Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

С. П. Курлович, Л. Д. Корсун

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ПРАКТИКУМ
по выполнению домашних заданий курсов «Математика» и «Высшая математика» для студентов дневной формы обучения

Гомель 2009

УДК 517.53/.55(075.8)
ББК 22.161.5я73
К93

Рекомендовано научно-методическим советом факультета автоматизированных и информационных систем ГГТУ им. П. О. Сухого (*протокол № 7 от 10.03.2008 г.*)

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. каф. «Физика» ГГТУ им. П. О. Сухого *П. А. Хило*

Курлович, С. П.

К93 Теория функций комплексного переменного : практикум по выполнению домаш. заданий курсов «Математика» и «Высшая математика» для студентов днев. формы обучения / С. П. Курлович, Л. Д. Корсун. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2009. – 52 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

Приведены необходимые теоретические сведения, разобраны типовые задачи и примеры. Даны задания для самостоятельного решения.

Для студентов дневной формы обучения.

УДК 517.53/.55(075.8)
ББК 22.161.5я73

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический университет
имени П.О.Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Практикум
по выполнению домашних заданий
курсов «Математика» и «Высшая математика»
для студентов дневной формы обучения

Гомель 2009

УДК 517.9

Рекомендовано к изданию советом факультета автоматизированных и информационных систем ГГТУ им. П. О. Сухого (протокол № 7 от 10.03.2008 г.)

Авторы-составители: *С. П. Курлович, Л. Д. Корсун*

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. каф. «Физика» ГГТУ им. П. О. Сухого *П. А. Хило*

Теория функций комплексного переменного: практикум по выполнению домашних заданий курсов «Математика» и «Высшая математика» для студентов дневной формы обучения / авт.-сост.: С. П. Курлович, Л. Д. Корсун. – Гомель: ГГТУ им. П. О. Сухого, 2009. – 52 с.

Изложен учебный материал по теме «Теория функций комплексного переменного». Сформулированы основные понятия и методы решения задач с их использованием. В начале каждого раздела приведены необходимые теоретические сведения, разобраны типовые задачи и примеры. Даны задания для самостоятельного решения.

Для студентов дневной формы обучения.

§ 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Комплексные числа в алгебраической форме - это числа вида

$$z = x + iy = \mathrm{Re}z + i\,\mathrm{Im}z\,, \tag{1.1}$$

где

$x = \mathrm{Re}z = \mathrm{Re}(x+iy)$ - ***действительная*** часть числа z,

$y = \mathrm{Im}z = \mathrm{Im}(x+iy)$ - ***мнимая*** часть числа z,

i - ***мнимая единица***: $i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = 1, \quad \ldots$.

Числа x и y являются действительными числами.

Число

$$\bar{z} = \overline{x+iy} = x - iy \tag{1.2}$$

называется ***комплексно сопряженным*** с числом $z = x + iy$. При этом $\bar{\bar{z}} = z$.

Комплексное число $z = x + iy$ изображается точкой комплексной плоскости с координатами (x, y), либо вектором, начало которого находится в точке $O(0,0)$, а конец в точке $M(x, y)$ (рис.1.1).

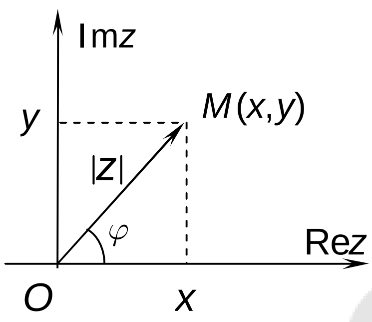

Рис. 1.1

Длина вектора $\overrightarrow{OM}$ называется ***модулем*** комплексного числа

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,. \tag{1.3}$$

Аргументом комплексного числа $z \neq 0$ называется угол φ между положительным направлением действительной оси и вектором $\overrightarrow{OM}$ (рис.1.1):

$$\varphi = \arg z\,. \tag{1.4}$$

Этот угол считается положительным, если отсчет угла ведется против часовой стрелки, и отрицательным – при отсчете по часовой стрелке.

Аргумент комплексного числа определяется неоднозначно. Множество всех значений аргумента числа z будем обозначать

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2\pi k, \quad k \in Z\,, \tag{1.5}$$

где $\varphi = \arg z$ есть главное значение аргумента. Для нахождения главного значения аргумента комплексного числа $z = x + iy$ можно воспользоваться формулой

$$tg\varphi = \frac{y}{x}. \tag{1.6}$$

При этом нужно обратить внимание на то, в какой четверти комплексной плоскости находится число $z = x + iy$. К тому же, как правило, в технической литературе главное значение аргумента принято считать лежащим в пределах $-\pi < \arg z \le \pi$ (рис.1.2), а в математической литературе – в пределах $0 \le \arg z < 2\pi$ (рис.1.3).

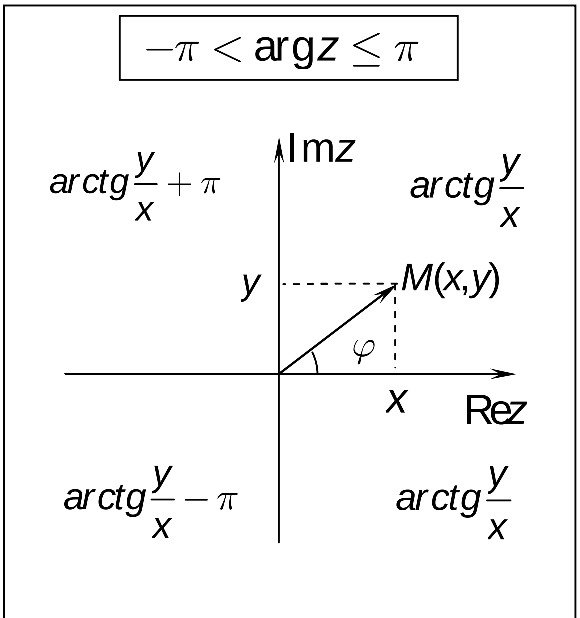

Рис. 1.2

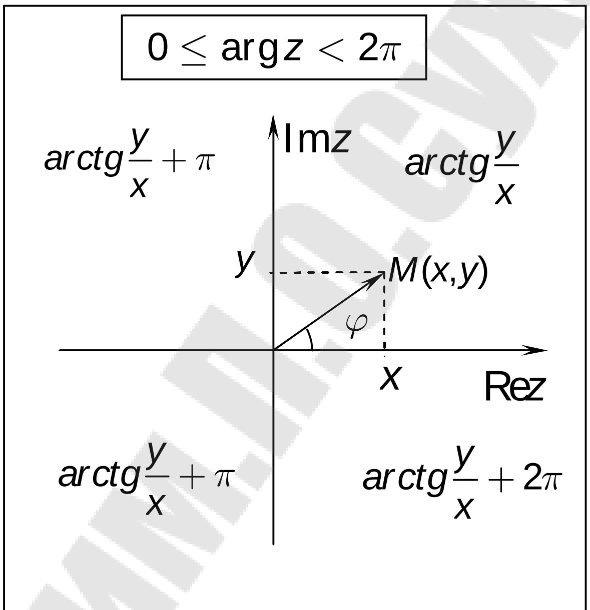

Рис. 1.3

Так, например, для комплексного числа $z = -i$ главное значение аргумента равно $\varphi = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$ (в технической литературе) или $\varphi = \arg(-i) = \frac{3\pi}{2}$ (в математической литературе).

Связь между действительной и мнимой частями комплексного числа z, его модулем $\rho = |z|$ и главным значением аргумента φ выражается следующими формулами:

$$x = \rho \cos\varphi,$$

$$y = \rho \sin\varphi.$$

Тогда любое комплексное число можно записать в ***тригонометрической*** форме

$$z = \rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right), \tag{1.7}$$

и, используя формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{1.8}$$

в ***показательной*** форме

$$z = \rho e^{i\varphi}, \tag{1.9}$$

где $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arg z$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Или тогда, когда модули этих чисел равны, а их аргументы либо равны, либо отличаются на величину, кратную 2π: $|z_1| = |z_2|$, $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi n$, $n \in Z$.

Действия над комплексными числами:

1. ***Сумма*** и ***разность*** комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяются согласно формулам
$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$
$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$
2. ***Произведением*** комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$
Для выполнения операций умножения и деления удобно пользоваться тригонометрической и показательной формой представления комплексных чисел. Тогда
$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right] = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$
Модуль комплексного числа $z = x + iy$ можно определить и через произведение $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$.
3. ***Деление*** комплексных чисел z_1/z_2 сводится к умножению числителя и знаменателя на число, комплексно сопряженное знаменателю.
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x^2 + y^2} + i\left(\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x^2 + y^2}\right).$$
или
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right] = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$
4. ***Возведение в степень*** n определяется как
$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n} = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \rho^n e^{in\varphi}, \quad n \in Z. \qquad (1.10)$$
5. ***Извлечение корня*** n – й степени осуществляется представлением комплексного числа z в показательной форме
$$z = \rho e^{i\,\mathrm{Arg}\,z} = \rho e^{i(\arg z + 2\pi k)} = \rho e^{i(\varphi + 2\pi k)},$$

тогда

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho e^{i(\varphi+2\pi k)}} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}, \tag{1.11}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Число различных значений корня n – й степени из комплексного числа z равно n. Точки, соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$, являются вершинами правильного n – угольника, вписанного в окружность радиуса $R = \sqrt[n]{\rho}$ с центром в начале координат.

Пример 1. Представить в тригонометрической и показательной форме следующие числа: $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$, взяв для аргумента главное значение.

Решение

1. Для числа $z_1 = 1$ имеем $x_1 = 1$, $y_1 = 0$ и $\rho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 1$, $\varphi_1 = \arg z_1 = 0$. Таким образом,
$z_1 = 1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = 1(\cos 0 + i\sin 0) = 1e^{i0}$.
2. Для числа $z_2 = i$: $x_2 = 0$, $y_2 = 1$, $\rho_2 = 1$, $\varphi_2 = \arg z_2 = \dfrac{\pi}{2}$.
Тогда $z_2 = i = 1\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = 1e^{i\frac{\pi}{2}}$.
3. Для числа $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$: $x_3 = -1$, $y_3 = \sqrt{3}$, $\rho_3 = 2$, а так как точка z_3 принадлежит второму квадранту (рис. 1.4), то для нее

$$\varphi_3 = \arg z_3 = arctg\frac{y_3}{x_3} + \pi = arctg\left(-\sqrt{3}\right) + \pi = \frac{2\pi}{3}.$$

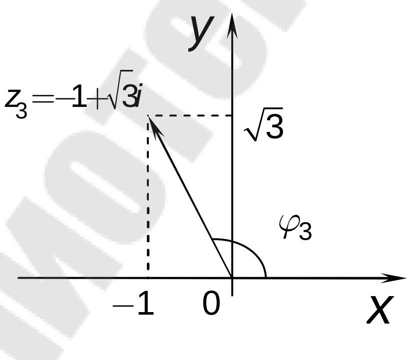

Рис. 1.4

Таким образом,

$$z_3 = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

или $z_3 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Пример 2. Найти частное $\dfrac{1+2i}{3-4i}$.

Решение

Умножим числитель и знаменатель на число, комплексно сопряженное знаменателю

$$\frac{1+2i}{3-4i}=\frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{3+4i+6i+8i^2}{9+16}=\frac{-5+10i}{25}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i.$$

Пример 3. Вычислить $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{60}$.

Решение

Представим число $z=-1+\sqrt{3}i$ в тригонометрической форме

$$-1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right).$$

Применяя формулу возведения в степень (1.10), получим

$$\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{60}=2^{60}\left[\cos\left(60\cdot\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(60\cdot\frac{2}{3}\pi\right)\right]=$$

$$=2^{60}\left(\cos 40\pi+i\sin 40\pi\right)=2^{60}.$$

Пример 4. Найти все значения $\sqrt[3]{1-i}$.

Решение

Приводим комплексное число $1-i$ к показательному виду

$$1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)}.$$

Следовательно,

$$\sqrt[3]{1-i}=\sqrt[6]{2}e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}\right).$$

Полагая $k=0,1,2,$ найдем все значения $\sqrt[3]{1-i}$:

$$(k=0)\qquad \sqrt[3]{1-i}=\sqrt[6]{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

$$(k=1)\qquad \sqrt[3]{1-i}=\sqrt[6]{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right),$$

$$(k=2)\qquad \sqrt[3]{1-i}=\sqrt[6]{2}e^{i\left(\frac{15\pi}{12}\right)}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{12}+i\sin\frac{15\pi}{12}\right).$$

Пример 5. Какая область определяется условиями
$1 \le |z-1-i| \le 2, \quad \frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$?

Решение

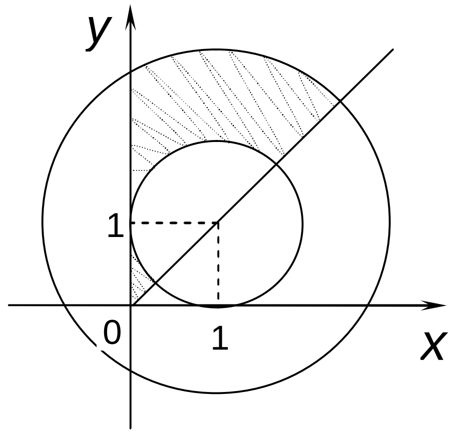

Рис. 1.5

Пусть $z = x + iy$. Тогда
$|z-1-i| = |x+iy-1-i| =$
$= |x-1+i(y-1)| = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$.

Следовательно, $1 \le (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 2^2$.
Искомая область - часть кольца, ограниченного двумя лучами $\arg z = \frac{\pi}{4}$ и $\arg z = \frac{\pi}{2}$ и окружностями радиусов $r=1$ и $r=2$ с центром в точке $z = 1+i$.

ЗАДАНИЯ

Вычислить:

1. $\operatorname{Re}\left(\overline{1+3i}\right)$.

2. $\operatorname{Im}\left(\overline{1-5i}\right)$.

3. $z_1 + \bar{z}_2$, где $z_1 = 2+3i,\ z_2 = 1-4i$.

4. $z_1 - \bar{z}_2$, где $z_1 = 1-4i,\ z_2 = 2-3i$.

5. $(4+3i)\cdot(2-3i)$.

6. $(2-i)\cdot(6i-5)$.

7. $\frac{3-4i}{2+3i}$.

8. $\frac{2-3i}{4-5i}$.

9. $\operatorname{Re}\left(2z_1 + \frac{\bar{z}_1}{z_2}\right)$, где $z_1 = 3+4i,\ z_2 = 4+i$.

10. $\operatorname{Im}\left(3z_1 \cdot z_2 - \frac{z_1}{z_2}\right)$, где $z_1 = 2+i,\ z_2 = -1+2i$.

Найти модуль и главное значение аргумента комплексных чисел:

11. $z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$.

12. $z = -3 + 2\sqrt{3}i$.

13. $z = -\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$.

14. $z = -\sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8}$.

Записать в тригонометрической и показательной форме комплексные числа:

15. -3.

16. $2i$.

17. $1+i^{121}$.

18. $-1-i\sqrt{3}$.

19. $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

20. $\sin\alpha - i\cos\alpha,\ \left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$.

Перейти от показательной формы комплексного числа к алгебраической:

21. $2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

22. $3e^{i\frac{\pi}{4}}$.

23. $4e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

24. $5e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

Доказать:

25. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$.

26. $\overline{\overline{z}_1 + \overline{z}_2} = z_1 + z_2$.

27. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$.

28. $\left(\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}\right) = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

29. $|\mathrm{Re}z| \le |z|$.

30. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Вычислить:

31. $(2-2i)^7$.

32. $\left(\sqrt{3}-3i\right)^6$.

33. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$.

34. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$.

Найти все значения корня:

35. $\sqrt[3]{1}$.

36. $\sqrt{i}$.

37. $\sqrt[4]{-1}$.

38. $\sqrt[4]{-i}$.

39. $\sqrt[3]{-1+i}$.

40. $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$.

41. $\sqrt[4]{\sqrt{3}+3i}$.

42. $\sqrt[3]{-8i}$.

Построить линии по уравнениям:

43. $\mathrm{Im}\, z^2 = 2$.

44. $\mathrm{Re}\overline{z}^2 = 1$.

45. $|z-(1+i)| = 1$.

46. $|z+(3+2i)| = 2$.

Построить области:

47. $|z| \ge 2$.

48. $|z-5i| \le 8$.

49. $1 \le |z+1-i| \le 4$.

50. $|z-1| \le |z-i|$.

51. $1 \le |z+i| \le 2$,

$$-\frac{\pi}{2} \le \arg z \le -\frac{\pi}{4}.$$

52. $1 \le |z-2+2i| < 2$,

$$-\frac{\pi}{4} \le \arg z \le 0.$$

§ 2. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Говорят, что в области D определена ***функция комплексного переменного*** $w = f(z)$, если указан закон, по которому каждому комплексному числу $z \in D$ ставится в соответствие одно (однозначная функция) или несколько (многозначная функция) комплексных значений w.

Таким образом, функция $w = f(z)$ осуществляет отображение точек комплексной плоскости z на соответствующие точки комплексной плоскости w.

Задание функции $w = f(z)$ равносильно заданию двух действительных функций $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$, так как

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y). \tag{2.1}$$

Основные элементарные функции комплексного переменного

1. ***Дробно-рациональная функция***

$$w = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m};$$

в частности, рациональной функцией является многочлен

$$w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n .$$

2. ***Показательная функция*** e^z определяется как сумма абсолютно сходящегося во всей комплексной плоскости степенного ряда

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots ,$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Свойства функции e^z:

а) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$;

б) $\left|e^z\right| = e^x, \quad \arg e^z = y$;

в) $e^{z+2\pi ki} = e^z$, $(k \in Z)$, т.е. e^z является периодической функцией с периодом 2π.

3. ***Тригонометрические функции*** $\sin z$ и $\cos z$ определяются степенными рядами:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots ,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + ... ,$$

абсолютно сходящимися при любом комплексном значении z. Функции $\sin z$ и $\cos z$ – периодические с действительным периодом 2π и имеют только действительные нули $z = k\pi$ и $z = \pi/2 + k\pi$ соответственно, где $k \in Z$.

Для функций e^z, $\sin z$ и $\cos z$ имеют место ***формулы Эйлера***

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z, \qquad e^{-iz} = \cos z - i\sin z. \tag{2.2}$$

Тогда

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin x\, ch y + i\cos x\, sh y, \tag{2.3}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos x\, ch y - i\sin x\, sh y. \tag{2.4}$$

Функции $tg z$ и $ctg z$ определяются равенствами

$$tg z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad ctg z = \frac{\cos z}{\sin z}. \tag{2.5}$$

Для тригонометрических функций остаются в силе все формулы тригонометрии.

4. ***Гиперболические функции*** $sh z$, $ch z$, $th z$, $cth z$ определяются равенствами

$$sh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad ch z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \tag{2.6}$$

$$th z = \frac{sh z}{ch z}, \quad cth z = \frac{ch z}{sh z}. \tag{2.7}$$

Тригонометрические и гиперболические функции связаны между собой следующими соотношениями:

$$\sin z = -i\, sh iz, \qquad sh z = -i\sin iz,$$
$$\cos z = ch iz, \qquad ch z = \cos iz,$$
$$tg z = -i\, th iz, \qquad th z = -i\, tg iz,$$
$$ctg z = i\, cth iz, \qquad cth z = i\, ctg iz.$$

5. ***Логарифмическая функция*** $Ln z$, где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем

$$Ln z = \ln|z| + iArg z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i, \quad k \in Z. \tag{2.8}$$

Логарифмическая функция является многозначной. Выражение

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z \tag{2.9}$$

называется главным значением логарифмической функции.
Очевидно, что

$$Lnz = \ln z + 2k\pi i, \quad k \in Z\,.$$

Справедливы следующие свойства:

$$Ln\left(z_1 \cdot z_2\right) = Ln\,z_1 + Ln\,z_2,$$

$$Ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Ln\,z_1 - Ln\,z_2.$$

6. ***Обратные тригонометрические функции***

$Arc\sin z$, $Arc\cos z$, $Arctgz$, $Arcctgz$ определяются как функции, обратные соответственно к функциям $\sin w$, $\cos w$, tgw, $ctgw$. Все эти функции являются многозначными и выражаются через логарифмические функции:

$$Arc\sin z = -iLn\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right), \tag{2.10}$$

$$Arc\cos z = -iLn\left(z + \sqrt{z^2-1}\right), \tag{2.11}$$

$$Arctgz = -\frac{i}{2}Ln\frac{1+iz}{1-iz}, \tag{2.12}$$

$$Arcctgz = -\frac{i}{2}Ln\frac{z+i}{z-i}. \tag{2.13}$$

Главные значения обратных тригонометрических функций $\arcsin z$, $\arccos z$, $\mathrm{arc}tgz$, $\mathrm{arc}ctgz$ получаются, если брать главные значения соответствующих логарифмических функций.

7. ***Обратные гиперболические функции***

$Arc\sin z$, $Arc\cos z$, $Arctgz$, $Arcctgz$ определяются как функции, обратные соответственно к функциям shw, chw, thw, $cthw$. Все эти функции являются многозначными и выражаются через логарифмические функции

$$Ar\,shz = Ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right), \tag{2.14}$$

$$Ar\,chz = Ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right), \tag{2.15}$$

$$Arthz = \frac{1}{2}Ln\frac{1+z}{1-z}, \tag{2.16}$$

$$Arcth\,z = \frac{1}{2} Ln \frac{z+1}{z-1}. \qquad (2.17)$$

Главные значения обратных гиперболических функций $\arcsin z$, $\arccos z$, $\mathrm{arc}tgz$, $\mathrm{arc}ctgz$ получаются, если брать главные значения соответствующих логарифмических функций.

8. ***Общая степенная функция*** $w = z^a$, где $a = \alpha + i\beta$ – любое комплексное число, определяется равенством

$$z^a = e^{aLnz}. \qquad (2.18)$$

Эта функция многозначная, ее главное значение равно $z^a = e^{a\ln z}$.

9. ***Общая показательная функция*** $w = a^z$ ($a \neq 0$ – любое комплексное число) определяется равенством

$$a^z = e^{zLna} = e^{z(\ln a + i\,2\pi k)}, \quad k \in Z. \qquad (2.19)$$

Главное значение этой многозначной функции $a^z = e^{z\ln a}$.

Пример 1. Найти действительную и мнимую части функции $w = z^3 - i\bar{z}$.

Решение

Полагая $z = x + iy$, $w = u + i\upsilon$, получим

$$w = u + i\upsilon = (x+iy)^3 - i\,(x - iy) = \left(x^3 - 3xy^2 - y\right) + i\left(3x^2y - y^3 - x\right).$$

Следовательно, равенство $w = z^3 - i\bar{z}$ равносильно двум равенствам

$$u = x^3 - 3xy^2 - y,$$

$$\upsilon = 3x^2y - y^3 - x.$$

Пример 2. Вычислить значение функции в алгебраической форме:

1) $ln\left(\sqrt{3}+i\right)$; 2) $(-2i-2)^{i+3}$.

Решение

1) $z = \sqrt{3} + i$, $\rho = |z| = 2$, $\varphi = arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$,

$$ln(\sqrt{3}+i) = \ln 2 + i\,\frac{\pi}{6}.$$

2) $(-2i-2)^{i+3} = e^{Ln(-2i-2)^{i+3}} = e^{(i+3)Ln(-2i-2)}$, поскольку

$$Ln\left(-2i-2\right) = \ln\sqrt{8} + i\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right), \; n \in Z.$$

Тогда $(-2i-2)^{i+3} = e^{(i+3)\left(\ln\sqrt{8} + i\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)\right)} =$

$$= e^{\frac{9}{2}\ln 2+\frac{3\pi}{4}-2\pi n+i\left(\frac{3}{2}\ln 2-\frac{9\pi}{4}+6\pi n\right)} = e^{\frac{9}{2}\ln 2+\frac{3\pi}{4}-2\pi n} e^{i\left(\frac{3}{2}\ln 2-\frac{9\pi}{4}+6\pi n\right)} =$$

$$= e^{\frac{9}{2}\ln 2+\frac{3\pi}{4}-2\pi n}\left(\cos\left(\frac{3}{2}\ln 2-\frac{9\pi}{4}+6\pi n\right)+i\sin\left(\frac{3}{2}\ln 2-\frac{9\pi}{4}+6\pi n\right)\right).$$

ЗАДАНИЯ

Найти образы данных точек при указанных отображениях:

53. $w = z^2, \quad z_0 = -i$.

54. $w = (z-i)^2, z_0 = 1-i$.

55. $w = \dfrac{1}{z-i} \quad z_0 = 2+3i$.

56. $w = \dfrac{\bar{z}}{z}, \quad z_0 = 1+i$.

Выделить действительную и мнимую части функции $w = f(z)$:

57. $w = \bar{z} - iz^2$.

58. $w = z^2 + 2i$.

59. $w = \dfrac{1}{\bar{z}}$.

60. $w = \dfrac{iz+1}{1+\bar{z}}$.

61. $w = e^{-z}$.

62. $w = e^{\overline{z^2}}$.

63. $w = \sin(z+i)$.

64. $w = ch(z-i)$.

65. $w = 2^{z^2}$.

66. $w = 4^{z-z^2}$.

Вычислить:

67. $e^{\frac{\pi}{4}i}$.

68. $\pi i e^{\pi i}$.

69. $Ln(-i)$.

70. $Ln(-1+i)$.

71. $Ln\left(3-\sqrt{3}i\right)$.

72. $ln\left(2i-\sqrt{12}\right)$.

73. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+i\ln 2\right)$.

74. $sh\left(1+i\dfrac{\pi}{2}\right)$.

75. $sh\left(1+i\dfrac{\pi}{2}\right)$.

76. $ch^2(i\ln 3)$.

77. $Arc\sin i$.

78. $Arc\cos\dfrac{3i}{4}$.

79. $Arctg\dfrac{5i}{3}$.

80. $Arcctg\left(-\dfrac{3i}{5}\right)$.

81. i^i.

82. i^{1-i}.

83. $(1-i)^{3+3i}$.

84. $\left(\sqrt{12}i-2\right)^{i-1}$.

85. $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$.

86. $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)^{1+i}$.

Решить уравнения:

87. $e^{-z}+1=0$.

88. $e^{z}+i=0$.

89. $4\cos z-3-i=0$.

90. $sh\, iz=-i$.

91. $\ln(z+i)=0$.

92. $\ln(i-z)=1$.

§ 3. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Пусть дана последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots.$$

Комплексное число a называется ***пределом последовательности*** $\{z_n\}$, если для любого положительного числа ε можно указать такой номер $N=N(\varepsilon)$, начиная с которого все элементы z_n этой последовательности удовлетворяют неравенству

$$|z_n-a|<\varepsilon \quad \text{при} \quad n\ge N(\varepsilon).$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$.

Последовательность $\{z_n=x_n+iy_n\}$ сходится к числу $a=\alpha+i\beta$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\alpha$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\beta$.

Число A называется ***пределом функции*** $f(z)$ в точке z_0, если для любого числа $\varepsilon>0$ можно указать такое число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для всех точек $z\in\Omega$, удовлетворяющих условию $0<|z-z_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(z)-A|<\varepsilon$. Обозначают $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$.

Пределы функций комплексного переменного обладают свойствами, аналогичными свойствам пределов функции действительного переменного.

Функция $f(z)$, определенная в окрестности точки z_0, называется ***непрерывной в точке*** z_0, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$. Из непрерывности комплексной функции $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ в точке $z_0=x_0+iy_0$ следует непрерывность действительных функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в точке (x_0,y_0).

Функция называется непрерывной в области, если она непрерывна в каждой точке этой области.

ЗАДАНИЯ

Найти пределы последовательностей:

93. $z_n = \dfrac{i^n}{n}$.

94. $z_n = \dfrac{n+2i}{3n+7i}$.

95. $z_n = n \sin\dfrac{i}{n}$.

96. $z_n = \dfrac{sh\, in}{n}$.

Вычислить пределы функций:

97. $\lim\limits_{z \to -i} \dfrac{z^2 + 3iz - 2}{z+i}$.

98. $\lim\limits_{z \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2z}{ch\, iz + sh\, iz}$.

99. $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\sin z}{sh\, iz}$.

100. $\lim\limits_{z \to -\frac{\pi}{2}i} \dfrac{e^{2z}+1}{e^{z}+i}$.

§4. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. УСЛОВИЯ КОШИ-РИМАНА

Функция $w = f(z)$ называется ***дифференцируемой в точке*** $z \in D$, если отношение $\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \dfrac{f(z+z_0) - f(z)}{\Delta z}$ имеет конечный предел при Δz, стремящемся к нулю произвольным образом. Этот предел называется ***производной*** функции $f(z)$ в точке z и обозначается:

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \qquad (4.1)$$

Условие дифференцируемости. Для того чтобы функция

$$w = f(z) = u(x,y) + i\upsilon(x,y)$$

была ***дифференцируема в точке*** $z_0 = x_0 + iy_0$, необходимо и достаточно выполнение двух условий:

1) функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x_0,y_0).
2) в точке (x_0,y_0) справедливы равенства (***условия Коши-Римана***):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \upsilon}{\partial x}. \qquad (4.2)$$

При этом производная функции $f(z)$ в точке z может быть найдена по одной из формул:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial \upsilon}{\partial x}=\frac{\partial \upsilon}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+i\frac{\partial \upsilon}{\partial x}. \qquad (4.3)$$

В частности, в полярных координатах ($x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$) условия Коши-Римана в точке $z_0\neq 0$ эквивалентны равенствам

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial \upsilon}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial \upsilon}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}. \qquad (4.4)$$

Условие аналитичности. Функция $w=f(z)$ называется ***аналитической в точке*** $z\in D$, если она однозначна и дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности.

Функция $f(z)$ называется ***аналитической в области*** D, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Производные элементарных функций z^n, e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\ln z$, $\arcsin z$, $\arccos z$, $\mathrm{arctg}\, z$, $\mathrm{sh}\, z$, $\mathrm{ch}\, z$ находятся по известным формулам, например, $(e^z)'=e^z$; $(\mathrm{sh}\, z)'=\mathrm{ch}\, z$.

Понятие гармонической функции. Функция $u(x,y)$ называется ***гармонической в области*** D, если она имеет в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа

$$\Delta u=0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \qquad (4.5)$$

Здесь символом Δ обозначен дифференциальный оператор $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, носящий название ***оператора Лапласа***.

Если функция $f(z)=u+i\upsilon$ аналитична в некоторой области D, то ее действительная часть $u(x,y)$ и мнимая часть $\upsilon(x,y)$ являются гармоническими в этой области функциями. Но если $u(x,y)$ и $\upsilon(x,y)$ - гармонические функции, то функция $f(z)=u(x,y)+i\upsilon(x,y)$ может и не быть аналитической: для аналитичности $f(z)$ нужно, чтобы функции $u(x,y)$ и $\upsilon(x,y)$ дополнительно удовлетворяли условиям Коши-Римана.

Две гармонические функции, удовлетворяющие условиям Коши-Римана (4.2), называют ***сопряженной парой гармонических функций.***

Используя условия Коши-Римана, можно восстановить аналитическую функцию $f(z)$, если известна ее действительная часть $u(x,y)$ или мнимая часть $\upsilon(x,y)$.

Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Пусть функция $f(z)$ - аналитическая в точке z_0 и $f'(z_0)\neq 0$. Тогда $|f'(z_0)|$ равен коэффициенту растяжения в точке z_0 при отображении $w = f(z)$ плоскости z на плоскость w. При $|f'(z_0)| > 1$ имеет место растяжение, а при $|f'(z_0)| < 1$ - сжатие.

Аргумент производной $f'(z_0)$ геометрически равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к любой гладкой кривой на плоскости z, проходящей через точку z_0, чтобы получить направление касательной в точке $w_0 = f(z_0)$ к образу этой кривой на плоскости w при отображении $w = f(z)$.

Пример 1. Показать, что функция $\omega = e^z$ является аналитической на всей комплексной плоскости.

Решение.

$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, так что

$$u(x,y) = e^x \cos y, \qquad \upsilon(x,y) = e^x \sin y.$$

Функции $u(x,y)$ и $\upsilon(x,y)$ дифференцируемы в любой точке (x,y) и при этом удовлетворяют условиям Коши-Римана (4.2). Следовательно, функция $\omega = e^z$ всюду аналитическая.

$$\left(e^z\right)' = \left(e^x \cos y\right)'_x + i\left(e^x \sin y\right)'_x = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z.$$

Итак, $\left(e^z\right)' = e^z$.

Пример 2. Является ли функция $w = z \cdot \bar{z}$ аналитической?

Решение

Имеем $z\bar{z} = x^2 + y^2$, так что $\quad u(x,y) = x^2 + y^2, \quad \upsilon(x,y) \equiv 0.$

Условия Коши-Римана имеют вид

$$\left.\begin{aligned} 2x &= 0 \\ 2y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

и удовлетворяются только в точке $O(0,0)$. Следовательно, функция $w = z\bar{z}$ дифференцируема только в точке $z = 0$ и не является аналитической нигде на комплексной плоскости.

Пример 3. Найти аналитическую функцию $w = f(z)$ по известной ее действительной части $u(x,y) = 2e^x \cos y$ и при дополнительном условии $f(0) = 2$.

Решение

Имеем $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2e^x \cos y$. По первому из условий Коши-Римана $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial \upsilon}{\partial y}$, так что $\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y} = 2e^x \cos y$. Отсюда

$$\upsilon(x,y) = \int 2e^x \cos y \, dy = 2e^x \sin y + \varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ пока неизвестна. Дифференцируя $\upsilon(x,y)$ по x и используя второе из условий Коши-Римана, получим

$$2e^x \sin y + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2e^x \sin y,$$

откуда $\varphi'(x) = 0$, а значит, $\varphi(x) = C$, где $C = const$. Итак,

$$\upsilon(x,y) = 2e^x \sin y + C,$$

$$f(z) = 2e^x \cos y + i\left(2e^x \sin y + C\right) = 2e^z + iC.$$

Постоянную C найдем из условия $f(0) = 2$, т.е. $2e^0 + iC = 2$, $C = 0$.

Ответ: $f(z) = 2e^z$.

ЗАДАНИЯ

Найти все точки $z = x + iy$, в которых дифференцируемы функции:

101. $w = x^2 - iy^2$.

102. $w = x - y + i(x + y)$.

103. $w = z\,\mathrm{Re}\,z$.

104. $w = \bar{z}\,\mathrm{Im}\,z$.

Выяснить, где дифференцируемы функции (используя определение производной), и найти их производные:

105. $w = \dfrac{e^z}{z}$.

106. $w = \dfrac{z}{e^z}$.

107. $w = \dfrac{\sin z}{1 + z^2}$.

108. $w = \dfrac{e^z + 2}{e^z - 2}$.

Выяснить, являются ли аналитическими функции:

109. $w = z^2\bar{z}$.

110. $w = |z| \cdot \bar{z}$.

111. $w = |z|\,\mathrm{Re}\,\bar{z}$.

112. $w = \bar{z}\,\mathrm{Im}\,z$.

113. $w = ze^z$.

114. $w = e^{z^2}$.

115. $w = \sin 3z - i$.

116. $w = \cos(2z + i)$.

117. $w = ch2z$.

118. $w = \ln z$.

Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной или мнимой части:

119. $u = x^2 - y^2 + 2x, \quad f(i) = 2i - 1.$

120. $u = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3, \quad f(0) = i.$

121. $\upsilon = 2(chx\sin y - xy), \quad f(0) = 0.$

122. $u = 2\sin x chy - x, \quad f(0) = 0.$

123. $u = 2^x\cos(y\ln 2), \quad f(0) = 1.$

124. $\upsilon = arctg\dfrac{y}{x}, \quad (x > 0), \quad f(1) = 0.$

Могут ли являться действительной или мнимой частями аналитической функции $f(z) = u + i\upsilon$ следующие функции:

125. $u = x^2.$

126. $u = x^2 + 2x - y^2.$

127. $v = x^2 + 2xy - y^2x.$

128. $u = 2e^x\cos y.$

129. $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}.$

130. $u = \ln(x^2 + y^2).$

Найти среди пар гармонических функций $u(x,y), \upsilon(x,y)$ сопряженные пары гармонических функций:

131. $u = 3(x^2 - y^2), \quad \upsilon = 3x^2y - y^3.$

132. $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}, \quad \upsilon = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}.$

133. $u = e^x\cos y + 1, \quad \upsilon = 1 + e^x\sin y.$

134. $u = x, \quad \upsilon = -y.$

Найти коэффициент растяжения и угол поворота при заданных отображениях $w = f(z)$ в заданных точках:

135. $w = e^z$ в точках $z_1 = \ln 2 + i\dfrac{\pi}{4}$ и $z_2 = -1 - i\dfrac{\pi}{2}$

136. $w = \sin z$ в точках $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$

137. $w = z^3$ в точках $z_1 = 2 - i$ и $z_2 = 1 + i\dfrac{\pi}{2}$

138. $w = chz$ в точках $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 - i.$

§5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Кривую C называют ***гладкой***, если она имеет непрерывно изменяющуюся касательную. Кривая называется ***кусочно-гладкой***, если она состоит из конечного числа гладких дуг.

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена и непрерывна в области D, а C - кусочно - гладкая замкнутая или незамкнутая ориентированная кривая, лежащая в D.

Пусть $z = x + iy$, $f(z) = u + i\upsilon$, где $u = u(x,y)$ и $\upsilon = \upsilon(x,y)$ - действительные функции переменных x и y. Тогда:

1) Вычисление интеграла от функции $f(z)$ комплексного переменного z сводится к вычислению криволинейных интегралов:
$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - \upsilon dy + i\int_C \upsilon dx + udy. \quad (5.1)$$

2) Если кривая C задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ и начальная и конечная точки дуги C соответствуют значениям параметра $t = t_0, t = t_1$, то
$$\int_C f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f[z(t)]z'(t)dt, \quad (5.2)$$
где $z(t) = x(t) + iy(t)$.

3) Если $f(z)$ - аналитическая функция в односвязной области D, то интеграл не зависит от пути интегрирования и
$$\oint_L f(z)dz = 0, \quad (5.3)$$
где L - любой замкнутый кусочно-гладкий контур в области D.

4) Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, содержащей точки z_0 и z_1, то имеет место формула Ньютона-Лейбница
$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0) = \Phi(z)\Big|_{z_0}^{z_1}, \quad (5.4)$$
где $\Phi(z)$ - какая-либо первообразная для функции $f(z)$, т.е. $\Phi'(z) = f(z)$ в области D.

5) Если функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ - аналитические в односвязной области D, а z_0 и z_1 - произвольные точки этой области, то имеет место формула интегрирования по частям:
$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\varphi'(z)dz = \left[f(z)\varphi(z)\right]\Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} \varphi(z)f'(z)dz.$$

6) Замена переменных в интегралах от функций комплексного переменного производится аналогично случаю функции действительного переменного.

Если путь интегрирования является полупрямой, выходящей из точки z_0, или окружностью с центом в точке z_0, то полезно делать замену переменной вида

$$z - z_0 = \rho e^{i\varphi}.$$

В первом случае $\varphi = const$, а ρ - действительная переменная интегрирования, во втором случае $\rho = const$, а φ - действительная переменная интегрирования.

Пример 1. Вычислить интеграл $I = \int\limits_C \left(1 + i - 2\overline{z}\right) dz$ по линиям, соединяющим точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$

1) по прямой,

2) по параболе $y = x^2$.

Решение

Перепишем подынтегральную функцию (не аналитическую) в виде

$$1 + i - 2\overline{z} = (1 - 2x) + i\,(1 + 2y).$$

Здесь $u = 1 - 2x, \quad \upsilon = 1 + 2y, \quad dz = dx + i\,dy$.

Применяя формулу (5.1), получим

$$I = \int\limits_C \left(1 + i - 2\overline{z}\right) dz = \int\limits_C \left(1 - 2x\right) dx - \left(1 + 2y\right) dy + i \int\limits_C \left(1 + 2y\right) dx + \left(1 - 2x\right) dy.$$

1) Уравнение прямой, проходящей через точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$ будет $y = x, \quad 0 \le x \le 1, \quad dy = dx.$

$$I = \int\limits_0^1 \left[\left(1 - 2x\right) - \left(1 + 2x\right)\right] dx + i \int\limits_0^1 \left[\left(1 + 2x\right) + \left(1 - 2x\right)\right] dx = 2\left(i - 1\right).$$

2) Для параболы $y = x^2, \quad dy = 2x\,dx \quad (0 \le x \le 1)$. Тогда

$$I = \int\limits_C \left(1 + i - 2\overline{z}\right) dz = \int\limits_0^1 \left[1 - 2x - \left(1 + 2x^2\right) 2x\right] dx +$$

$$i \int\limits_0^1 \left[1 + 2x^2 + \left(1 - 2x\right) 2x\right] dx = -2 + \frac{4}{3} i.$$

Этот пример показывает, что интеграл от непрерывной, но не аналитической функции зависит, вообще говоря, от формы пути интегрирования.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\limits_{1-i}^{2+i}\left(3z^2+2z\right)dz$

Решение

Так как подынтегральная функция $f(z)=3z^2+2z$ аналитична всюду, то, применяя формулу Ньютона-Лейбница, найдем

$$\int\limits_{1-i}^{2+i}\left(3z^2+2z\right)dz=\left(z^3+z^2\right)\Big|_{1-i}^{2+i}=7+19i.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{i} z\cos z\,dz$.

Решение

Функции $f(z)=z$ и $\varphi(z)=\cos z$ являются аналитическими всюду. Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int\limits_{0}^{i} z\cos z\,dz=\int\limits_{0}^{i} zd\left(\sin z\right)=z\sin z\Big|_0^i-\int\limits_{0}^{i}\sin z\,dz=i\sin i+\cos z\Big|_0^i=$$

$$-sh1+ch1-1=\frac{1-e}{e}.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int\limits_C\left(z^2+z\bar{z}\right)dz$, где C - дуга окружности $|z|=1\quad(0\le\arg z\le\pi)$.

Решение

Положим $z=e^{i\varphi}$, тогда $dz=ie^{i\varphi}d\varphi$ и

$$\int\limits_C\left(z^2+z\bar{z}\right)dz=\int\limits_0^{\pi} ie^{i\varphi}\left(e^{i2\varphi}+1\right)d\varphi=i\int\limits_0^{\pi}\left(e^{i3\varphi}+e^{i\varphi}\right)d\varphi=$$

$$=\left(\frac{1}{3}e^{i3\varphi}+e^{i\varphi}\right)\Bigg|_0^{\pi}=-\frac{8}{3}.$$

ЗАДАНИЯ

Вычислить следующие интегралы:

139. $\int\limits_C z\,\mathrm{Im}\,z^2dz,\quad C:\ |z|=1,\ (-\pi\le\arg z\le 0).$

140. $\int\limits_C e^{|z|^2}\operatorname{Re}z\,dz$, C – прямая, соединяющая точки $z_1 = 0, z_2 = 1 + i$.

141. $\oint\limits_C \operatorname{Re}z\,dz$, $C: |z| = 1$. Обход против часовой стрелки.

142. $\oint\limits_C z\bar{z}\,dz$, $C: |z| = 1$. Обход против часовой стрелки.

143. $\int\limits_1^i ze^z dz$.

144. $\int\limits_C \operatorname{Re}z\,dz$, где C :

а) $z = (2+i)t, \quad (0 \le t \le 1)$,

б) ломаная, состоящая из отрезка $[0,2]$ действительной оси и отрезка, соединяющего точки $z_1 = 2$ и $z_2 = 2+i$.

145. $\int\limits_{1+i}^{-1-i} (2z+1)dz$. **146.** $\int\limits_0^{i+1} z^3 dz$. **147.** $\int\limits_1^i \left(3z^4 - 2z^3\right)dz$.

148. $\int\limits_C e^z dz$, где C :

а) дуга параболы $y = x^2$, соединяющая точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1+i$;

б) отрезок прямой, соединяющий эти же точки.

149. $\int\limits_{1+i}^{2i} \left(z^3 - z\right)e^{\frac{z^2}{2}}dz$. **150.** $\int\limits_0^i z\cos z\,dz$.

151. $\int\limits_1^i z\sin z\,dz$. **152.** $\int\limits_0^i (z-i)e^{-z}dz$.

153. $\int\limits_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1}dz$ по дуге окружности $|z| = 1, \operatorname{Im}z \ge 0, \operatorname{Re}z \ge 0$.

154. $\int\limits_0^{1+i} \sin z\cos z\,dz$.

155. $\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$, где C :

а) верхняя половина окружности $|z| = 1$; выбирается та ветвь функции $\sqrt{z}$, для которой $\sqrt{1} = 1$;

б) верхняя половина окружности $|z| = 1$; выбирается та ветвь функции $\sqrt{z}$, для которой $\sqrt{1} = -1$.

156. $\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt[4]{z^3}}$, где C: верхняя половина окружности $|z| = 1$; берется та ветвь функции $\sqrt[4]{z^3}$, для которой $\sqrt[4]{z^3} = 1$.

§6. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ

Если функция $f(z)$ является аналитической в области D, ограниченной кусочно-гладким замкнутым контуром C, и на самом контуре, то справедлива интегральная формула Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(z)dz}{z - z_0} \quad (z_0 \in D), \tag{6.1}$$

где контур C обходится так, что область D остается все время слева.

Если функция $f(z)$ аналитична в области D и на ее границе C, то для любого натурального n имеет место формула

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \tag{6.2}$$

где $z_0 \in D, z \in C$.

Формулами (6.1) и (6.2) можно пользоваться для вычисления некоторых интегралов.

__**Пример 1.**__ Пользуясь интегральной формулой Коши, вычислить $\oint\limits_C \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz$, если: 1)$C: |z-2| = 1$; 2)$C: |z-2| = 3$; 3)$C: |z-2| = 5$.

Решение

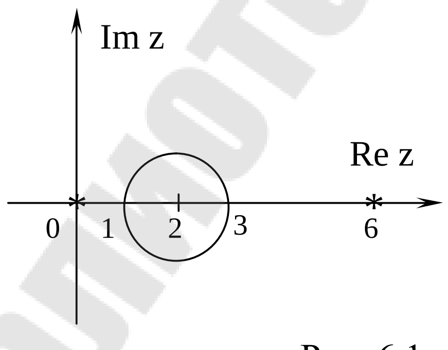

Рис. 6.1

1) В замкнутой области, ограниченной окружностью $|z-2| = 1$, подынтегральная функция аналитическая, так как точки $z = 0$ и $z = 6$ находятся вне окружности (рис 6.1). Поэтому, в силу теоремы Коши,

$$\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz = 0.$$

2) Внутри области, ограниченной окружностью $|z-2|=3$, находится одна точка $z=0$, в которой знаменатель обращается в нуль (рис 6.2). Перепишем интеграл в виде

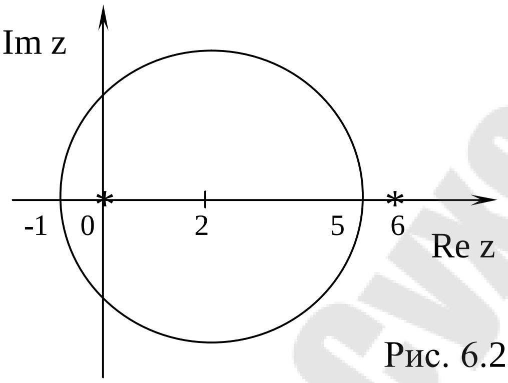

Рис. 6.2

$$\oint_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz = \oint_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}\Big/(z-6)}{z}dz.$$

Функция $f(z)=\dfrac{e^{z^2}}{z-6}$ является аналитической в данной области. Применяя интегральную формулу Коши (6.1) $(z_0=0)$, получим

$$\oint_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz = 2\pi i \left.\frac{e^{z^2}}{z-6}\right|_{z=0} = 2\pi i\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{\pi i}{3}.$$

3) В области, ограниченной окружностью $|z-2|=5$, имеем две точки $z=0, z=6$, в которых знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль (рис 6.3). Непосредственно формулу (6.1) применять нельзя. В этом случае для вычисления интеграла можно поступать так.

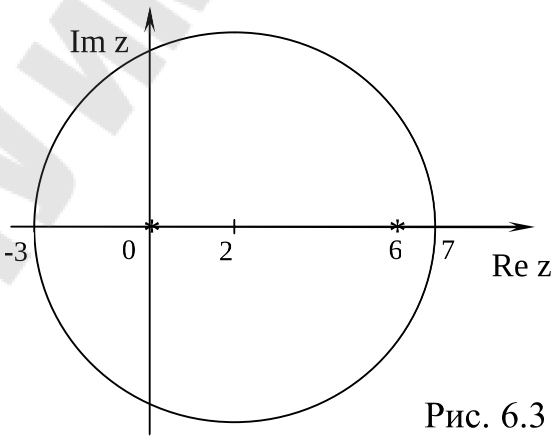

Рис. 6.3

<u>Первый способ.</u> Разложим дробь $\dfrac{1}{z^2-6z}$ на сумму простейших дробей $\dfrac{1}{z^2-6z}=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{z-6}-\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{z}$.

Тогда

$$\oint_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz = \frac{1}{6}\oint_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}dz}{z-6}dz - \frac{1}{6}\oint_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}}{z}dz =$$

$$= \frac{1}{6}2\pi i e^{36} - \frac{1}{6}2\pi i = \frac{e^{36}-1}{3}\pi i\ .$$

<u>Второй способ.</u> Построим окружности λ_1 и λ_2 с центрами в точках $z=0$ и $z=6$ достаточно малых радиусов, таких, чтобы

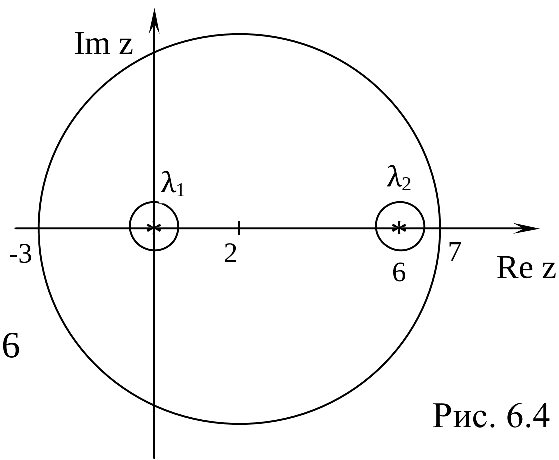

Рис. 6.4

окружности не пересекались и целиком лежали в круге $|z-2| \le 5$ (рис 6.4).

В трехсвязной области, ограниченной окружностями $|z-2| \le 5$, λ_1 и λ_2, подынтегральная функция всюду аналитична. Тогда по теореме Коши для многосвязной области

$$\oint\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}dz}{z^2-6z} = \oint\limits_{\lambda_1} \frac{e^{z^2}dz}{z^2-6z} + \oint\limits_{\lambda_2} \frac{e^{z^2}dz}{z^2-6z} = \oint\limits_{\lambda_1} \frac{e^{z^2}\big/(z-6)}{z}dz + \oint\limits_{\lambda_2} \frac{e^{z^2}\big/z}{z-6}dz =$$

$$= 2\pi i \left.\frac{e^{z^2}}{z-6}\right|_{z=0} + 2\pi i \left.\frac{e^{z^2}}{z}\right|_{z=6} = \frac{e^{36}-1}{3}\pi i\ .$$

<u>Пример 2.</u> Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{\left(z^2-1\right)^2}dz.$

Решение

Подынтегральная функция $\frac{\sin \pi z}{\left(z^2-1\right)^2}$ является аналитической в области $|z-1| \le 1$ всюду, кроме точки $z_0 = 1$. Представим ее в виде

$$\frac{\sin \pi z}{\left(z^2-1\right)^2} = \frac{\sin \pi z}{(z-1)^2(z+1)^2} = \frac{\dfrac{\sin \pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2},$$

и в качестве $f(z)$ возьмем $\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}$. Полагая в формуле (6.2) $n=1$, получим

$$\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\dfrac{\sin \pi z}{\left(z+1\right)^2}}{\left(z-1\right)^2}dz = 2\pi i f'\left(1\right).$$

Находим производную

$$f'(z) = \left(\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}\right)' = \frac{\pi \cos \pi z \cdot (z+1)^2 - 2(z+1)\sin \pi z}{(z+1)^4},$$

$$f'(1) = \frac{4\pi \cos \pi - 4\sin \pi}{16} = -\frac{\pi}{4}.$$

Тогда

$$\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{\left(z^2-1\right)^2} dz = -\frac{\pi^2}{2} i .$$

ЗАДАНИЯ

С помощью интегральной формулы Коши вычислить следующие интегралы:

157. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+2z} dz .$

158. $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz .$

159. $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin \frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3} dz .$

160. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin iz}{z^2-4z+3} dz .$

161. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{tg(z+2)}{ze^{1/(z+2)}} dz .$

162. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos\left(z+\pi i\right)}{z\left(z^2+16\right)} dz .$

163. $\oint\limits_{|z-i|=1/2} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz .$

164. $\oint\limits_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+9)\left(z+9\right)} .$

165. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz .$

166. $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{sh^2 z}{(z-2)^3} dz .$

167. $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{\left(z-1\right)^2\left(z-3\right)} dz .$

168. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z\, shz}{(z^2-1)^2} dz .$

169. $\oint\limits_{|z-3|=6} \frac{z\,dz}{\left(z-2\right)^3\left(z+4\right)} .$

170. $\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{ch e^{i\pi z}}{z^3-4z^2} dz .$

171. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{1}{z^3} \cos\frac{\pi}{z+1} dz .$

172. $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z^2+4)^2} dz .$

§7. РЯД ТЕЙЛОРА

Пусть имеем ряд с комплексными членами

$$z_1+z_2+\ldots+z_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} z_n, \tag{7.1}$$

где $z_n=x_n+iy_n$.

Ряд (7.1) сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды:

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \tag{7.2}$$

$$y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} y_n. \tag{7.3}$$

Ряд (7.1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|. \tag{7.4}$$

Ряды (7.2), (7.3), (7.4) являются рядами с действительными членами, и вопрос об их сходимости решается с помощью известных признаков сходимости рядов в действительной области.

Степенной ряд

Ряд вида

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} c_nz^n, \tag{7.5}$$

где $c_0, c_1, \ldots,$ – комплексные постоянные, а z – комплексная переменная, называется степенным рядом в комплексной области.

Теорема Абеля. Если степенной ряд (7.5) сходится при некотором значении $z=z_0$, то он сходится и притом абсолютно при всех значениях z, для которых $|z|<|z_0|$. Если ряд (7.5) расходится при $z=z_1$, то он расходится и при любом значении z, для которого $|z|>|z_1|$.

Область сходимости ряда (7.5) есть круг с центром в начале координат. Радиус сходимости степенного ряда определяется по формулам

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \quad \text{или} \quad R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}, \tag{7.6}$$

если указанные пределы существуют.

Ряд Тейлора

Функция $f(z)$ однозначная и аналитическая в точке $z=z_0$, представима в окрестности этой точки в виде суммы сходящегося к $f(z)$ степенного ряда Тейлора

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \tag{7.7}$$

коэффициенты которого c_n вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_r \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad (n = 0,1,2,\ldots), \tag{7.8}$$

где r - окружность с центром в точке $z = z_0$, в которой функция $f(z)$ аналитична. Радиус сходимости ряда (7.7) будет равен расстоянию от точки z_0 до ближайшей особой точки функции $f(z)$.

Можно получить разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$ для следующих функций:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, \qquad |z| < \infty;$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |z| < \infty;$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad |z| < \infty;$$

$$\mathrm{sh}\, z = z + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |z| < \infty;$$

$$\mathrm{ch}\, z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad |z| < \infty;$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^2}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}, \qquad |z| < 1;$$

$$(1+z)^{\alpha} = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}z^n + \ldots, \qquad |z| < 1.$$

При $\alpha = -1$ получаем геометрическую бесконечно убывающую прогрессию

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots + (-1)^{n-1}z^{n-1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n, \qquad |z| < 1.$$

<u>**Пример 1.**</u> Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - 2z - 3}$ в окрестности точки $z_0 = 0$.

Решение

Разложим данную функцию на простейшие дроби

$$\frac{z}{z^2 - 2z - 3} = \frac{1}{4}\frac{1}{z+1} + \frac{3}{4}\frac{1}{z-3}.$$

Преобразуем правую часть следующим образом:

$$\frac{z}{z^2-2z-3}=\frac{1}{4}\frac{1}{1+z}-\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}.$$

Используя геометрическую прогрессию, получим

$$\frac{z}{z^2-2z-3}=\frac{1}{4}\left(1-z+z^2-z^3+\ldots\right)-\frac{1}{4}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}+\ldots\right)=$$

$$=-\frac{z}{3}+\frac{2}{3^2}z^2-\frac{7}{3^3}z^3+\ldots\ .$$

Радиус сходимости полученного ряда $R=1$.

Пример 2. Найти несколько первых членов разложения в ряд по степеням z функции $f(z)=tgz$ и найти радиус сходимости ряда.

Решение

Пусть искомый ряд имеет вид

$$f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\ldots+c_{n-1}z^{n-1}+\ldots,$$

где

$$c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\quad (n=0,1,2,\ldots),\qquad f^{(0)}(0)=f(0)=0.$$

Для нахождения значений производных $f^{(n)}(z)$ в точке $z=0$ продифференцируем функцию $f'(z)=\frac{1}{\cos^2 z}$ или

$$\left.\begin{aligned}
f'(z)&=1+f^2(z);\\
f''(z)&=2f(z)f'(z);\\
f'''(z)&=2\left[\left(f'(z)\right)^2+f(z)f''(z)\right];\\
f^{(4)}(z)&=2\left[3f'(z)f''(z)+f(z)f'''(z)\right];\\
f^{(5)}(z)&=2\left[3\left(f''(z)\right)^2+4f'(z)f'''(z)+f(z)f^{(4)}(z)\right],
\end{aligned}\right\}$$

полагая $z=0$, найдем

$$f'(0)=1;\quad f''(0)=0;\quad f'''(0)=2;\quad f^{(4)}(0)=0;\quad f^{(5)}(0)=16,\ \ldots\ .$$

Подставляя найденные значения производных в ряд, получим

$$tgz=z+\frac{2}{3!}z^3+\frac{16}{5!}z^5+\ldots\ .$$

Ближайшей особой точкой к точке $z=0$ является точка $\xi=\frac{\pi}{2}$.

Поэтому радиус сходимости полученного ряда $R = \pi/2$.

ЗАДАНИЯ

В следующих задачах данные функции разложить в ряд Тейлора, используя готовые разложения, и найти радиусы сходимости рядов:

173. e^z по степеням $2z - 1$.

174. 2^z по степеням $z + 2$.

175. $\cos z$ по степеням $z + \dfrac{\pi}{4}$.

176. $\sin(2z+1)$ по степеням $z + 1$.

177. $\dfrac{1}{3z+1}$ по степеням $z + 2$.

178. $\dfrac{z+1}{z^2+4z-5}$ по степеням z.

179. $\dfrac{z}{z^2+i}$ по степеням z.

180. $\cos^2\dfrac{iz}{2}$ по степеням z.

181. $\ln(2-z)$ по степеням z.

Найти несколько первых членов разложения в ряд по степеням z следующих функций. Найти радиус сходимости рядов:

182. $\dfrac{1}{1+e^z}$.

183. $\dfrac{1}{2+\sin z}$.

184. $\ln\left(1+e^{-z}\right)$.

185. $\ln\cos z$.

186. $\ln(1+\cos z)$.

187. $e^{\frac{1}{1-z}}$.

§8. РЯД ЛОРАНА

Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \qquad (8.1)$$

сходится в области, в которой сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots \qquad (8.2)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots \,. \qquad (8.3)$$

Ряд (8.2) сходится в области

$$|z - z_0| > r,$$

где $r = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}|}$, $(c_{-n} \neq 0)$, т.е. вне круга с центром в точке $z = z_0$ радиуса r.

Ряд (8.3) сходится в круге

$$|z - z_0| < R,$$

где R определяется по формулам (7.6).

Тогда, если

1) $r > R$, то ряд (8.1) расходится всюду;
2) $r < R$, то ряд (8.1) сходится в кольце $r < |z - z_0| < R$,

здесь $r \geq 0$, $\quad 0 < R < +\infty$.

Функция $f(z)$, однозначная и аналитическая в кольце

$$r < |z - z_0| < R, \tag{8.4}$$

разлагается в этом кольце в ***ряд Лорана***

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}}_{\substack{\text{Главная часть} \\ \text{ряда Лорана}}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n}_{\substack{\text{Правильная часть} \\ \text{ряда Лорана}}}, \tag{8.5}$$

где коэффициенты c_n находятся по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{8.6}$$

Здесь Γ - произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащая внутри кольца (8.4).

На практике при нахождении коэффициентов c_n стараются избегать применения формул (8.6), так как они приводят к громоздким выкладкам. Обычно, если это возможно, используются готовые разложения в ряд Тейлора.

<u>Пример 1.</u> Определить область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 + 4i)^n}{(z + 2i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z + 2i}{6} \right)^n.$$

Решение

Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n}$ имеем

$$c_{-n}=(3+4i)^n,\quad c_{-n-1}=(3+4i)^{n+1},$$

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(3+4i)^{n+1}\right|}{\left|(3+4i)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}|3+4i|=5.$$

Первый ряд сходится в области $|z+2i|>5$.

Для ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2i}{6}\right)^n$ имеем

$$c_n=6^{-n},\qquad c_{n+1}=6^{-n-1},\qquad R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{6^{-n}}{6^{-n-1}}\right|=6.$$

Он сходится в области $\left|z+2i\right|<6$.

Итак, $r=5<R=6$. Следовательно, данный ряд сходится в кольце

$$5<|z+2i|<6.$$

Пример 2. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=z^2\cos\frac{1}{z}$ в окрестности точки $z_0=0$.

Решение

Для любого комплексного α имеем

$$\cos\alpha=1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\frac{\alpha^6}{6!}+\ldots\,.$$

Полагая $\alpha=\frac{1}{z}$, получим

$$f(z)=z^2\cos\frac{1}{z}=z^2\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\frac{1}{6!z^6}+\ldots\right)=$$

$$=z^2-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!z^2}-\frac{1}{6!z^4}+\ldots\,.$$

Это разложение справедливо в «кольце» $0<|z-0|<+\infty$ (вся комплексная плоскость с одной выброшенной точкой $z=0$). Данная функция является аналитической в указанном «кольце».

Пример 3. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}$ в кольце $1<|z|<2$.

Решение

Представим $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}-\frac{1}{1-z}.$$

Разложение в ряд функции $\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+...$ остается сходящимся в кольце, так как $|z|<2$.

Ряд для функции $\frac{1}{1-z}$ расходится при $|z|>1$. Поэтому преобразуем ее следующим образом:

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+...\right)$$

Полученный ряд сходится для $\left|\frac{1}{z}\right|<1$, т.е. при $|z|>1$. Тогда

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}+\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{16}+...+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+...=$$

$$=...+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{16}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}.$$

ЗАДАНИЯ

Определить области сходимости рядов:

188. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n}}z^n$.

189. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1-i}\right)^n$.

190. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-i)^n z^n}$.

191. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n(z+1)^n}$.

192. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n$.

193. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(z-i)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}n\left(z-i\right)^n$.

194. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$.

195. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4 z^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n2^n}$.

Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$ следующие функции (указав на главную и правильную части ряда Лорана):

196. $\frac{\sin z}{z}$.

197. $\frac{\sin^2 z}{z}$.

198. $\dfrac{e^z}{z^2}$.

199. $z^3 e^{\frac{1}{z}}$.

200. $z^4 \cos\dfrac{1}{z}$.

201. $\dfrac{1}{z}\sin^2\dfrac{2}{z}$.

202. $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$.

203. $\dfrac{e^z-1}{z}$.

Разложить в ряд Лорана следующие функции в окрестностях указанных точек:

204. $\dfrac{1}{z+2}, \qquad z_0 = 1.$

205. $\dfrac{z}{2z+3}, \quad z_0 = 2.$

206. $\dfrac{z}{(z+1)^2}, \qquad z_0 = -1.$

207. $\dfrac{1}{z^2-4z+3}, \quad z_0 = 1.$

208. $\dfrac{\sin z}{z-2}, \qquad z_0 = 2.$

209. $z e^{\frac{1}{z+i}}, \qquad z_0 = -i$.

Разложить следующие функции в ряд Лорана в указанных кольцах:

210. $\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}, \quad a)\ 2<|z|<3; \quad b)\ 3<|z|<+\infty$.

211. $\dfrac{1}{z^2+z}, \quad a)\ 0<|z|<1; \quad b)\ 1<|z|<+\infty$.

212. $\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}, \quad 1<|z|<2.$

213. $\dfrac{z+2}{z^2-4z+3}, \quad 2<|z-1|<+\infty$.

214. $\dfrac{1}{z^2+1}, \quad 0<|z-i|<2.$

§9. НУЛИ ФУНКЦИИ. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Нули функции. Точка z_0 называется ***нулем*** аналитической в точке z_0 функции $f(z)$ порядка (или кратности) n, если выполняются условия

$$f(z_0)=0, \quad f'(z_0)=0, \ \ldots, \ f^{(n-1)}(z_0)=0, \qquad f^{(n)}(z_0)\neq 0.$$

Если $n=1$, то точка z_0 называется ***простым нулем***.

Точка z_0 тогда и только тогда является нулем n - го порядка функции $f(z)$, аналитической в точке z_0, когда в некоторой окрестности этой точки имеет место равенство

$$f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z),$$

где функция $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0$.

Особые точки. Точка z_0 называется ***изолированной особой точкой*** функции $f(z)$, если существует окрестность этой точки, в которой $f(z)$ аналитична всюду, кроме самой точки $z=z_0$. При этом различают три вида изолированных особых точек:

1) Изолированная особая точка z_0 для функции $f(z)$ называется ***устранимой особой точкой***, если разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 не содержит главной части.

Точка z_0 называется устранимой особой точкой функции $f(z)$, если существует конечный предел функции $f(z)$ в точке z_0.

2) Изолированная особая точка z_0 для функции $f(z)$ называется ***полюсом n-го порядка***, если разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 содержит в главной части конечное число слагаемых, отличных от нуля. При этом старшая степень у разностей $z-z_0$, содержащихся в знаменателях главной части ряда Лорана, равна n.

Для того, чтобы точка z_0 была полюсом порядка n $(n\geq 1)$ функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы эта точка была нулем порядка n функции $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$. В случае $n=1$ полюс 1-го порядка называют ***простым***.

Для того чтобы точка z_0 являлась полюсом порядка n функции $f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(z)$ можно было представить в виде $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$, где функция $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0$.

3) Изолированная особая точка z_0 для функции $f(z)$ называется ***существенно особой точкой***, если разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 содержит в главной части бесконечно много ненулевых слагаемых.

Точка z_0 называется существенно особой точкой функции $f(z)$, если в точке z_0 функция $f(z)$ не имеет предела ни конечного, ни бесконечного.

Пример 1. Найти нули функции $f(z)=1+\cos z$ и определить их порядок.

Решение

Приравнивая $f(z)$ к нулю, получим $\cos z = -1$, откуда $z_n = (2n+1)\pi$ $\left(n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots\right)$ - нули данной функции.

$$f'(z_n) = -\sin(2n+1)\pi = 0,$$

$$f''(z_n) = -\cos(2n+1)\pi = 1 \neq 0.$$

Следовательно, точки $z_n = (2n+1)\pi$ являются нулями второго порядка данной функции.

Пример 2. Найти особые точки функции $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$ и установить их характер.

Решение

Особая точка функции $f(z)$ есть $z_0 = 0$. Имеем

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1.$$

Следовательно, точка $z_0 = 0$ есть устранимая особая точка.

Пример 3. Найти особые точки функции $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z-1)^3 (z+1)}$ и установить их характер.

Решение

Функция $f(z)$ имеет особые точки $z = 1$ и $z = -1$.

В точке $z = 1$ $\quad f(z) = \dfrac{\sin z / (z+1)}{(z-1)^3}$. Здесь $\varphi(z) = \dfrac{\sin z}{z+1}$ аналитична в окрестности $z = 1$ и $\varphi(1) = \dfrac{\sin 1}{2} \neq 0$. Следовательно, точка $z = 1$ является полюсом третьего порядка функции $f(z)$.

Аналогично, для $f(z) = \dfrac{\sin z / (z-1)^3}{(z+1)}$ точка $z = -1$ есть простой полюс.

Пример 4. Определить характер особой точки $z = 0$ функции $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$.

Решение

Рассмотрим поведение функции $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$ на действительной и мнимой осях. На действительной оси $z = x$ и $f(x) = e^{1/x^2} \to \infty$ при $x \to 0$. На мнимой оси $z = iy$ и $f(iy) = e^{-1/y^2} \to 0$ при $y \to 0$. Следовательно, предел $f(z)$ в точке $z=0$ не существует ни конечный, ни бесконечный. Точка $z=0$ - существенно особая точка функции $f(z)$.

Или, вывод о том, что точка $z=0$ является существенно особой можно сделать, разложив функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$:

$$f\left(z\right)=1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!z^4}+\frac{1}{3!z^6}+\frac{1}{4!z^8}+\ldots\ .$$

Ряд содержит бесконечную главную часть.

Пример 5. Определить характер особой точки $z_0=0$ функции $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^7}$.

Решение

Разлагая функцию $\cos z$ в ряд Тейлора по степеням z, получим лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности нуля:

$$f(z)=\frac{1}{z^7}\left(1-1+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}-\frac{z^8}{8!}+\frac{z^{10}}{10!}-\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2!z^5}-\frac{1}{4!z^3}+\frac{1}{6!z}-\frac{z}{8!}+\frac{z^3}{10!}-\ldots\ .$$

Разложение содержит конечное число членов с отрицательными степенями z. Наибольший показатель степени в знаменателях главной части равен пяти, следовательно, точка $z_0=0$ - полюс пятого порядка.

ЗАДАНИЯ

У следующих функций найти нули и определить их порядки:

215. $f(z)=z^4+4z^2$.

216. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$.

217. $f(z)=z^2\sin z$.

218. $f(z)=\dfrac{sh^2 z}{z}$.

219. $f\left(z\right)=1+ch z$.

220. $f\left(z\right)=e^{\sin z}-e^{tg z}$.

221. $f(z)=z^2\left(e^{z^2}-1\right)$.

222. $f(z)=6\sin z^3+z^3\left(z^6-6\right)$.

Определить характер особой точки $z_0=0$ для следующих функций:

223. $f(z)=\dfrac{1}{z-\sin z}$.

224. $f(z)=\dfrac{1}{\cos z-1+\dfrac{z^2}{2}}$.

225. $f(z)=\dfrac{1}{e^{-z}+z-1}$.

226. $f(z)=\dfrac{\sin z}{e^{-z}+z-1}$.

Найти особые точки и определить их характер у следующих функций:

227. $f(z)=\dfrac{1}{1-\sin z}$.

228. $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$.

229. $f(z)=e^{\frac{1}{z+2}}$.

230. $f(z)=\cos\dfrac{1}{z}$.

231. $f(z)=\dfrac{z}{z^5+2z^4+z^3}$.

232. $f(z)=\dfrac{1}{e^{-z}+1}+\dfrac{1}{z^2}$.

233. $f(z)=e^{-\frac{1}{z^2}}$.

234. $f(z)=\sin\dfrac{\pi}{z+1}$.

235. $f(z)=ch\dfrac{1}{z}$.

236. $f(z)=\dfrac{z^2}{\cos z-1}$.

237. $f(z)=\dfrac{1-\sin z}{\cos z}$.

238. $f(z)=\dfrac{z-\pi}{\sin^2 z}$.

Определить характер указанных особых точек у следующих функций:

239. $f(z)=\dfrac{1+\cos z}{z-\pi}$, $z_0=\pi$.

240. $f(z)=\dfrac{z^2-3z+2}{z^2-2z+1}$, $z_0=1$.

241. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$, $z_0=0$.

242. $f(z)=\dfrac{shz}{z}$, $z_0=0$.

243. $f(z)=\cos\dfrac{1}{z+\pi}$, $z_0=-\pi$.

244. $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^6+2z^5+z^4}$, $z_1=-1$.

245. $f(z)=\dfrac{\ln\left(1+z^3\right)}{z^2}$, $z_0=0$.

246. $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z}$, $z_0=0$.

247. $f(z)=\dfrac{e^{z+e}}{z+e}$, $z_0=-e$.

248. $f(z)=z\,sh\dfrac{1}{z}$, $z_0=0$.

§10. ВЫЧЕТЫ ФУНКЦИЙ

Пусть точка z_0 есть изолированная особая точка функции $f(z)$. ***Вычетом*** функции $f(z)$ в точке z_0 называется число

$$res\, f\left(z_0\right) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\lambda} f\left(z\right)dz \tag{10.1}$$

(другие обозначения $res\left[f(z);z_0\right]$, $\underset{z=z_0}{res}\, f(z)$). В качестве контура λ можно взять окружность с центром в точке z_0 достаточно малого радиуса, не выходящую за пределы области аналитичности функции $f(z)$ и не содержащую внутри других особых точек функции $f(z)$.

Вычет функции равен коэффициенту при члене $\dfrac{1}{z-z_0}$ в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки $z=z_0$:

$$res\ f\left(z_0\right) = c_{-1}. \tag{10.2}$$

Вычет в устранимой особой точке равен нулю.

Если точка z_0 есть полюс n-го порядка функции $f(z)$, то

$$res\ f\left(z_0\right) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{f\left(z\right)\left(z-z_0\right)^n\right\}. \tag{10.3}$$

В случае простого полюса $(n=1)$

$$res\ f\left(z_0\right) = \lim_{z\to z_0}\left[f\left(z\right)\left(z-z_0\right)\right]. \tag{10.4}$$

Если функция $f(z)$ в окрестности точки z_0 представима как частное двух аналитических функций $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем $\varphi\left(z_0\right) \neq 0$, $\psi\left(z_0\right) = 0$, а $\psi'\left(z_0\right) \neq 0$, т.е. z_0 есть простой полюс функции $f(z)$, то

$$res\ f\left(z_0\right) = \frac{\varphi\left(z_0\right)}{\psi'\left(z_0\right)}. \tag{10.5}$$

<u>Пример 1.</u> Найти вычет функции $f(z) = z^3\sin\dfrac{1}{z^2}$ в ее особой точке.

Решение

Особая точка функции $f(z)$ есть точка $z_0 = 0$.

Лорановское разложение в окрестности z_0 имеет вид

$$f(z) = z^3\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!z^6} + \frac{1}{5!z^{10}} - \ldots\right) = z - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^7} - \ldots,$$

т.е. содержит бесконечное число членов в главной части и точка $z_0 = 0$ является существенно особой. Вычет функции равен нулю, так как коэффициент c_{-1} в лорановском разложении $f(z)$ равен нулю.

Пример 2. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{e^{1/z}}{1-z}$ в ее особых точках. Особыми точками данной функции будут $z=1$ и $z=0$. Точка $z=1$ - простой полюс, поэтому по формуле (10.5)

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z)=\left.\frac{e^{1/z}}{-1}\right|_{z=1}=-e.$$

Для установления характера особой точки $z=0$ разложим функцию в ряд Лорана в окрестности этой точки

$$e^{1/z}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots$$

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots$$

$$\frac{e^{1/z}}{1-z}=\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots\right)\left(1+z+z^2+z^3+\ldots\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\right)\frac{1}{z}+c_{-2}\frac{1}{z^2}+\ldots+\textit{правильная часть}.$$

Т.к. главная часть содержит бесконечное множество членов, то точка $z=0$ является существенно особой.

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=c_{-1}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots=e-1.$$

ЗАДАНИЯ

Найти вычеты в особых точках для следующих функций:

249. $f(z)=z^3e^{1/z}$.

250. $f(z)=\dfrac{chz}{(z^2+1)(z-3)}$.

251. $f(z)=\dfrac{e^z}{\frac{1}{4}-\sin^2 z}$.

252. $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$.

253. $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}$.

254. $f(z)=\dfrac{e^{-1/z^2}}{1+z^4}$.

255. $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z}$.

256. $f(z)=\cos\dfrac{1}{z}+z^3$.

257. $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^3(z-3)}$.

258. $f(z)=e^{z^2+\frac{1}{z^2}}$.

259. $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3-\frac{\pi}{2}z^2}$.

260. $f(z)=\sin z\cos\dfrac{1}{z}$.

261. $f(z)=e^{\frac{z}{z-1}}$.

262. $f(z)=\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{1-z}$.

263. $f(z)=\dfrac{e^{1/z}}{1+z}$.

264. $f(z)=e^z\sin\dfrac{1}{z}$.

§11. ТЕОРЕМА КОШИ О ВЫЧЕТАХ

Если функция $f(z)$ является аналитической на границе C области D и всюду внутри области, за исключением конечного числа особых точек $z_1,z_2,\ldots z_n$, то

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \qquad (11.1)$$

ЗАДАНИЯ

Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах:

265. $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{e^z dz}{z^3(z+1)}$.

266. $\displaystyle\oint_{|z|=1} tg\, z\, dz$.

267. $\displaystyle\oint_{|z|=1/2} z^2\sin\frac{1}{z}dz$.

268. $\displaystyle\oint_{|z-i|=1}\frac{e^z dz}{z^4+2z^2+1}$.

269. $\displaystyle\oint_{|z-i|=3}\frac{e^{z^3}-1}{z^3-iz^2}dz$.

270. $\displaystyle\oint_{|z-1+i|=2}\frac{sh\, z}{z^3-z^2}dz$.

271. $\displaystyle\oint_{|z|=\sqrt{3}}\frac{\sin\pi z}{z^2-z}dz$.

272. $\displaystyle\oint_{|z|=1} z^3\cos\frac{1}{z}dz$.

273. $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{z^2 dz}{\sin^3 z\,\cos z}$.

274. $\displaystyle\oint_{|z+1|=4}\frac{z\,dz}{e^z+3}$.

275. $\displaystyle\oint_{|z|=4}\frac{e^{iz}dz}{(z-\pi)^3}$.

276. $\displaystyle\oint_{C^+}\frac{dz}{z^4+1},\ C: x^2+y^2=2x$.

277. $\oint\limits_{C^+} \frac{z+1}{z^2+2z-3}dz,$

$C: x^2+y^2=16.$

278. $\oint\limits_{C^+} \frac{z\sin z}{\left(z-1\right)^5}dz,$

$C: \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{9}=1.$

§12. БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕННАЯ ОСОБАЯ ТОЧКА

Говорят, что функция $f(z)$ аналитична в бесконечно удаленной точке $z=\infty$, если функция $\varphi(\alpha)=f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ аналитична в точке $\alpha=0$.

Например, функция $f(z)=\sin\frac{1}{z}$ аналитична в точке $z=\infty$, поскольку функция $\varphi(\alpha)=f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\sin\alpha$ аналитична в точке $\alpha=0$.

Точка $z_0=\infty$ называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если в некоторой окрестности этой точки нет других особых точек функции $f(z)$.

Если $z_0=\infty$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$, то лорановское разложение $f(z)$ в окрестности этой точки не содержит положительных степеней z; если $z_0=\infty$ - полюс, то это разложение содержит конечное число положительных степеней z, в случае существенной особенности - бесконечное число положительных степеней z.

Вычетом функции $f(z)$ в бесконечности называют величину

$$res\, f\left(\infty\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma^-} f\left(z\right)dz,$$

где Γ^- - достаточно большая окружность $|z|=\rho$, проходимая по часовой стрелке.

$$res\, f(\infty)=-c_{-1}.$$

Если функция $f(z)$ имеет в расширенной комплексной плоскости конечное число особых точек $a_1,a_2,...,a_n$, то сумма всех ее вычетов, включая и вычет в бесконечности, равна нулю.

$$res\, f(\infty)+\sum_{k=1}^{\infty} res\, f\left(a_k\right)=0 \qquad (12.1)$$

или

$$res\, f(\infty)=-\sum_{k=1}^{\infty} res\, f\left(a_k\right). \qquad (12.2)$$

Это соотношение бывает удобно использовать при вычислении некоторых интегралов.

Пример 1. Вычислить интеграл $I = \oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^4}$.

Решение

Полюсами подынтегральной функции $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ являются корни z_1, z_2, z_3, z_4 уравнения $z^4 = -1$, лежащие внутри окружности $|z| = 2$.

В окрестности бесконечно удаленной точки получаем разложение:

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{z^4}\frac{1}{1+\frac{1}{z^4}} = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^8} + \frac{1}{z^{12}} - ...,$$

$$res\, f(\infty) = -c_{-1} = 0.$$

Тогда $\quad I = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{4} res\, f\left(z_k\right) = -2\pi i\, res\, f\left(\infty\right) = 0.$

ЗАДАНИЯ

Определить характер бесконечно удаленной точки для следующих функций:

279. $f(z) = \frac{z+1}{z^4}$.

280. $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$.

281. $f(z) = \cos\frac{1}{z}$.

282. $f(z) = e^{1/z^2}$.

283. $f\left(z\right) = z^3 e^{1/z}$.

284. $f(z) = \frac{z^3 - z^2 + z + 6}{z^2}$.

Используя вычет относительно бесконечно удаленной точки, вычислить следующие интегралы:

285. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2+1}{z^3} dz$.

286. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{1000z+z}{1+z^{1224}} dz$.

287. $\oint\limits_{|z|=1} z^2 \sin\frac{1}{z} dz$.

288. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^{12}}$.

289. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{z-1} dz$.

290. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^9}{z^{10}-1} dz$.

§13. ПРИЛОЖЕНИЕ ВЫЧЕТОВ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

I. Интегралы вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx. \tag{13.1}$$

Лемма 1. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и существуют такие положительные числа R_0, M, δ, что для всех точек верхней полуплоскости, удовлетворяющих условию $|z| > R_0$, имеет место оценка

$$\left|f(z)\right| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}, \quad |z| > R_0.$$

Тогда

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R'} f(\alpha)d\alpha = 0,$$

где контур интегрирования C_R' представляет собой полуокружность $|z| = R,\ \operatorname{Im} z > 0$ в верхней полуплоскости z.

Итак, пусть функция $f(x)$, заданная на всей действительной оси $-\infty < x < \infty$, может быть аналитически продолжена на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z \geq 0$, причем ее аналитическое продолжение, функция $f(z)$, удовлетворяет условиям леммы 1 и не имеет особых точек на действительной оси. Тогда несобственный интеграл первого рода

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \underset{z=z_k}{res} f(z), \tag{13.2}$$

где z_k - особые точки функции $f(z)$ в верхней полуплоскости.

II. Интегралы вида

$$\int_0^{\infty} R(x)\cos\lambda x\,dx, \qquad \int_0^{\infty} R(x)\sin\lambda x\,dx, \tag{13.3}$$

где $R(x)$ - правильная рациональная дробь, а $\lambda > 0$ - любое вещественное число.

При вычислении этих интегралов используют ***лемму Жордана:***

Пусть $g(z)$ - аналитическая в верхней полуплоскости функция $(0 < \arg z < \pi)$, за исключением конечного числа особых точек, и стремится в этой полуплоскости к нулю равномерно относительно $\arg z$ при $|z| \to \infty$. Тогда при $\lambda > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} g(z)e^{i\lambda z}dz = 0, \qquad (13.4)$$

где C_R - полуокружность в верхней полуплоскости с центром в точке 0 и радиусом R.

Если функция $f(z) = g(z)e^{i\lambda z}$ удовлетворяет трем требованиям:

1) функция $g(z)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана,
2) $g(z)$ аналитична на действительной оси,
3) $g(z)$ аналитична в верхней полуплоскости, исключая конечное число особых точек $a_1, a_2, ..., a_n$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res\, f(a_k). \qquad (13.5)$$

Если функция $f(z)$ удовлетворяет условиям 1) и 3) предыдущей теоремы и на действительной оси имеет конечное число простых полюсов $x_1, x_2, ..., x_m$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \left\{ \sum_{k=1}^{n} res\, f(a_k) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} res\, f(x_k) \right\} \qquad (13.6)$$

III <u>Интегралы вида</u>

$$\int_{0}^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx, \qquad (13.7)$$

где R - рациональная функция аргументов $\cos x$ и $\sin x$, ограниченная внутри промежутка интегрирования.

Полагаем $e^{ix} = z,\quad dx = \dfrac{dz}{iz}$ и $\cos x = \dfrac{z^2+1}{2z},\quad \sin x = \dfrac{z^2-1}{2iz}$,

$$|z| = 1, \quad 0 \le x \le 2\pi.$$

Интеграл (13.7) принимает вид

$$\int_{C^+} F(z)dz, \qquad (13.8)$$

где C^+ - окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Согласно теореме Коши о вычетах интеграл (13.7) равен $2\pi\delta i$, где δ есть сумма вычетов относительно полюсов, заключенных внутри окружности единичного радиуса C .

Пример 1. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^2} \quad (a > 0).$$

Решение

Так как подынтегральная функция $f(x)$ - четная, то $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^2}$.

Введем функцию $f(z) = \dfrac{1}{\left(z^2 + a^2\right)^2}$, которая на действительной оси ($z = x$), совпадает с $f(x)$. Функция $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости полюс второго порядка в точке $z = ai$.

$$\underset{z=ai}{res}\, f(z) = \lim_{z \to ai} \frac{d}{dz}\left[f(z)(z - ai)^2\right] = \lim_{z \to ai} \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z + ai)^2}\right] =$$

$$= \lim_{z \to ai} \frac{-2}{(z + ai)^3} = \frac{-2}{(2ai)^3} = +\frac{1}{4a^3 i}.$$

Тогда

$$I = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{4a^3 i} = \frac{\pi}{4a^3}.$$

Пример 2. Вычислить $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4} dx.$

Решение

Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{ze^{iz}}{z^2 + 4}$; она удовлетворяет всем условиям леммы Жордана: $\lambda = 1, \quad g(z) = \dfrac{z}{z^2 + 4}$.

Особыми точками $f(z)$ будут два простых полюса $z_1 = 2i$ и $z_2 = -2i$, причем в верхней полуплоскости лежит первый из них.

$$res\, f(z_1) = \left.\frac{ze^{iz}(z - 2i)}{(z + 2i)(z - 2i)}\right|_{z = z_1} = \frac{z_1 e^{iz_1}}{2z_1} = \frac{1}{2e^2},$$

Тогда, на основании (13.5)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 + 4} dx = 2\pi i \cdot \frac{1}{2e^2} = \frac{\pi i}{e^2}.$$

Отделяя мнимую часть, находим

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{e^2}.$$

Пример 3. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\cos x)^2} \quad (a > b > 0).$$

Решение

Применяя подстановку $e^{ix} = z$, получим после преобразований

$$I = \frac{4}{i}\int_C \frac{z\,dz}{\left(bz^2+2az+b\right)^2} = \frac{4}{i}2\pi i\sum_{k=1}^{n} resF\left(z_k\right).$$

Внутри единичного круга при условии, что $a > b > 0$, находится только один полюс (двукратный)

$$z_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

Вычет функции $F(z) = \dfrac{z}{\left(bz^2+2az+b\right)^2}$ относительно этого полюса

$$resF(z_1) = \lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\left\{\frac{z(z-z_1)^2}{b^2(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right\} = \frac{a}{4}\left(a^2-b^2\right)^{-3/2}$$

$$I = \frac{2\pi a}{\left(a^2-b^2\right)^{3/2}}.$$

ЗАДАНИЯ

Вычислить следующие интегралы с бесконечными пределами:

291. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+4\right)\left(x^2+9\right)}dx$.

292. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^3}$.

293. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$.

294. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

295. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}$.

296. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+16}$.

297. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{\left(x^2+4x+13\right)^2}$.

298. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4+6x^2+25}$.

Вычислить интегралы:

299. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x\,dx}{x^2-2x+10}$.

300. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$.

301. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4x+20}dx$.

302. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2\cos x}{\left(x^2+16\right)^2}dx$.

303. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}$.

304. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin x}{\left(x^2+2x+2\right)^2}dx$.

305. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^4}dx \quad (a>0)$.

306. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\sin(8x-7)}{x^2-2x+5}dx$.

Вычислить интегралы:

307. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{1-2p\cos x+p^2}$, $(0<p<1)$.

308. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2 3x\,dx}{1-2p\cos 2x+p^2}$, $(0<p<1)$.

309. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{a+\cos x}, \quad (a>1)$.

310. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{1+a\cos x}, \quad (0<a<1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. - М.: Наука, 1981.
2. Шахно К.У. Элементы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления. - Мн.: Вышэйшая школа, 1975.
3. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. - М.: Наука, 1968.
4. Свешников А.Г., Тихонов А.М. Теория функций комплексной переменной. - М.: Наука, 1979.
5. Ершова В.В. Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление. - Мн.: Выш. Шк., 1976.
6. Соломенцев Е.Д. Функции комплексного переменного. - М.: Высшая школа, 1988.
7. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин И.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1989.
8. Привалов И.И. Введение в теорию комплексного переменного. - М.: Наука, 1967.
9. Лавреньтев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1987.
10. Жевержеев В.Ф., Кальницкий Л.А., Сапогов Н.А. Специальный курс высшей математики для втузов. - М., «Высшая школа», 1970.

Содержание

Курлович Сергей Петрович
Корсун Лидия Дмитриевна

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Практикум по выполнению домашних заданий курсов «Математика» и «Высшая математика» для студентов дневной формы обучения

Подписано в печать 29.09.09.
Формат 60x84/$_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Ризография. Усл. печ. л. 2,35. Уч.-изд. л. 2,02.
Изд. № 34.
E-mail: ic@gstu.gomel.by
http://www.gstu.gomel.by

Отпечатано на цифровом дупликаторе
с макета оригинала авторского для внутреннего использования.
Учреждение образования «Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого».
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.