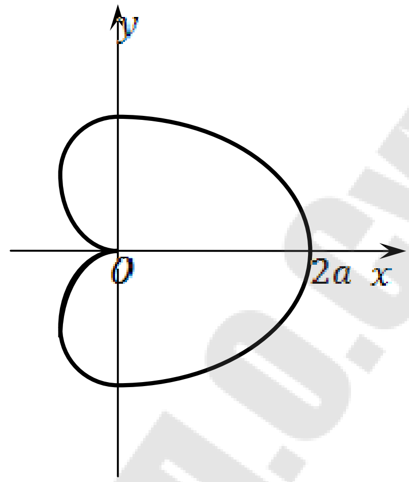
$$y^2 = 2px$$



Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = a\,cht \\ y = b\,sht \end{cases} \quad \text{(для правой ветви)}$$



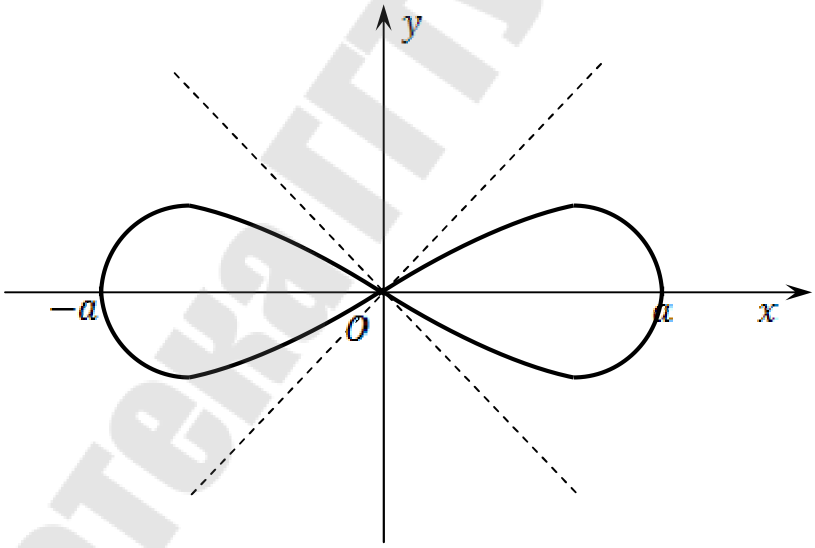


Гипоциклоида (астроида)

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad \text{или} \quad x^{3/2} + y^{3/2} = a^{3/2}$$

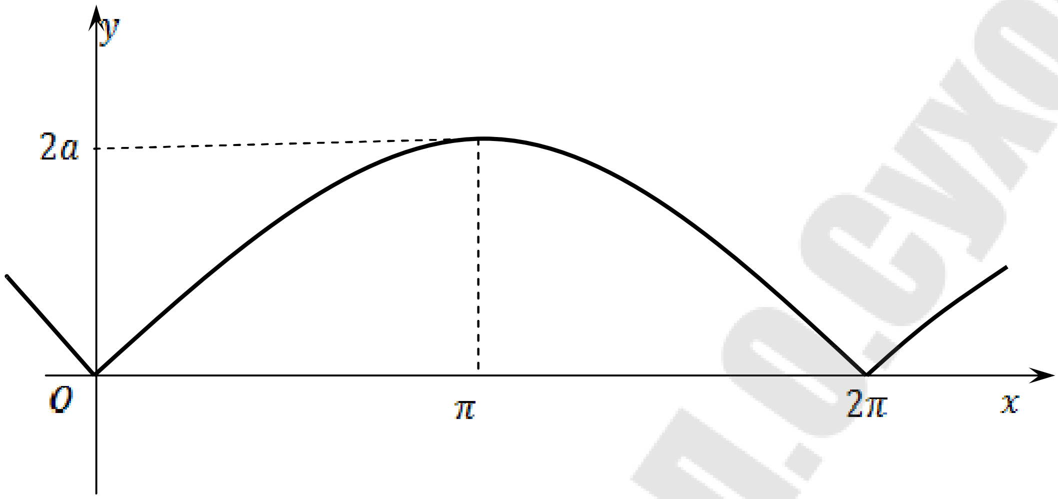
Кардиоида

$$r = a(1 + \cos\varphi)$$



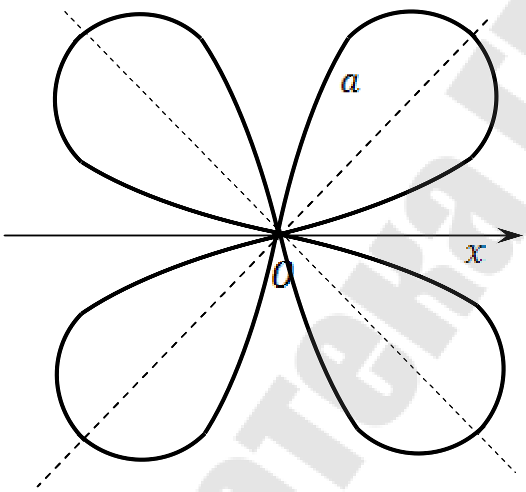
Лемниската Бернулли

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad \text{или} \quad r^2 = a^2\cos 2\varphi.$$



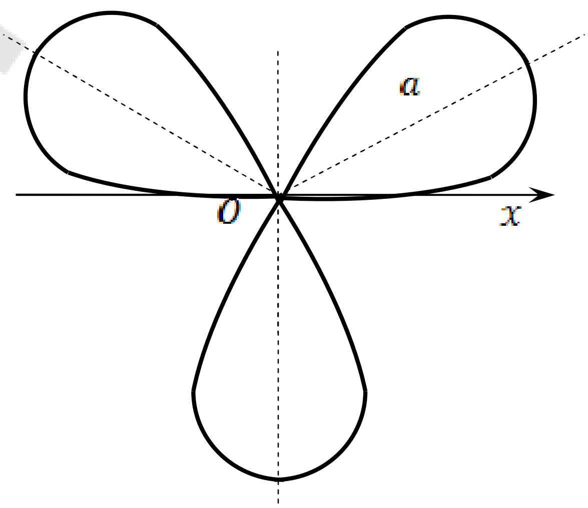
Циклоида

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$



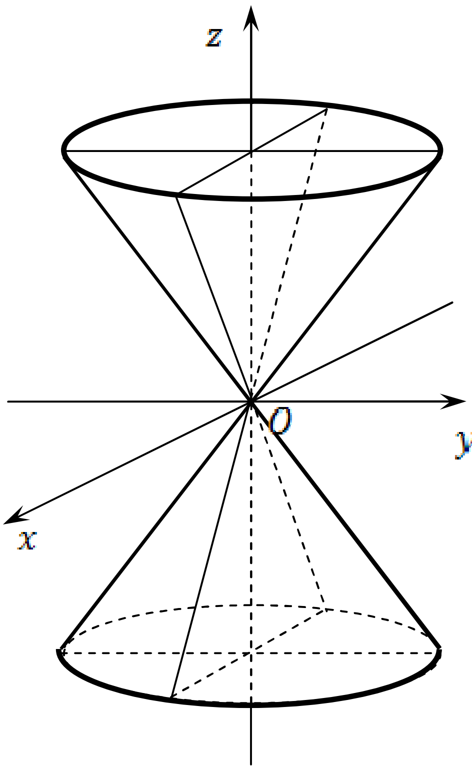
Четырехлепестковая роза

$$r = a\,|\sin 2\varphi\,|$$



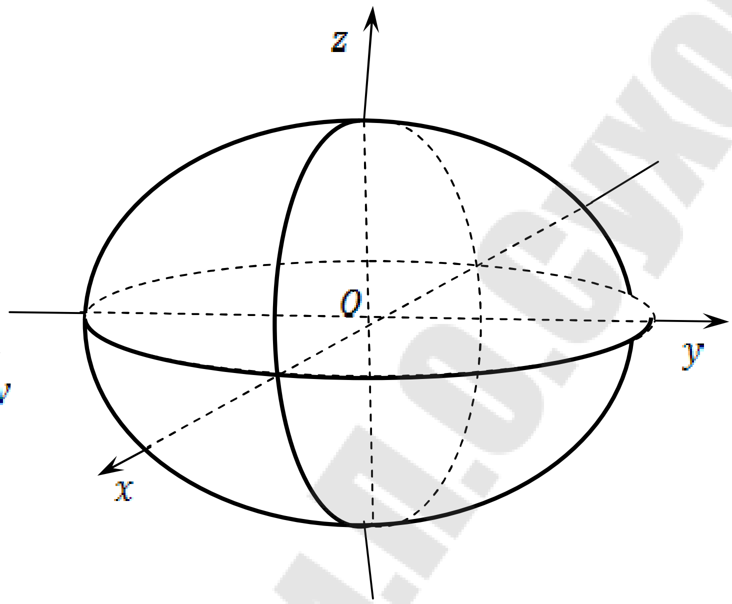
Трехлепестковая роза

$$r = a \sin 3\varphi$$



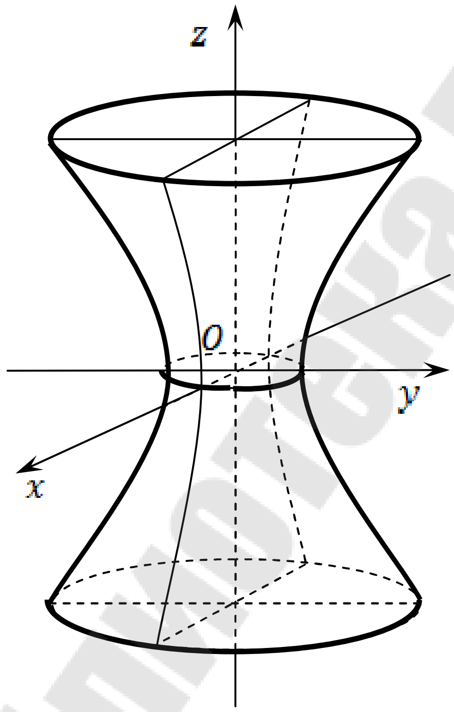
Конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$



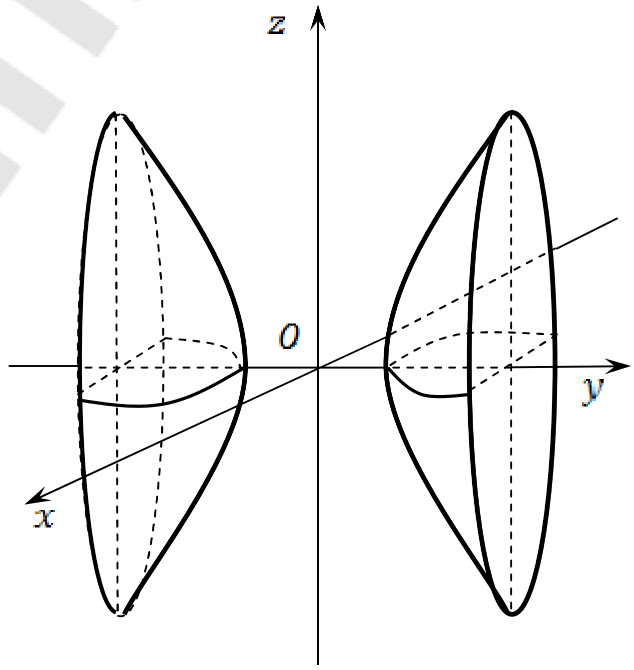
Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



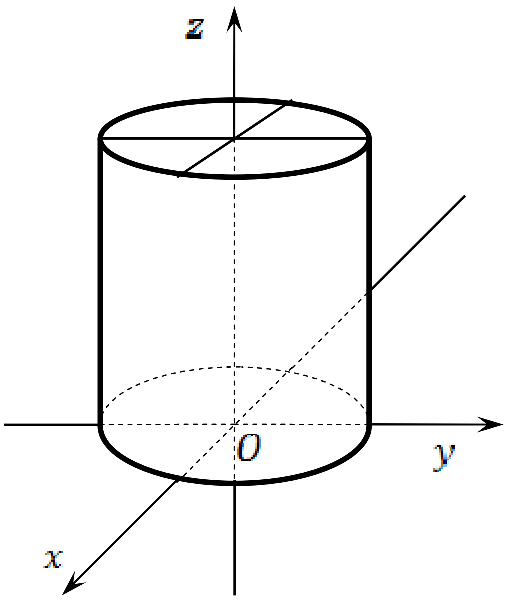
Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



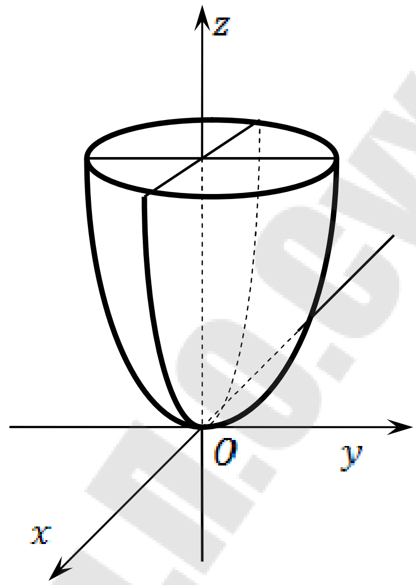
Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



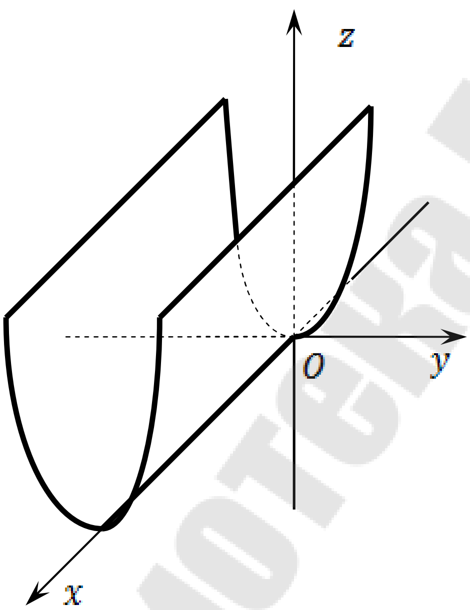
Цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



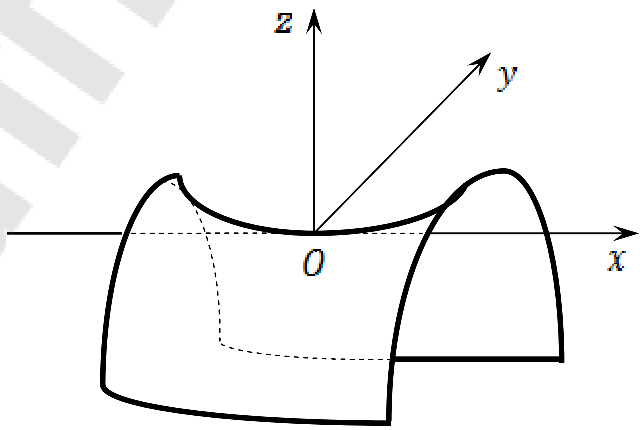
Параболоид

$$x^2+y^2=2pz$$



Параболический цилиндр

$$z=ay^2$$



Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.2. М.: Наука, 1968,1970,1978, 1985
2. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1989
3. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов. Под ред. Демидовича Б.П. М.: Наука, 1972
4. Сборник индивидуальных задач по ВМ, уч.пособие в 3-х частях под ред. Рябушко А.П. Мн.: Выш.шк, 1991
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики,т.2. М.: Наука, 1974
6. Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике, т. 2, Мн.: Высш.шк., 1988

Авакян Сергей Левонович
Авакян Елена Зиновьевна

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Практикум по выполнению домашних заданий по курсу «Высшая математика» для студентов дневной формы обучения

Подписано в печать 22.10.09.
Формат 60x84/$_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Ризография. Усл. печ. л. 3,72. Уч.-изд. л. 3,32
Тираж 600 экз. Заказ /32.

Отпечатано на цифровом дуплекаторе
с макета оригинала авторского для внутреннего использования.
Учреждение образования «Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого».
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.