

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

Л. Л. Великович, Ю. Д. Черниченко

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

ПОСОБИЕ

**по курсу «Высшая математика»
для студентов технических специальностей**

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2009

УДК 517.37(075.8)
ББК 22.161.1я73
В27

*Рекомендовано к изданию научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 5 от 25.06.2007 г.)*

Рецензент: зав. каф. «Высшая математика» ГГТУ им. П. О. Сухого канд. физ.-мат. наук,
доц А. А. Бабич

Великович, Л. Л.

В27

Кратные интегралы и их приложения : пособие по курсу «Высшая математика» для студентов техн. специальностей / Л. Л. Великович, Ю. Д. Черниченко. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2009. – 225 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <http://lib.gstu.local>. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-420-872-5.

В пособии подробно излагаются основы теории двойных, тройных, поверхностных и криволинейных интегралов. Но основная его ценность – в большом числе подробно решенных примеров и задач (их около сотни), среди которых встречаются и задачи прикладного характера.

Для студентов всех специальностей технических университетов. Также будет полезно для студентов-математиков и физиков классических университетов и студентов естественно-научных специальностей.

**УДК 517.37(075.8)
ББК 22.161.1я73**

ISBN 978-985-420-872-5

© Великович Л. Л., Черниченко Ю. Д., 2009
© Учреждение образования «Гомельский
государственный технический университет
имени П. О. Сухого», 2009

Оглавление

Введение.....	5
Глава 1. Двойной интеграл: определение, свойства и вычисление	6
1.1. Задачи, приводящие к двойному интегралу.....	6
1.2. Интегральная сумма. Двойной интеграл	10
1.3. Условия существования интеграла	11
1.4. Свойства двойного интеграла.....	14
1.5. Вычисление двойного интеграла.....	15
1.6. Примеры вычисления двойных интегралов (в декартовых координатах).....	20
1.7. Двойной интеграл в полярных координатах	35
1.8. Двойной интеграл в криволинейных координатах: общий случай замены переменных	42
1.9. Двойной интеграл в обобщенных полярных координатах. Теорема существования для общего случая замены переменных.....	57
Глава 2. Тройной интеграл: определение, свойства и вычисление.....	74
2.1. Задача о массе пространственного тела	74
2.2. Интегральная сумма. Тройной интеграл	74
2.3. Вычисление тройного интеграла.....	75
2.4. Второе правило вычисления тройного интеграла	88
2.5. Тройной интеграл в криволинейных координатах: общий случай замены переменных	93
Глава 3. Криволинейные интегралы.....	110
3.1. Криволинейный интеграл первого рода: определение, свойства и вычисление.....	110
3.2. Криволинейный интеграл второго рода: определение, свойства и вычисление.....	119
Глава 4. Поверхностные интегралы	126
4.1. Понятие поверхности	126
4.2. Поверхностный интеграл первого рода: определение, свойства и вычисление.....	129
4.3. Поверхностный интеграл второго рода: определение, свойства и вычисление.....	136
Глава 5. Три замечательные теоремы теории поля.....	144
5.1. Некоторые сведения из теории поля.....	144
5.2. Теоремы (формулы) Стокса и Грина	149
5.3. Теорема (формула) Остроградского	152

Глава 6. Общий подход к понятию интеграла.....	157
6.1. Фигура, диаметр, мера	157
6.2. Плотность массы	157
6.3. Задача о массе фигуры	160
6.4. Интегральная сумма и определенный интеграл по фигуре	164
Глава 7. Геометрические приложения кратных интегралов.....	168
7.1. Вычисление длин линий	168
7.2. Вычисление площадей плоских фигур	171
7.3. Вычисление площадей поверхностей.	177
7.4. Вычисление объемов тел	184
Глава 8. Физические приложения кратных интегралов	189
8.1. Физические приложения двойных интегралов	189
8.2. Физические приложения тройных интегралов	193
8.3. Физические приложения криволинейных интегралов	203
8.4. Физические приложения поверхностных интегралов.....	211
Литература	225

ВВЕДЕНИЕ

Тема «Кратные интегралы» безусловно является одной из самых трудных в курсе высшей математики втуза. Приведем некоторые из причин.

Во-первых, для представления (с последующим построением) области интегрирования необходимо добротное знание аналитической геометрии (в частности, кривых и поверхностей второго порядка), а также умение достаточно быстро исследовать функции при различных способах их задания (явное, неявное, параметрическое) методами дифференциального исчисления.

Во-вторых, сам процесс вычисления кратных интегралов требует достаточно глубокого владения навыками интегрального исчисления функций одной переменной, ведь он, как правило, отягощен наличием параметров под знаком интеграла.

С момента выхода в свет очень полезной книги А. А. Гусака «Ряды и кратные интегралы» (1970) прошло уже больше трех десятков лет. Вышедшие после этого пособия разных авторов (Данко и Попов, Гурский, Герасимович и др.) содержат лишь отдельные главы, посвященные данной тематике. В свете сказанного достаточно очевидна потребность в написании доступного для студента технического вуза пособия, содержащего наряду с необходимыми сведениями теоретического характера большое количество решенных задач. Подчеркнем здесь же, что техника кратного интегрирования чрезвычайно важна для физики (включая математическую и теоретическую физику) и других наук (особенно технических). Поэтому отдельные главы пособия посвящены геометрическим и физическим приложениям интегралов (Главы 7, 8).

Общий подход к понятию интеграла, рассмотренный в Главе 6, позволяет не только с единых позиций взглянуть на все происходящее, но он, в частности, позволяет единообразно получать формулы для вычисления некоторых физических величин (например, статических моментов и моментов инерции).

Глава 5 пособия подтверждает только что сказанное описанием на языке кратных интегралов красивых закономерностей, существующих в теории поля.

ГЛАВА 1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ, СВОЙСТВА И ВЫЧИСЛЕНИЕ

В настоящей главе мы рассмотрим основные вопросы, связанные с интегрированием функций двух независимых переменных. Отлично отметить, что установленные при этом закономерности без каких-либо существенных препятствий могут быть перенесены и на функции любого числа независимых переменных.

1.1. Задачи, приводящие к двойному интегралу

Подобно тому, как вычисление площади криволинейной трапеции приводит к интегралу по отрезку от функции одного переменного, необходимость вычисления объема цилиндрического тела приводит к интегралу по плоской области (двойному интегралу) от функции двух переменных.

Определение 1.1. Пусть $z = f(P) = f(x, y)$ положительная (и непрерывная) функция двух переменных, определенная в области D плоскости xOy . Рассмотрим пространственное тело R , ограниченное снизу областью D , сверху поверхностью $z = f(x, y)$, а с боков цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz , проведенной через границу области D (т. е. граница области D является направляющей для нашей цилиндрической поверхности). Такое тело будем называть цилиндрическим (или цилиндром; иногда используется термин – цилиндрический брус) (рис. 1.1).

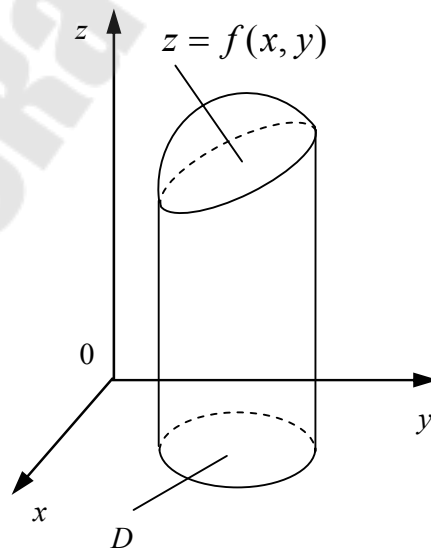


Рис. 1.1

Задача 1.1. Найти объем цилиндроида.

Решение

Применим тот же подход, что и при вычислении площади криволинейной трапеции. А именно: разобьем основание D на элементарные части $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$.

Чтобы не вводить лишних обозначений, договоримся, дробя какую-нибудь фигуру на части, обозначать одинаковым образом как сами эти части, так и их меры.

В соответствии с разбиением области D (т. е. дна цилиндроида) и само тело R разобьется на элементарные («узкие») цилиндрические тела R_1, R_2, \dots, R_n , основаниями которых служат $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ соответственно. Выберем в каждой части ΔS_i ($i = \overline{1, n}$) произвольную точку P_i и заменим приближенно каждый элементарный цилиндرويدик R_i настоящим цилиндром с тем же основанием ΔS_i и высотой $f(P_i)$ (рис. 1.2). Объем R_i будет приближенно равен объему соответствующего цилиндрика: $f(P_i)\Delta S_i$, а для объема всего тела R получаем приближенное равенство

$$V(R) \approx \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta S_i, \quad (1.1)$$

которое будет, очевидно, тем ближе к точному, чем меньше взятые при разбиении D элементарные части ΔS_i .

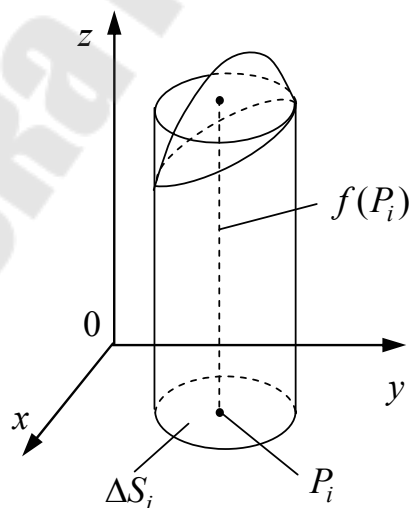


Рис. 1.2

Примечание 1.1. Подчеркнем, что интегральное исчисление применимо именно в тех ситуациях, где имеет место указанная тенденция.

Чтобы получить точное значение объема, следует перейти к пределу в равенстве (1.1), устремив максимальный диаметр λ ячеек ΔS_i к нулю

$$V(R) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i. \quad (1.2)$$

(Напомним, что диаметром фигуры называют максимальное из расстояний между двумя точками этой фигуры).

Для формулирования следующей задачи нам потребуется

Определение 1.2. Рассмотрим плоскую область D , которую будем считать материальной (т. е. обладающей некоторой массой). На языке физики: D – это плоская пластина. Пусть P – некоторая точка области D . Окружим точку P малой областью площади ΔS и пусть Δm количество массы, приходящейся на площадь ΔS . Тогда поверхностная плотность ρ в точке P есть предел средней плотности:

$$\rho = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta S}, \quad (1.3)$$

когда ΔS стягивается в точку P .

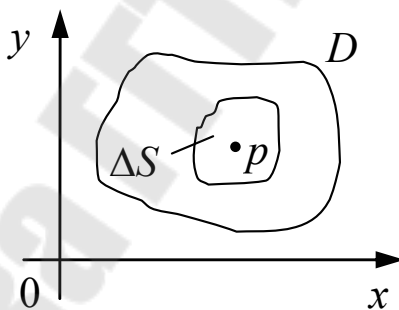


Рис. 1.3

Задача 1.2. Найти массу плоской пластины D , плотность которой $\rho = f(P)$ в каждой точке известна.

Решение

Разобьем произвольным образом пластину D на элементарные («маленькие») части $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ (как только что было указано, ΔS_i будет обозначать и саму i -ю часть и ее площадь). Выберем в каждой части ΔS_i ($i = \overline{1, n}$) произвольную точку P_i и будем считать, что во всех точках этой части плотность постоянна и (приблизленно) равна $f(P_i)$.

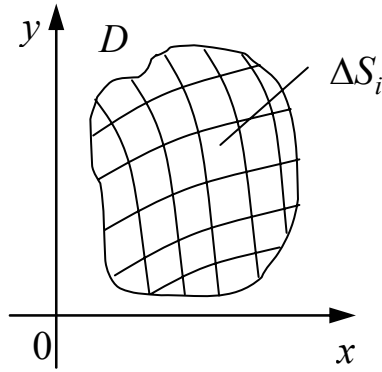


Рис. 1.4

Тогда для массы M пластинки D получаем приближенное равенство:

$$M(D) \approx \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i . \quad (1.4)$$

Чтобы получить точное значение массы пластинки D , следует в равенстве (1.4) перейти к пределу, устремив максимальный диаметр λ ячеек ΔS_i к нулю:

$$M(D) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i . \quad (1.5)$$

Примечание 1.2. Точно так же, как эта задача, решаются задачи о суммарном заряде, распределенном в области D с заданной плотностью $\rho(P)$, о давлении жидкости на дно сосуда, о количестве световой энергии, падающей на площадку D , и многие другие.

Замечание 1.1 (философского характера)

Принцип минимума диссипации (рассеяния) энергии, который в самом общем виде сформулировал академик Н. Н. Моисеев, утверждает: «Для сохранения своего существования система должна стремиться к уменьшению бесполезных затрат энергии».

Именно поэтому на протяжении всей истории своего существования человечество стремится найти единообразные подходы к решению разнообразных, на первый взгляд, задач, а, значит, ответить на вопрос: «Как решить множество задач одним способом?» Рассмотренный в разделе 1.1 материал не только является хорошей иллюстрацией к сказанному, но и прекрасно демонстрирует универсальность математического моделирования различных ситуаций.

1.2. Интегральная сумма. Двойной интеграл

Отвлечемся теперь от физического смысла рассмотренных задач и попробуем вычлениить те математические операции, которые привели к их решению. Прежде всего отметим, что в области D была задана функция точки $f(P) = f(x, y)$. Для получения приближенных равенств (1.1) и (1.4) были проделаны следующие операции:

1. Область D дробилась (произвольным образом) на конечное число частей n .
2. В каждой части выбиралась (произвольным образом) некоторая точка P_i .
3. Вычислялись значения $f(P_i)$ ($i = \overline{1, n}$).
4. Составлялись произведения $f(P_i)\Delta S_i$ ($i = \overline{1, n}$).
5. Все найденные произведения складывались:

$$\sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta S_i. \quad (1.6)$$

Определение 1.3. Полученная в результате перечисленных операций сумма (1.6) носит название n -й интегральной суммы.

При заданном числе n частей, на которые дробится область D , можно составить сколько угодно n -х интегральных сумм. В самом деле, можно, во-первых, по-разному дробить фигуру на n частей, и, во-вторых, в каждой части можно произвольным образом выбрать точку P_i .

Чтобы получить точное значение объема $V(R)$ или массы $M(D)$, мы выполняли шестую операцию – брали предел n -й интегральной суммы, устремив к нулю размеры частей, на которые была раздроблена область D .

Если по-разному составлять n -е интегральные суммы в рассмотренных задачах, то их значения будут, конечно, отличаться друг от друга и мы будем получать отличающиеся друг от друга приближенные значения $V(R)$ (соответственно $M(D)$). Однако в пределе эти отличия должны стереться. Иными словами, предел не должен зависеть от способов составления интегральных сумм. Такой предел называется *двойным интегралом по области D от функции $f(P)$* .

Дадим полное определение двойного интеграла.

Определение 1.4. Двойным интегралом по области D от заданной на ней функции $f(P) = f(x, y)$ называется конечный предел n -й

интегральной суммы, когда стремится к нулю наибольший из диаметров элементарных частей, на которые дробится область D при составлении интегральных сумм. Подразумевается, что предел не зависит от способов составления интегральных сумм.

Используются обозначения:

$$\iint_D f(P)dS = \iint_D f(x, y)dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta S_i. \quad (1.7)$$

Из равенств (1.2) и (1.7) вытекает *геометрический смысл двойного интеграла*: двойной интеграл от функции $f(P) \geq 0$ по области D равен объему цилиндриода с основанием D и ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$.

Из равенств (1.5) и (1.7) вытекает *механический смысл двойного интеграла*: если неотрицательная функция $\rho = f(P)$ выражает поверхностную плотность пластинки D , то ее масса равна двойному интегралу от функции $f(P)$ по области D .

Замечание 1.2

Если в двойном интеграле по области D положить подынтегральную функцию, равной 1, т. е. рассмотреть интеграл $\iint_D dS$, то в результате получится площадь $S(D)$ нашей области, ибо суммирование элементов dS , очевидно, приводит именно к $S(D)$.

Замечание 1.3 (методологического характера)

Материал раздела 1.2 является прекрасной иллюстрацией той общей концепции *математики как исследования операций*, которую предложил и развивает в своих исследованиях первый из авторов настоящего пособия (Л. Л. Великович). Ведь, если вдуматься, то для решения любой (математической) задачи необходимо найти упорядоченную цепочку операций, осуществление которых и приведет к ее решению.

1.3. Условия существования интеграла

Определение 1.5. Функция $f(P) = f(x, y)$, определенная в области D , называется интегрируемой, если для нее существует двойной интеграл $\iint_D f(P)dS$, т. е. соответствующая интегральная сумма имеет предел (1.7).

Прежде всего отметим, что всякая интегрируемая функция (как и в случае функции одной переменной) должна быть ограниченной. В самом деле, если предположить, что в области D функция $f(P)$ не является ограниченной, то при любом разбиении D на элементарные части она будет неограниченной хотя бы в одной из элементарных частей. Тогда за счет произвольности выбора точки P_i внутри части ΔS_i можно сделать значение $f(P_i)$ сколь угодно большим (по абсолютной величине). Следовательно, и соответствующая интегральная сумма, будучи сколь угодно большой, не будет иметь конечного предела. Итак, мы установили *необходимое условие интегрируемости*: если функция интегрируема, то она ограничена.

В дальнейшем будем считать, что необходимое условие выполнено, а именно: для функции $f(P)$, определенной в области D , существуют такие константы m , M , что $\forall P \in D$ имеет место: $m \leq f(P) \leq M$.

Как и в одномерном случае, при изучении двойных интегралов большую роль играют *нижняя и верхняя суммы Дарбу* (Гастон Дарбу (1842–1917) – французский математик):

$$s = \sum_{i=1}^n m_i \Delta S_i, \quad (1.8)$$

$$S = \sum_{i=1}^n M_i \Delta S_i, \quad (1.9)$$

где через m_i , M_i обозначены соответственно точные нижняя и верхняя границы функции $f(P)$ на ΔS_i .

Примечание 1.3. Напомним, что наибольшая из всех нижних границ некоторого множества называется точной нижней границей (гранью) этого множества, а наименьшая из всех верхних границ – точной верхней границей (гранью) множества.

Нетрудно понять, что конструкция сумм Дарбу существенно проще интегральных: они однозначно определяются выбранным разбиением области на элементарные части. Для непрерывной функции суммы Дарбу являются просто наименьшей и наибольшей из интегральных сумм (при заданном способе разбиения D на элементарные части).

Далее фиксируем некоторое разбиение D на элементарные части. Тогда из определения параметров m_i , M_i вытекает:

$$m_i \leq f(P_i) \leq M_i, \quad (1.10)$$

где P_i – любая точка из ΔS_i . Умножая левую, среднюю и правую части двойного неравенства (1.10) на ΔS_i и суммируя полученные результаты (по i), приходим к двойным неравенствам:

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta S_i \leq \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta S_i, \quad (1.11)$$

$$s \leq \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i \leq S. \quad (1.12)$$

Эти неравенства необходимы для отыскания достаточных условий интегрируемости функций. Кроме них, при этом используются два свойства сумм Дарбу, которые вполне аналогичны соответствующим свойствам их одномерных аналогов.

Лемма 1.1

От добавления новых линий деления области D нижняя сумма Дарбу не уменьшается, верхняя – не увеличивается.

Лемма 1.2

Каждая нижняя сумма Дарбу не больше, чем каждая верхняя сумма Дарбу, хотя бы отвечающая и другому разбиению области D .

Теорема 1.1. Функция, непрерывная в замкнутой квадратуемой области, интегрируема в этой области.

Теорема 1.2. Функция, ограниченная в квадратуемой области и непрерывная всюду, кроме некоторого множества точек площади нуль, интегрируема в этой области.

Замечание 1.4

1. Область называется квадратуемой, если она имеет площадь.
2. Говорят, что множество точек плоскости имеет площадь нуль, если $\forall \varepsilon > 0$ существует многоугольник, содержащий это множество и имеющий площадь, меньшую ε (иными словами, если это множество можно заключить в многоугольник сколь угодно малой площади).
3. При доказательстве Теорем 1.1, 1.2 используется:

Теорема Кантора. Если функция $f(P) = f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области \bar{D} , то она и равномерно непрерывна в этой области.

Напомним, что функция $f(x, y)$ называется равномерно непрерывной в области D , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, такое, что для любых двух

точек $P'(x', y')$ и $P''(x'', y'')$ из D таких, что $|x' - x''| < \delta$, $|y' - y''| < \delta$ имеет место неравенство $|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon$.

1.4. Свойства двойного интеграла

Эти свойства вполне аналогичны соответствующим свойствам одномерных (определенных) интегралов. Их доказательства опираются на определение понятия двойного интеграла в предположении, что речь идет о функциях, интегрируемых в соответствующих областях.

P1. Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла:

$$\iint_D kf(P)dS = k \iint_D f(P)dS,$$

где $k = \text{const}$.

P2. Двойной интеграл от алгебраической суммы интегрируемых функций равен соответствующей сумме интегралов от слагаемых:

$$\iint_D (f(P) \pm g(P))dS = \iint_D f(P)dS \pm \iint_D g(P)dS.$$

P3. *Аддитивность:* если область D разбита на конечное число непересекающихся (квадрируемых) частей, то интеграл по области равен сумме интегралов по всем частям.

Например, если область D разбита на две части D_1 и D_2 , то

$$\iint_D f(P)dS = \iint_{D_1} f(P)dS + \iint_{D_2} f(P)dS.$$

P4. Если в замкнутой области \bar{D} функции $f(P)$ и $g(P)$ непрерывны и удовлетворяют неравенству $g(P) < f(P)$, то $\iint_D g(P)dS < \iint_D f(P)dS$, т. е. неравенство можно почленно интегрировать.

P5. Теорема об оценке интеграла.

Абсолютная величина интеграла не превосходит интеграла от абсолютной величины подынтегральной функции:

$$\left| \iint_D f(P)dS \right| \leq \iint_D |f(P)|dS.$$

Р6. Обобщенная Теорема о среднем значении.

Если функции $f(P)$ и $g(P)$ непрерывны в ограниченной замкнутой области \bar{D} , то существует такая точка $P^* \in D$, что имеет место равенство:

$$\iint_D f(P)g(P)dS = f(P^*)\iint_D g(P)dS. \quad (1.13)$$

Замечание 1.5 (теорема о среднем значении)

Чаще всего используется частный случай теоремы при $g(p) \equiv 1$ в \bar{D} :

$$\iint_D f(P)dS = f(P^*) \cdot S(D), \quad (1.14)$$

где $S(D)$ – площадь области D .

Определение 1.6. Средним значением функции $f(P)$ в области D называют отношение двойного интеграла по области D к площади этой области:

$$\bar{f} = \frac{1}{S(D)} \iint_D f(P)dS. \quad (1.15)$$

1.5. Вычисление двойного интеграла

В дальнейшем мы будем широко пользоваться упрощенным представлением об интеграле, как о сумме бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых (элементов). Рассмотрим вопрос о вычислении двойного интеграла

$$\iint_D f(P)dS = \iint_D f(x, y)dS. \quad (1.16)$$

Прежде всего получим удобное выражение для элемента площади dS . Для этого разобьем область D на части прямыми, параллельными осям координат ($x = \text{const}$, $y = \text{const}$). Тогда площадь бесконечно малого элемента dS , ограниченного двумя парами близких параллельных прямых (рис. 1.5), есть

$$dS = dx dy. \quad (1.17)$$

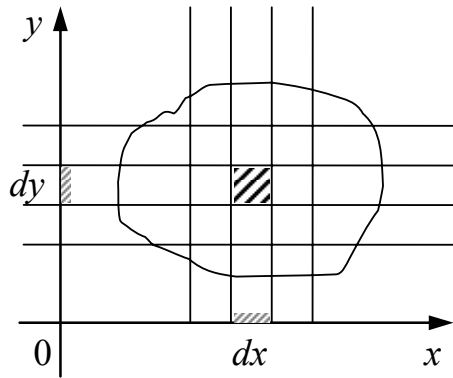


Рис. 1.5

С учетом (1.17) равенство (1.16) переписется в виде:

$$\iint_D f(P)dS = \iint_D f(x, y)dS = \iint_D f(x, y)dxdy. \quad (1.18)$$

Для дальнейшего предположим, что область D имеет следующее специальное устройство (Стандартная ситуация 1.1): снизу она ограничена графиком непрерывной функции $y = y_1(x)$, сверху – графиком непрерывной функции $y = y_2(x)$, а с боков – прямыми $x = a$, $x = b$, параллельными оси Oy (рис. 1.6, область $ABCD$).

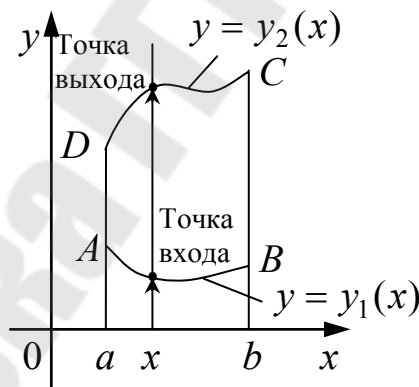


Рис. 1.6

Аналитически такую фигуру можно задать так:

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}. \quad (1.19)$$

Область такого типа будем называть y -трапецевидной (ее можно рассматривать как разность двух обычных криволинейных трапеций). Каждая y -трапецевидная область обладает следующим отличительным свойством: любая прямая, параллельная оси Oy (кроме, быть может пря-

мых $x = a$, $x = b$) пересекает границу области D в двух точках (рис. 1.6). Нижнюю из этих точек будем называть *точкой входа*, а верхнюю – *точкой выхода*.

Теперь мы уже готовы приступить к вычислению интеграла (1.18). В целях наглядности будем считать, что функция $f(P) = f(x, y)$ непрерывна и неотрицательна на D , а значит, ее можно рассматривать как плотность распределения масс по D .

В этом предположении, вспоминая механический смысл двойного интеграла (раздел 1.2), заключаем, что масса пластинки D равна:

$$M(D) = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (1.20)$$

Подсчитаем теперь $M(D)$ другим способом (рис. 1.7). Рассмотрим узкий вертикальный стержень между вертикальными прямыми, проведенными в точках x и $x + dx$ оси Ox . На высоте y выделим элемент стержня длиной dy . Площадь такого элемента равна $dx dy$, а масса приближенно равна $f(x, y) dx dy$. (Здесь мы как обычно считаем, что плотность внутри элемента практически постоянна). Чтобы найти массу вертикального стержня, надо «просуммировать» массы всех таких элементов dy , т. е. проинтегрировать по y выражение $f(x, y) dx dy$:

$$\int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x, y) dx dy = dx \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (1.21)$$

(При этом интегрировании x и dx постоянны и поэтому dx вынесено за знак интеграла).

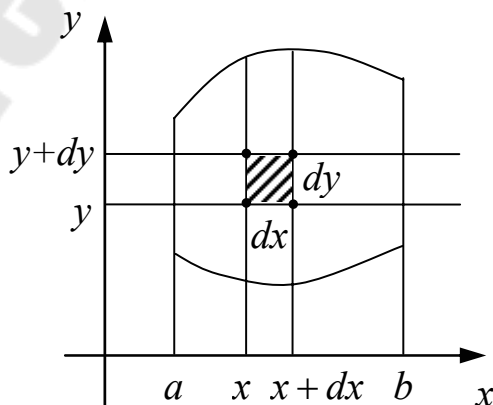


Рис. 1.7

Из (1.19) (рис. 1.6, 1.7) следует, что y изменяется от значения $y_1(x)$ (на нижней кривой) до значения $y_2(x)$ (на верхней кривой).

Чтобы получить теперь массу целой пластинки D надо «просуммировать» массы всех бесконечно узких вертикальных стержней, т. е. проинтегрировать выражение (1.21) по x в пределах его изменения (т. е. от a до b).

В итоге получаем:

$$M(D) = \int_a^b dx \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (1.22)$$

Сравнивая равенства (1.20) и (1.22), окончательно получаем:

$$\iint_D f(x, y) ds = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (1.23)$$

Сформулируем эту формулу в виде правила.

Чтобы вычислить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$, надо проинтегрировать $f(x, y)$ по y при произвольном, но фиксированном x , в пределах от точки входа до точки выхода, а затем полученный результат проинтегрировать по x в пределах наибольшего изменения. (Такая процедура называется повторным интегрированием.)

Таким образом, для вычисления двойного интеграла надо произвести последовательное вычисление двух (одномерных) определенных интегралов. Интеграл

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy, \quad (1.24)$$

вычисляемый первым, называется *внутренним*, а интеграл,

$$\int_a^b \left\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right\} dx = \int_a^b dx \left\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right\}, \quad (1.25)$$

называется *внешним*.

Примечание 1.4. В интеграле (1.24) интегрирование осуществляется по переменной y (и, значит, она является «связанной»), а на переменную x эта операция не распространяется (ее можно считать «свободной»). Такие интегралы в математическом анализе принято называть *интегралами, зависящими от параметра* и в учебниках, содержащих глубокое изложение анализа, им посвящены отдельные

главы (Хинчин, А. Я. Краткий курс математического анализа / А. Я. Хинчин. – Москва : Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1953. – 624 с.).

Сформулируем еще раз полученный результат в виде теоремы существования:

Теорема 1.3. Пусть D – y -трапециевидная область, т. е. $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$ и пусть:

1°. существует двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$.

2°. $\forall x \in [a; b]$ существует определенный интеграл

$$I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (1.26)$$

Тогда существует и определенный интеграл

$$\int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \quad (1.27)$$

(он называется повторным) и справедливо равенство

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy, \quad (1.28)$$

т. е. двойной интеграл равен повторному.

В дальнейшем нам потребуется

Стандартная ситуация 1.2: область D является x -трапециевидной (рис. 1.8). Разумеется, в этом случае внутреннее интегрирование следует вести по переменной x :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (1.29)$$

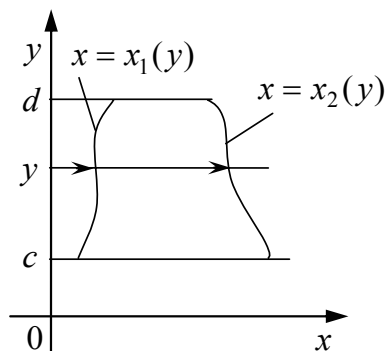


Рис. 1.8

Замечание 1.6

Область более сложного вида надо попытаться разбить на трапециевидные части, к которым применимы формулы (1.23), (1.29), а затем воспользоваться аддитивностью двойного интеграла (РЗ).

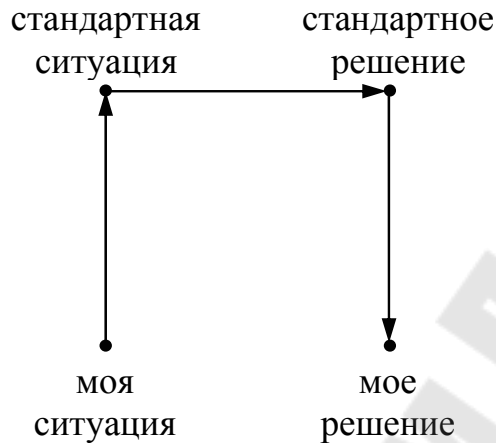


Рис. 1.9

Замечание 1.7 (методологического характера)

Если проанализировать подход, использованный нами при решении задачи сведения двойного интеграла к повторному (равенства (1.23), (1.28)), то нетрудно подметить, что мы, фактически, действовали по схеме, изображенной на рис. 1.9, которая является универсальной схемой решения любых задач (ее автор – Езерский Г. А., Дейтройт, США, 1994).

1.6. Примеры вычисления двойных интегралов (в декартовых координатах)

Пример 1.1. Вычислить двойной интеграл $I_1 = \iint_D e^{x+y} dx dy$, где

D – прямоугольник, заданный неравенствами: $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1$.

Решение

Начнем с уточнения: область D – единичный квадрат, изображенный на рис. 1.10. Теперь сведение двойного интеграла к повторному не вызывает никаких затруднений:

$$I_1 = \iint_D e^{x+y} dx dy = \iint_D e^x \cdot e^y dx dy = \int_0^1 e^x dx \int_0^1 e^y dy = e^x \Big|_0^1 \cdot e^y \Big|_0^1 = (e-1)^2.$$

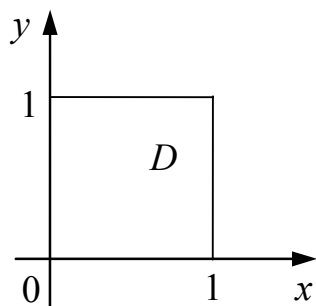


Рис. 1.10

Комментарий

1. В процессе решения мы опирались на основное свойство степени:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \text{ где } a > 0, a \neq 1.$$

2. Прямоугольник, очевидно, является самой простой областью для двойного интегрирования, ибо при интегрировании по нему все пределы интегрирования постоянны, и, следовательно, порядок интегрирования значения не имеет.

Пример 1.2. Изменить порядок интегрирования в интеграле:

$$I_2 = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx. \quad (1.30)$$

Решение

Шаг 1. Установим структуру области интегрирования D . Для этого выпишем границы изменения переменных:

$$\begin{cases} y \leq x \leq \sqrt{y}, \\ 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Шаг 2. Отсюда легко находим уравнения границ

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = x \\ \sqrt{y} = x \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = x^2 \end{array} \right. \quad (x \geq 0). \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1 \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1 \end{array} \right. \end{cases}$$

Ответим на вопрос: «Кто есть кто?»:

$y = x$ – это прямая, проходящая через точку $O(0,0)$ и являющаяся биссектрисой первого и третьего координатных углов;

$y = x^2$ – это парабола, проходящая через точку $O(0,0)$, но поскольку $x \geq 0$, то следует учитывать только ее правую ветвь;

$y = 0$ – это ось Ox ;

$y = 1$ – это прямая, параллельная оси Ox .

Шаг 3. Теперь уже представить область не составит труда (рис. 1.11).

Шаг 4. В формуле (1.30) внутреннее интегрирование велось по x , внешнее – по y . Изменяя порядок интегрирования, получаем:

$$I_2 = \int_0^1 dx \int_{y=x^2}^{y=x} f(x, y) dy.$$

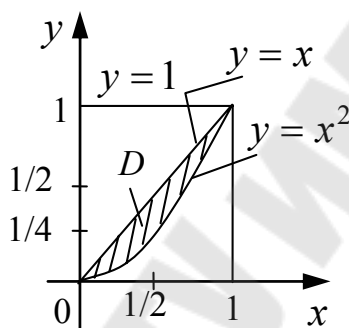


Рис. 1.11

Пример 1.3. Изменить порядок интегрирования в интеграле:

$$I_3 = \int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy. \quad (1.31)$$

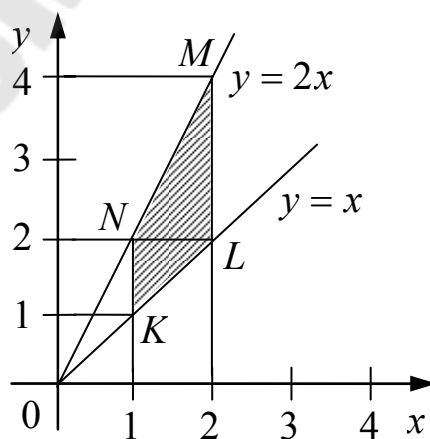


Рис. 1.12

Решение

Шаг 1. Область D .

$$D: \begin{cases} 1 \leq x \leq 2, \\ x \leq y \leq 2x. \end{cases} \quad (1.32)$$

Шаг 2. Уравнения границ:

$$\begin{cases} x = 1, \\ x = 2, \\ y = x, \\ y = 2x. \end{cases}$$

Шаг 3. Строим область D ; координаты вершин полученного четырехугольника $K(1;1)$, $L(2;2)$, $M(2;4)$, $N(1;2)$.

Шаг 4. Область D является y -трапециевидной, но не является x -трапециевидной. Для изменения порядка интегрирования разобьем D отрезком NL на две x -трапеции (уравнение прямой, содержащей отрезок NL , есть $y = 2$).

Шаг 5. Меняем порядок интегрирования:

$$I_3 = \int_1^2 dy \int_{x=1}^{x=y} f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{x=\frac{y}{2}}^{x=2} f(x, y) dx.$$

Примечание 1.5. Конечно, если бы нам требовалось вычислить $\iint_D f(x, y) dx dy$, где D область, заданная соотношениями (1.32), а $f(x, y)$ – некоторая известная функция, то мы бы предпочли формулу (1.31), ибо она значительно проще для вычислений.

Пример 1.4. Вычислить интеграл $I_4 = \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$, где D – область, ограниченная прямыми $x = 2$, $y = x$ и гиперболой $xy = 1$.

Решение

Шаг 1. Находим точки пересечения данных прямых с гиперболой

$$\begin{cases} x = 2, \\ xy = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x, \\ xy = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x, \\ x^2 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x, \\ x = \pm 1. \end{cases}$$

Шаг 2. Делаем чертеж (рис. 1.13).

Теперь уже понятно, что область D находится в первой четверти и представляет собой криволинейный треугольник KLM , который можно считать y -трапецией.

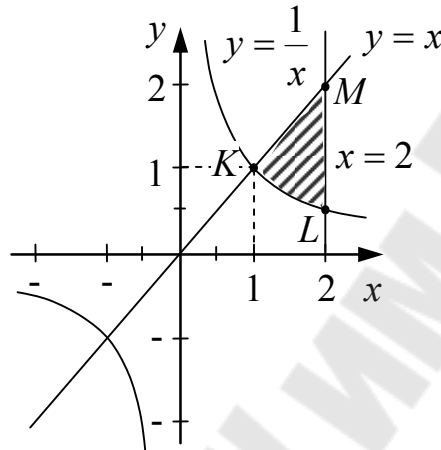


Рис. 1.13

Шаг 3. Заменяем двойной интеграл повторным:

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_1^2 dx \int_{y=\frac{1}{x}}^{y=x} \frac{x^2}{y^2} dy = \int_1^2 x^2 dx \int_{y=\frac{1}{x}}^{y=x} \frac{dy}{y^2} = \\ &= \int_1^2 x^2 dx \left[-\frac{1}{y} \right]_{y=\frac{1}{x}}^{y=x} = -\int_1^2 x^2 \left(\frac{1}{x} - x \right) dx = -\int_1^2 (x - x^3) dx = -\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_1^2 = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Примечание 1.6 (на которое следует обратить особое внимание). На первых порах при расстановке пределов во внутреннем интеграле студенты забывают, что границами, скажем, y -трапециевидной области являются, вообще говоря,

линии $\begin{cases} y = y_1(x) \\ y = y_2(x) \end{cases}$, а не числа, как это бывает только в случае

прямоугольной области. Возможно, интерпретация на языке маленьких человечков позволит лучше понять о чем идет речь и не делать подобных ошибок.

Итак, пусть по отрезку $[a; b]$ оси Ox бежит человек, стреляющий из светового пистолета, лучи которого идут параллельно оси Oy , причем луч зажигается на нижней линии $y = y_1(x)$ и гаснет на верхней линии $y = y_2(x)$. Тем самым, на плоскости xOy высвечивается область D .

Пример 1.5. Вычислить интеграл $I_5 = \iint_D \cos(x + y) dx dy$, где D – область, ограниченная прямыми $x = 0$, $y = \pi$, $y = x$.

Решение

Шаг 1. Строим область D (рис. 1.14) и выписываем координаты вершин полученного прямоугольного треугольника OKL : $O(0;0)$, $K(\pi; \pi)$, $L(0, \pi)$.

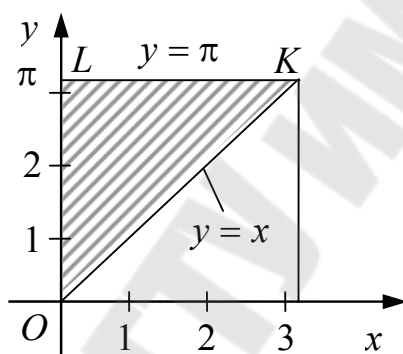


Рис. 1.14

Шаг 2. Для разнообразия будем рассматривать D как x -трапецию (очевидно, она также является и y -трапецией).

Тогда

$$\begin{aligned}
 I_5 &= \int_0^{\pi} dy \int_{x=0}^{x=y} \cos(x + y) dx = \int_0^{\pi} dy [\sin(x + y)]_{x=0}^{x=y} = \\
 &= \int_0^{\pi} (\sin 2y - \sin y) dy = \left[-\frac{1}{2} \cos 2y + \cos y \right]_0^{\pi} = -\frac{1}{2} \cos 2\pi + \cos \pi + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \cos 0 - \cos 0 = -\frac{1}{2} \cdot 1 - 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 - 1 = -2.
 \end{aligned}$$

Пример 1.6. Вычислить интеграл $I_6 = \iint_D (x + 2y) dx dy$, где D –

область, ограниченная параболой $y^2 = 4 + x$ и прямой $x = 5$.

Решение

Шаг 1. Строим область D . Для прямой $x = 5$ все понятно: она параллельна оси Oy и расположена правее нее на расстоянии пяти единиц. Для параболы $y^2 = 4 + x$ проведем небольшое исследование.

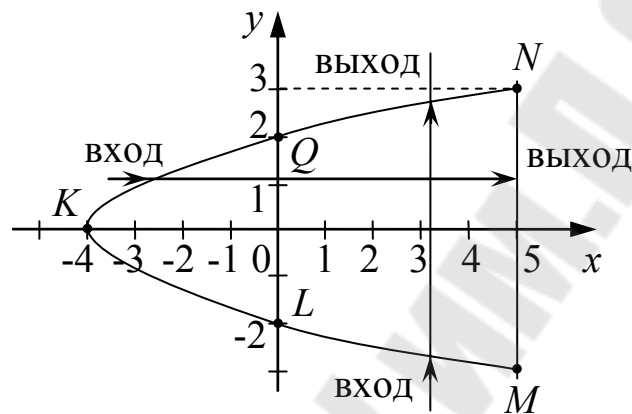


Рис. 1.15

Во-первых, из $y^2 \geq 0 \Rightarrow 4 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$ и, следовательно, левее прямой $x = -4$ точек параболы нет. Очевидно, ее вершина расположена в точке $(-4; 0)$.

Во-вторых, поскольку в данное уравнение переменная y входит в четной степени, то график уравнения будет симметричен относительно оси Ox .

Остается найти точки пересечения параболы с осью Oy (обозначим их через L и Q), а также точки ее пересечения с прямой $x = 5$ (обозначим их через M и N). Имеем:

$$x = 0 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2. \text{ Значит, } L(0; -2), Q(0; 2).$$

$$x = 5 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3. \text{ Значит, } M(5; -3), N(5; 3).$$

Шаг 2 (первый способ). Будем рассматривать область D как x -трапециевидную. Тогда, согласно равенству (1.29), получаем:

$$\begin{aligned}
I_6 &= \int_{-3}^3 dy \int_{x=y^2-4}^{x=5} (x+2y) dx = \int_{-3}^3 dy \left[\frac{x^2}{2} + 2xy \right]_{x=y^2-4}^{x=5} = \\
&= \int_{-3}^3 dy \left[\frac{25}{2} + 10y - \frac{(y^2-4)^2}{2} - 2y(y^2-4) \right] = \int_{-3}^3 \left(\frac{25}{2} + 10y - \frac{y^4-8y^2}{2} - \right. \\
&\quad \left. - 8 - 2y^3 + 8y \right) dy = \int_{-3}^3 \left(\frac{9}{2} + 18y + 4y^2 - 2y^3 - \frac{y^4}{2} \right) dy = \\
&= \left[\frac{9}{2}y + 9y^2 + \frac{4}{3}y^3 - \frac{y^4}{2} - \frac{y^5}{10} \right]_{-3}^3 = 9 \cdot 3 + 0 + \frac{8}{3} \cdot 3^3 - 0 - \frac{2 \cdot 3^5}{10} = \frac{252}{5} = 50 \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

Замечание 1.8

На заключительной (вычислительной) стадии мы использовали следующее утверждение:

Лемма (о приращении функции на симметричном отрезке)

Если функция $f(x)$

- 1) нечетная, то ее приращение на отрезке $[-a; a]$ равно $2f(a)$, т. е. удвоенному приращению на половине промежутка;
- 2) четная, то ее приращение на отрезке $[-a; a]$ равно нулю.

Доказательство

1) $f(x)$ – нечетная функция, т. е. $f(-x) = -f(x)$.

Тогда $f(x)|_{-a}^a = f(a) - f(-a) = f(a) + f(a) = 2f(a)$;

2) $f(x)$ – четная функция, т. е. $f(-x) = f(x)$.

Тогда $f(x)|_{-a}^a = f(a) - f(-a) = f(a) - f(a) = 0$.

Шаг 3 (второй способ). Поскольку в решении достаточно вычислений, то неплохо бы их проверить, решив задачу другим способом. Будем рассматривать область D как y -трапециевидную. Тогда

$$I_6 = \int_{-4}^5 dx \int_{y=-\sqrt{x+4}}^{y=\sqrt{x+4}} (x+2y) dy = \int_{-4}^5 dx [xy + y^2]_{y=-\sqrt{x+4}}^{y=\sqrt{x+4}} =$$

$$= 2 \int_{-4}^5 x \sqrt{x+4} dx = \left. \begin{array}{l} \sqrt{x+4} = t \\ x+4 = t^2 \\ x = t^2 - 4 \\ dx = 2tdt \\ x = -4; t = 0 \\ x = 5; t = 3 \end{array} \right| = 4 \int_0^3 (t^2 - 4)t^2 dt = 4 \int_0^3 (t^4 - 4t^2) dt =$$

$$= 4 \left[\frac{t^5}{5} - \frac{4t^3}{3} \right]_0^3 = 4 \left(\frac{243}{5} - \frac{4 \cdot 3^3}{3} \right) = 4 \cdot \frac{243 - 180}{5} = 4 \cdot \frac{63}{5} = \frac{252}{5} = 50,4.$$

Пример 1.7. Вычислить интеграл

$$I_7 = \iint_D x^2 y^2 \sqrt{1-x^3-y^3} dx dy,$$

где D – область, ограниченная линией

$$x^3 + y^3 = 1 \tag{1.33}$$

и осями координат.

Решение

Чтобы построить область D , нам необходимо представить как выглядит кривая третьего порядка $x^3 + y^3 = 1$ хотя бы в той ее части, которая «взаимодействует» с осями координат. Прежде всего бросается в глаза симметрия данного уравнения относительно переменных: если в этом уравнении поменять местами x и y , то оно переходит в себя, не изменяется. Значит, наша кривая симметрична относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, т. е. прямой $y = x$.

Далее подмечаем, что данное уравнение, к счастью, разрешимо относительно любой переменной, и, значит, от неявного задания мы можем перейти к явному:

$$y = \sqrt[3]{1-x^3}. \tag{1.34}$$

На область определения здесь, естественно, ограничений нет (ведь корень кубический!).

Четностью (нечетностью) функция тоже, очевидно, не обладает. Поэтому займемся ее производной, чтобы найти интервалы монотонности и точки экстремума. Имеем:

$$y' = \left(\sqrt[3]{1-x^3} \right)' = \left((1-x^3)^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{1}{3} (1-x^3)^{-\frac{2}{3}} (-3x^2) = -\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}.$$

Отсюда можно сделать два заключения:

- 1) $y' < 0$ для всех $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$;
- 2) $y'(1) = -\infty$.

Учитывая непрерывность функции (1.34), можно утверждать, что она монотонно убывает $\forall x \in \mathbf{R}$, а в точке $(1; 0)$ имеет вертикальную касательную (впрочем, для вычисления I_7 последний факт нам не пригодится).

Точку пересечения графика функции с осью Ox мы, между делом, уже нашли: $L(1; 0)$.

Учитывая симметрию графика относительно прямой $y = x$ легко делаем вывод, что точка $K(0; 1)$ является точкой пересечения графика нашей функции с осью Oy (впрочем, в этом легко убедиться и непосредственно: $x = 0 \Rightarrow y = \sqrt[3]{1-0^3} = 1$).

Поскольку функция (1.34) ведет себя монотонно на всей числовой прямой, то каждое свое значение она принимает только один раз. Поэтому у ее графика нет других точек пересечения с осями координат, кроме найденных. Значит, область D расположена в первой четверти и, в принципе, нам уже ничто не мешает приступить к вычислению I_7 .

Только из добросовестности, связанной, отчасти, с любопытством, уточним направление выпуклости кривой (1.34) в первой четверти. Разумеется, вторая производная сразу бы дала ответ на этот вопрос. Но мы «выкрутимся» проще. Нетрудно сообразить, что точка

$N\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ лежит на графике нашей кривой, ибо (равенство (1.33))
 $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 = 1$. Но поскольку, $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0,79363 \approx 0,8$, то точка N ле-

жит над прямой LK , а, значит, с учетом непрерывности функции (1.34), можно утверждать, что на отрезке $[0;1]$ кривая направлена выпуклостью вверх (рис. 1.16). Кстати, это согласуется с тем фактом, что в точке $(1;0)$ имеется вертикальная касательная.

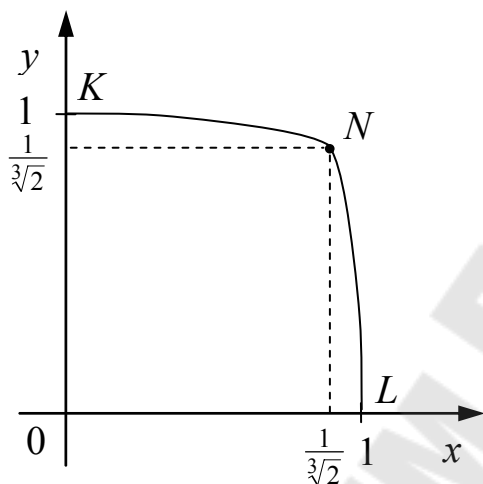


Рис. 1.16

Теперь, со спокойной совестью, можно приступить к вычислениям.

$$\begin{aligned}
 I_7 &= \int_0^1 x^2 dx \int_{y=0}^{y=\sqrt[3]{1-x^3}} y^2 \sqrt{1-x^3-y^3} dy = -\frac{1}{3} \int_0^1 x^2 dx \times \\
 &\times \int_{y=0}^{y=\sqrt[3]{1-x^3}} \sqrt{1-x^3-y^3} d(1-x^3-y^3) = -\frac{1}{3} \int_0^1 x^2 dx \cdot \frac{2}{3} \left[(1-x^3-y^3)^{\frac{3}{2}} \right]_{y=0}^{y=\sqrt[3]{1-x^3}} = \\
 &= -\frac{2}{9} \int_0^1 x^2 dx \left[(1-x^3-1+x^3)^{\frac{3}{2}} - (1-x^3)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{2}{9} \int_0^1 (1-x^3)^{\frac{3}{2}} x^2 dx = \\
 &= -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3} \int_0^1 (1-x^3)^{\frac{3}{2}} d(1-x^3) = -\frac{2}{27} \cdot \frac{2}{5} (1-x^3)^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 = -\frac{4}{135} \left[(1-1)^{\frac{5}{2}} - 1^{\frac{5}{2}} \right] = \frac{4}{135}.
 \end{aligned}$$

Пример 1.8. Вычислить интеграл $I_8 = \iint_D x dx dy$, где область интегрирования D ограничена прямой, проходящей через точки $A(2;0)$, $B(0;2)$ и дугой окружности с центром в точке $C(0;1)$ радиуса 1.

Решение

Прежде всего запишем уравнения линий, ограничивающих нашу область. Поскольку прямая, данная в условии, проходит через точки $A(2;0)$ и $B(0;2)$, то на осях координат она отсекает равные отрезки, длины 1. Воспользовавшись уравнением прямой в отрезках по осям: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, в нашем случае получаем:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow x + y = 2. \quad (1.35)$$

Так как уравнение окружности с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ и радиуса R имеет вид: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, то уравнение окружности из условия задачи запишется так:

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1. \quad (1.36)$$

Остается изобразить область D (рис. 1.17), где $M(1,1)$ – точка пересечения прямой (1.35) с окружностью (1.36). Очевидно, D – сегмент окружности (1.36), отсеченный от нее хордой BM .

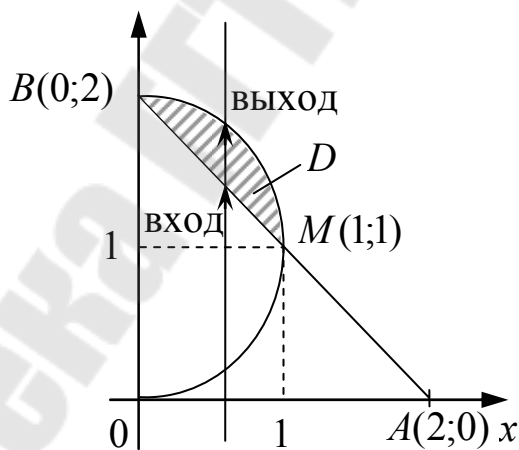


Рис. 1.17

Первый способ. Будем рассматривать область D как y -трапециевидную. Тогда

$$\begin{aligned}
I_8 &= \int_0^1 x dx \int_{y=2-x}^{y=1+\sqrt{1-x^2}} dy = \int_0^1 x dx [y]_{y=2-x}^{y=1+\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 x dx (1 + \sqrt{1-x^2} - 2 + x) = \\
&= \int_0^1 (x - 1 + \sqrt{1-x^2}) x dx = \int_0^1 (x^2 - x + x\sqrt{1-x^2}) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \\
&+ \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} d(1-x^2) = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \\
&= -\frac{1}{6} - \frac{1}{3} (0-1) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Комментарий. Границы области D по оси Ox очевидны: $0 \leq x \leq 1$. По оси Oy соответствующие границы тоже находятся без проблем:

из (1.35) $\Rightarrow y = 2 - x$ (на этой прямой «вход»);

из (1.36) $\Rightarrow (y-1)^2 = 1-x^2 \Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{1-x^2}$.

Но по условию нас интересует дуга окружности, лежащая над хордой BM (тем более и над прямой $y=1$). Поэтому уравнение линии, на которой находится «выход», есть $y = 1 + \sqrt{1-x^2}$.

Второй способ. Будем рассматривать D как x -трапецию. Тогда

$$\begin{aligned}
I_8 &= \int_1^2 dy \int_{x=2-y}^{x=\sqrt{2y-y^2}} x dx = \frac{1}{2} \int_1^2 dy [x^2]_{x=2-y}^{x=\sqrt{2y-y^2}} = \frac{1}{2} \int_1^2 dy (2y - y^2 - (2-y)^2) = \\
&= \frac{1}{2} \int_1^2 (2y - y^2 - 4 + 4y - y^2) dy = \int_1^2 (3y - y^2 - 2) dy = \left[\frac{3}{2} y^2 - \frac{y^3}{3} - 2y \right]_1^2 = \\
&= \frac{3}{2} \cdot 4 - \frac{8}{3} - 4 - \frac{3}{2} + \frac{1}{3} + 2 = 4 - \frac{7}{3} - \frac{3}{2} = \frac{24 - 14 - 9}{6} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Пример 1.9. Найти среднее значение функции $z = f(x, y) = 2x + y$ в треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $x + y = 3$.

Решение

Напомним формулу, по которой вычисляется среднее значение функции (см. равенство (1.15)): $\bar{f} = \frac{1}{S(D)} \iint_D f(P) dS$.

Площадь прямоугольного ΔKLO (рис. 1.18) равна $\frac{1}{2} OK \cdot OL = \frac{9}{2}$.

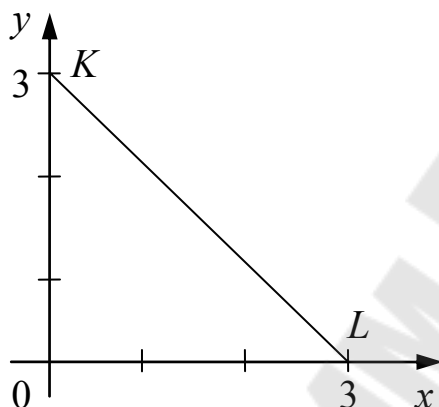


Рис. 1.18

Займемся вычислением интеграла от заданной функции

$$\begin{aligned} I_0 &= \iint_D (2x + y) dx dy = \int_0^3 dx \int_{y=0}^{y=3-x} (2x + y) dy = \\ &= \int_0^3 dx \left[2xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=3-x} = \int_0^3 dx \left(6x - 2x^2 + \frac{9 - 6x + x^2}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^3 (12x - 4x^2 + 9 - 6x + x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^3 (6x - 3x^2 + 9) dx = \\ &= \frac{1}{2} [3x^2 - x^3 + 9x]_0^3 = \frac{1}{2} (27 - 27 + 27) = \frac{27}{2}. \end{aligned}$$

Остается выполнить последнюю операцию:

$$\bar{f} = \frac{27}{2} : \frac{9}{2} = 3.$$

Пример 1.10. Найти среднее значение функции $z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ в круге $x^2 + y^2 \leq R^2$.

Решение

Площадь круга радиуса R найти несложно: $S(D) = \pi R^2$. Остается вычислить интеграл $I_{10} = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy$.

Изобразить область D также несложно: это круг с центром в начале координат, радиус которого R (рис. 1.19). Теперь имеем:

$$I_{10} = \int_{-R}^R dx \int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{y=\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dy.$$

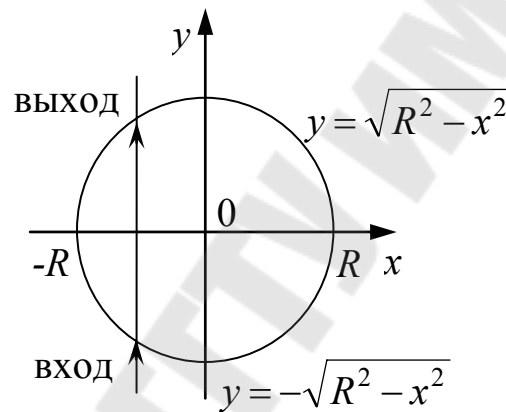


Рис. 1.19

Очевидно, у нас возникла проблема, связанная с вычислением внутреннего интеграла

$$\int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{y=\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dy.$$

В интегральном исчислении аналогичный персонаж (точнее, соответствующая стандартная ситуация) имеется:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Но мы пойдем другим путем: отложим вычисление нашего интеграла до тех пор, пока мы не научимся вычислять двойные интегралы в полярных координатах.

1.7. Двойной интеграл в полярных координатах

Как известно, метод замены переменных является одним из самых востребованных при вычислении одномерных интегралов. Он базируется на следующем утверждении:

Теорема 1.4. Пусть:

- 1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$;
- 2) функция $x = g(t)$ определена и непрерывна вместе со своей производной на отрезке $[\alpha; \beta]$, где $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$;
- 3) $g'(t)$ не меняет знак на интервале (a, b) .

Тогда имеет место равенство:

$$\int_b^a f(x) dx = \int_\beta^\alpha f(g(t))g'(t) dt. \quad (1.37)$$

Не меньшее значение этот метод имеет и при вычислении кратных интегралов. Мы начнем с наиболее распространенного варианта замены переменных, а именно: с перехода от декартовых координат к полярным.

Напомним, что полярная система координат состоит из точки O , называемой полюсом, и луча, исходящего из этой точки, имеющего определенное направление и линейную единицу. Этот луч называется *полярной осью*.

Полярными координатами точки M в рассматриваемой системе координат называются *полярный радиус* ρ , т. е. расстояние между точками O и M , и *полярный угол* φ , т. е. угол, на который надо повернуть полярную ось против часовой стрелки до совпадения с лучом OM (рис. 1.20). Каждая точка плоскости, за исключением полюса, имеет определенный положительный полярный радиус r и определенный полярный угол φ из промежутка $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Примечание 1.7

1. Иногда полярный угол рассматривают в пределах $0 \leq \varphi < 2\pi$.
2. Если точка совпадает с полюсом, то ее полярный радиус равен нулю, а полярный угол не имеет определенного значения.

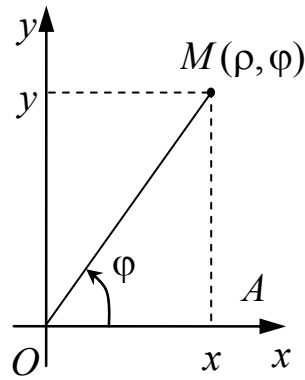


Рис. 1.20

Связь между декартовыми и полярными координатами точки M легко установить при условии, что полюс полярной системы совпадает с началом координат декартовой системы координат, а полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс. Из прямоугольного треугольника OAM находим:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \quad (1.38)$$

Для дальнейшего предположим, что область D , по которой мы будем интегрировать, имеет следующее специальное устройство (Стандартная ситуация 1.3): она ограничена двумя кривыми, полярные уравнения которых $\rho = \rho_1(\varphi)$ и $\rho = \rho_2(\varphi)$, и лучами $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$, идущими из полюса O (рис. 1.21).

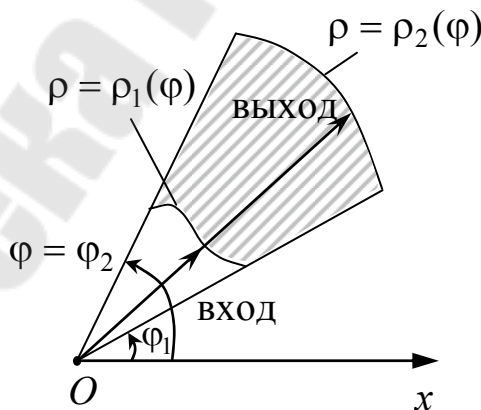


Рис. 1.21

Всякий луч $\varphi = \varphi$ с началом в точке O , заключенный между лучами, ограничивающими область D , пересекает каждую из линий $\rho = \rho_1(\varphi)$ и $\rho = \rho_2(\varphi)$ в единственной точке: точке «входа» (на $\rho_1(\varphi)$) и точке «выхода» (на $\rho_2(\varphi)$).

Итак, пусть требуется вычислить $\iint_D f(x, y) dS$, где D – область указанного типа в декартовой системе координат xOy . Используя связь между декартовыми и полярными координатами (1.38), преобразуем подынтегральную функцию к виду:

$$f(x, y) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = F(\rho, \varphi).$$

Теперь необходимо найти выражение для элемента площади в полярных координатах. В случае декартовых координат мы разбивали область интегрирования на части прямыми $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, причем $dS = dx dy$. А сейчас разобьем область D на элементарные части с помощью окружностей $\rho = \text{const}$ и лучей $\varphi = \text{const}$ (они являются *координатными линиями* полярной системы координат). Выделим один из получившихся элементов, ограниченный бесконечно близкими лучами, проходящими под углом φ и $\varphi + d\varphi$ к полярной оси и бесконечно близкими окружностями радиусов ρ и $\rho + d\rho$ (на рис. 1.22 это криволинейный четырехугольник $KLMN$, причем $OK = \rho$, а $\angle NOK = d\varphi$). По формуле длины дуги окружности (в радианах) имеем $NK = \rho d\varphi$. Но второе измерение четырехугольника уже известно: $KL = d\rho$. Если принять четырехугольник $KLMN$ за прямоугольник (это *основное допущение*), то его площадь dS находим без труда:

$$dS = NK \cdot KL = \rho d\varphi d\rho = \rho d\rho d\varphi. \quad (1.39)$$

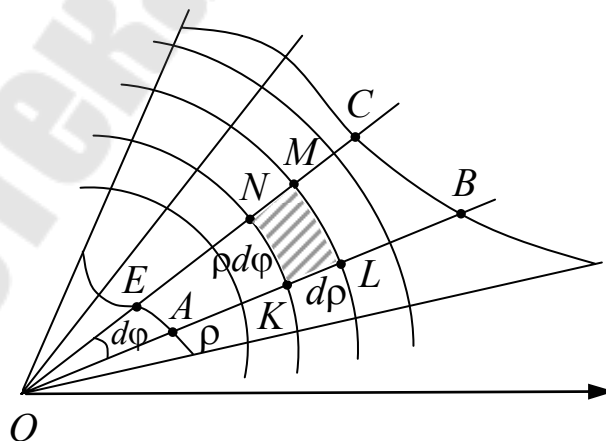


Рис. 1.22

С учетом сказанного, в полярных координатах двойной интеграл выглядит так:

$$\iint_D f(x, y) dS = \iint_{D'} F(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi, \quad (1.40)$$

где D' – область D в полярной системе координат.

Для его вычисления, как и раньше (раздел 1.5), будем трактовать интеграл из правой части равенства (1.40) как массу пластинки D' с плотностью $F(\rho, \varphi)$. Подсчитаем сейчас $M(D)$ по-другому. Рассмотрим представленное выше разбиение области D на элементарные части (рис. 1.22) и, в первую очередь, вычислим массу элементарной ячейки $KLMN$ в предположении, что внутри нее плотность постоянна и равна $F(\rho, \varphi)$. Тогда

$$dm \approx F(\rho, \varphi) dS = F(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi. \quad (1.41)$$

Теперь мы в состоянии вычислить массу всего бесконечно узкого стержня $ABCE$, содержащего ячейку $KLMN$, «суммированием» масс всех таких ячеек, т. е. интегрированием по ρ соответствующего выражения:

$$\int_{\rho=\rho_1(\varphi)}^{\rho=\rho_2(\varphi)} F(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi = d\varphi \int_{\rho=\rho_1(\varphi)}^{\rho=\rho_2(\varphi)} F(\rho, \varphi) \rho d\rho. \quad (1.42)$$

(При этом интегрировании φ и $d\varphi$ – постоянны). Осталась самая малость: найти массу пластинки D «суммированием» масс всех стержней, т. е. интегрированием выражения (1.42) по φ :

$$M(D) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho=\rho_1(\varphi)}^{\rho=\rho_2(\varphi)} F(\rho, \varphi) \rho d\rho. \quad (1.43)$$

Окончательно получаем «рабочую» формулу, сводящую двойной интеграл к повторному:

$$\iint_{D'} F(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho=\rho_1(\varphi)}^{\rho=\rho_2(\varphi)} F(\rho, \varphi) \rho d\rho. \quad (1.44)$$

В правой части равенства (1.44) вначале интегрируем по ρ (при произвольном, но фиксированном φ) в пределах от «точки входа» ($\rho = \rho_1(\varphi)$) до «точки выхода» ($\rho = \rho_2(\varphi)$), а затем по φ в пределах его наибольшего изменения.

В рассмотренной нами стандартной ситуации 3 полюс находится вне области интегрирования. Остается рассмотреть еще два случая.

Стандартная ситуация 1.4, когда полюс находится внутри области D . Предположим, что D ограничена замкнутой кривой $\rho = \rho(\varphi)$. Тогда пределы расставляются следующим образом:

$$\iint_{D'} F(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\rho=0}^{\rho=\rho(\varphi)} F(\rho, \varphi) \rho d\rho. \quad (1.45)$$

Стандартная ситуация 1.5, когда полюс находится на границе области D . Как правило, в таких случаях расстановка пределов интегрирования не вызывает затруднений. Рассмотрим иллюстрирующий

Пример 1.11. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint_{D'} F(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi$, где D – область, ограниченная окружностью с центром в точке $(0, b)$ и радиуса b (рис. 1.23).

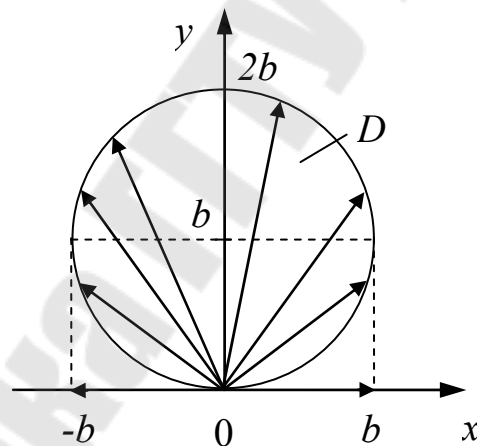


Рис. 1.23

Решение

Прежде всего запишем уравнение окружности, о которой идет речь в условии примера: $x^2 + (y - b)^2 = b^2$. Откуда

$$x^2 + y^2 = 2by. \quad (1.46)$$

Переходя в равенстве (1.46) к полярным координатам по формулам (1.38), получаем $\rho^2 = 2b\rho \sin \varphi \Rightarrow \rho = 2b \sin \varphi$. Это уравнение контура области D' в полярных координатах. Из рис. 1.23 понятно, что ес-

ли φ будет изменяться от нуля до π , а ρ – от нуля до контура, то соответствующий радиус-вектор «заметет» всю область D . Поэтому

$$I_{11} = \iint_{D'} F(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi = \int_0^\pi d\varphi \int_{\rho=0}^{\rho=2b \sin \varphi} F(\rho, \varphi) \rho d\rho. \quad (1.47)$$

Замечание 1.9

Подчеркнем, что при использовании полярных координат порядок интегрирования фиксированный: внутренний интеграл берется по ρ .

В заключение данного пункта рассмотрим примеры вычисления двойных интегралов в полярных координатах. И прежде всего вернемся, как и обещали, к примеру 1.10 из раздела 1.6.

Пример 1.12. Вычислить интеграл

$$I_{12} = I_{10} = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy,$$

где $D: x^2 + y^2 \leq R^2$.

Решение

Перейдем в I_{10} к полярным координатам: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $x^2 + y^2 = \rho^2$, $ds = \rho d\rho d\varphi$. Имеем:

$$\begin{aligned} I_{10} &= \iint_{D'} \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\rho=0}^{\rho=R} \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho = \\ &= \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \int_{\rho=0}^{\rho=R} (R^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} d(R^2 - \rho^2) = 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} (R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^R = \\ &= -\frac{2\pi}{3} \left(0 - (R^2)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2\pi R^3}{3}. \end{aligned}$$

Теперь среднее значение функции $\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ найти легко:

$$\bar{f} = \frac{2\pi R^3}{3} : \pi R^2 = \frac{2R}{3}.$$

Комментарий

1. Прежде всего похвалим полярные координаты: они, как видно из рассмотренного примера, здорово облегчают вычисление некоторых двойных интегралов.

2. Полярные координаты удобно применять, если

- областью интегрирования служит круг, или его часть;
- подынтегральная функция содержит сумму квадратов переменных: $x^2 + y^2$.

3. Уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$ в полярных координатах выглядит так: $\rho = R$. Действительно,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = R^2 \Rightarrow \rho^2 = R^2 \Rightarrow \rho = R.$$

4. Это пример на стандартную ситуацию 1.4. Пример 1.11 иллюстрирует стандартную ситуацию 1.5. Остается (для выполнения программы-минимум) рассмотреть пример на стандартную ситуацию 1.3.

Пример 1.13. Вычислить интеграл $I_{13} = \iint_D \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx dy$, где D – часть кольца: $x^2 + y^2 \geq 1$; $x^2 + y^2 \leq 9$; $y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}$; $y \leq x\sqrt{3}$.

Решение

Шаг 1. Прежде всего разберемся с областью интегрирования, а именно: определим ее границы. Имеем: $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 9$ есть концентрические окружности с центром в начале координат радиусов 1 и 3 соответственно; далее, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ и $y = x\sqrt{3}$ – прямые, проходящие через начало координат, с угловыми координатами $\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$ и $\sqrt{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$ соответственно. Остается все нарисовать (рис. 1.24).

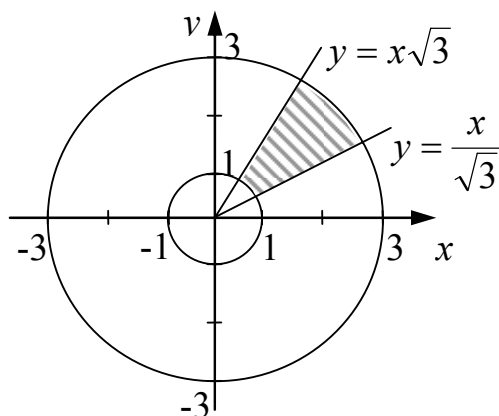


Рис. 1.24

Шаг 2. Перейдем в заданном интеграле I_{13} к полярным координатам. Предварительно подсчитаем $\arctg \frac{y}{x} = \arctg \frac{\rho \sin \varphi}{\rho \cos \varphi} = \arctg(\operatorname{tg} \varphi) = \varphi$. Поэтому I_{13} преобразуется так:

$$\begin{aligned}
 I_{13} &= \iint_D \arctg \frac{y}{x} dx dy = \iint_{D'} \varphi \rho d\rho d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \varphi d\varphi \int_1^3 \rho d\rho = \frac{\varphi^2}{2} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \cdot \frac{\rho^2}{2} \Big|_1^3 = \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{36} \right) (9 - 1) = 2\pi^2 \cdot \frac{4 - 1}{36} = \frac{\pi^2}{6}.
 \end{aligned}$$

1.8. Двойной интеграл в криволинейных координатах: общий случай замены переменных

Перед тем как вычислять –
 Надо бы совет держать.
 Это что за координаты
 Нам бы не мешало взять?!

Мы уже видели в разделе 1.7, что переход в двойном интеграле от декартовых координат к полярным в некоторых случаях существенно упрощает вычисления. Увы, полярные координаты выручают далеко не всегда.

Пример 1.14. Найти площадь фигуры, ограниченной парабололами $y = ax^2$, $y = bx^2$ ($0 < a < b$) и гиперболами $xy = p$, $xy = q$ ($0 < p < q$).

Решение

Поскольку линии, данные в условии задачи, изучаются даже в школе (а затем и в аналитической геометрии), то, в принципе, построение самой фигуры больших затруднений вызывать не должно. Прокомментируем только несколько принципиальных моментов.

1. Из $0 < a < b$ следует, что ветви парабол $y = ax^2$, $y = bx^2$ направлены вверх, а значит, они расположены в I и II четвертях.

2. Из $0 < p < q$ следует, что гиперболы $xy = p$, $xy = q$ расположены в I и III четвертях. Поэтому точки пересечения наших кривых находятся в первой четверти.

3. В I четверти функции $y = ax^2$, $y = bx^2$ монотонно возрастают (и имеют единственную общую точку – начало координат), а функции $xy = p$, $xy = q$ монотонно убывают. Значит, любая парабола с любой гиперболой пересекаются в единственной точке и наша фигура – криволинейный четырехугольник (рис. 1.25).

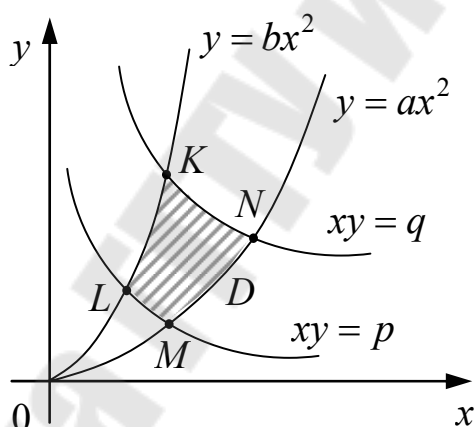


Рис. 1.25

4. Из $0 < a < b$ вытекает, что $ax^2 < bx^2$. Значит, парабола $y = bx^2$ лежит над параболой $y = ax^2$.

5. Из $\left. \begin{array}{l} 0 < p < q \\ x > 0 \end{array} \right\}$ вытекает, что $\frac{p}{x} < \frac{q}{x}$ и, значит, гипербола $y = \frac{q}{x}$

лежит над гиперболой $y = \frac{p}{x}$ (как показано на рис. 1.24).

Как было отмечено в замечании 1.2

$$S(D) = \iint_D 1 \cdot dS = \iint_D dx dy. \quad (1.48)$$

Непосредственное вычисление этого интеграла доставит немало хлопот (не помогут, конечно, и полярные координаты). Поэтому отложим решение задачи до тех пор, пока мы не подготовим необходимый инструментарий, а именно: не научимся делать замену переменных в общем виде.

Итак, рассмотрим двойной интеграл

$$\iint_D f(x, y) dS, \quad (1.49)$$

и пусть даны две функции

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \end{aligned} \right\}, \quad (1.50)$$

определенные в области Δ и непрерывные там вместе со своими частными производными. Допустим, кроме того, что формулы (1.50) устанавливают взаимно однозначное соответствие между областями D и Δ . Это значит, что не только каждой точке $(u, v) \in \Delta$ соответствует, согласно (1.50), единственная точка $(x, y) \in D$, но и, наоборот, для любой точки $(x, y) \in D$ существует единственная точка $(u, v) \in \Delta$, для которой выполняются соотношения (1.50). Из сказанного следует, что для любых заданных x, y таких, что точка (x, y) находится в D система уравнений (1.50) с неизвестными u, v имеет единственное решение (u, v) , лежащее в Δ :

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{\varphi}(x, y) \\ v &= \bar{\psi}(x, y) \end{aligned} \right\}.$$

Итак, мы можем утверждать, что любая точка $P(x, y) \in D$ вполне определяется заданием соответствующей ей точки $Q(u, v) \in \Delta$. Значит, числа (u, v) можно считать новыми координатами точки P . Такие координаты называются *криволинейными*.

Разобьем область Δ на прямоугольные ячейки прямыми

$$u = u_0 = \text{const},$$

$$v = v_0 = \text{const}.$$

Каждая линия $u = u_0$ перейдет согласно формулам (1.50) в линию на плоскости (x, y) с параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(u_0, v), \quad y = \psi(u_0, v), \quad (1.51)$$

где v – параметр.

Аналогично, прямая $v = v_0$ перейдет в линию с параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(u, v_0), \quad y = \psi(u, v_0), \quad (1.52)$$

где u – параметр.

Эти линии называются *координатными линиями* для данной криволинейной системы координат. Линии (1.51) и (1.52) характеризуются тем, что вдоль каждой из них одна из криволинейных координат u или v остается постоянной.

Если теперь координате u придавать различные числовые значения, то в плоскости (x, y) мы получим целое семейство координатных линий. Аналогично, различным фиксированным значениям координаты v будет соответствовать другое семейство координатных линий в плоскости (x, y) .

Ввиду взаимно однозначного соответствия между областями Δ и D различные координатные линии одного и того же семейства не пересекаются между собой и через каждую точку $P(x, y)$ области D пройдет по одной линии из каждого семейства (рис. 1.26).

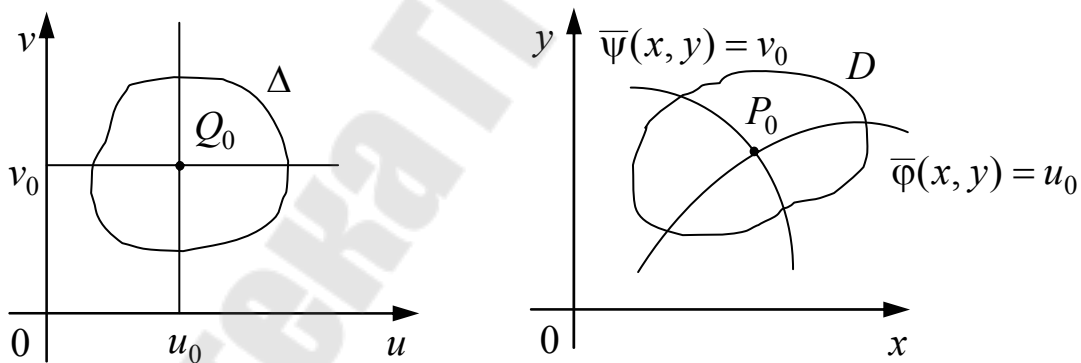


Рис. 1.26

Таким образом, каждой прямоугольной сетке прямых $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ на плоскости (u, v) будет отвечать криволинейная сетка координатных линий на плоскости (x, y) .

Пример 1.15. Как мы уже отмечали, простейшим примером криволинейных координат могут служить полярные координаты:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \quad (1.53)$$

Здесь $u = \rho$, $v = \varphi$. Будем теперь переменные ρ , φ рассматривать не как полярные координаты точки в плоскости (x, y) , а как прямоугольные координаты точки в другой плоскости (ρ, φ) . Тогда формулы (1.53) каждой точке (ρ, φ) из этой плоскости сопоставляют одну определенную точку плоскости (x, y) . Однако это отображение не является взаимно однозначным. Например, точкам (ρ, φ) и $(\rho, \varphi + 2k\pi)$, где $k = \pm 1; \pm 2; \pm 3, \dots$, которые, очевидно, различны в плоскости (x, y) отвечает одна и та же точка, ибо $\cos(\varphi + 2k\pi) = \cos \varphi$, а $\sin(\varphi + 2k\pi) = \sin \varphi$. Более того, прямой $\rho = 0$ из плоскости (ρ, φ) формулы (1.53) сопоставляют одну точку $(0; 0)$ плоскости (x, y) .

Постараемся сузить отображение (1.53) до взаимно однозначного, потребовав при этом, чтобы вся плоскость (x, y) была покрыта. Очевидно, достаточно взять $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Эти условия означают, что точки (ρ, φ) не выходят из полосы Ω , изображенной на рис. 1.27.

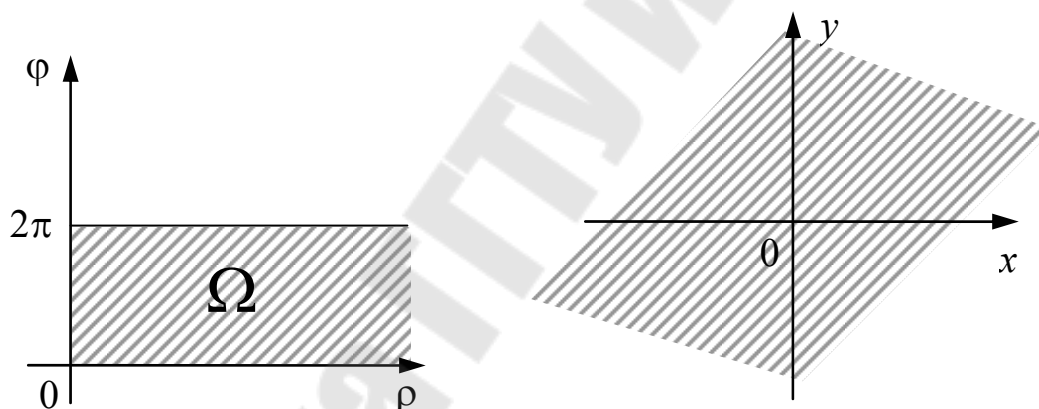


Рис. 1.27

Указанная полоса Ω отображается посредством формул (1.53) на всю плоскость (x, y) , и это отображение взаимно однозначно во всей внутренней части полосы, т. е. взаимная однозначность нарушается только в точках ее контура.

В силу соотношений (1.53) прямым $\rho = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ плоскости (ρ, φ) отвечают окружности радиуса ρ с центром в начале координат и, соответственно, лучи, исходящие из начала координат под углом φ к оси Ox (рис. 1.28).

Действительно, пусть $\rho = R = \text{const}$. Из (1.53) получаем $x^2 + y^2 = \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2$. Полагая в последнем равенстве

$\rho = R$, получаем: $x^2 + y^2 = R^2$. А это уравнение окружности с центром в начале координат, радиус которой R . Далее, пусть $\varphi = \theta = \text{const}$. Тогда $\left. \begin{array}{l} y = \rho \sin \theta \\ x = \rho \cos \theta \end{array} \right\}$. Разделив первое из этих равенств на второе, получим $\frac{y}{x} = \text{tg } \theta = k = \text{const} \Rightarrow y = kx$ ($x \neq 0$). А это и есть луч, исходящий из начала координат под углом θ к оси Ox .

Следовательно, в данном преобразовании одним семейством координатных линий является семейство концентрических окружностей с центром в начале координат, а другим – семейство лучей, исходящих из той же точки (рис. 1.28).

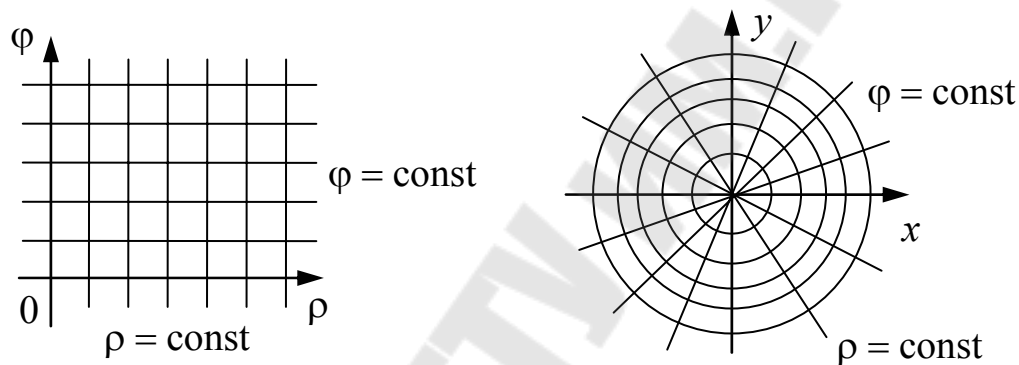


Рис. 1.28

Вернемся к общему случаю и рассмотрим прежде всего интеграл (1.49). По формулам (1.50) имеем:

$$f(x, y) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

и, чтобы завершить замену старых переменных на новые остается самая «малость»: установить как изменяется элемент $ds = dx dy$ площади при переходе к новым координатам. Этим мы сейчас и займемся.

Рассмотрим в плоскости (u, v) бесконечно малый прямоугольник с вершинами $Q_1(u, v)$, $Q_2(u + du, v)$, $Q_3(u + du, v + dv)$, $Q_4(u, v + dv)$, где $du = \Delta u > 0$, $dv = \Delta v > 0$ суть приращения независимых переменных u , v . Вершине Q_1 этого прямоугольника в плоскости (x, y) соответствует, согласно (1.50), точка

$$P_1(x, y) : x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v).$$

Вершине Q_2 соответствует точка

$$P_2(\varphi(u + du, v), \psi(u + du, v)).$$

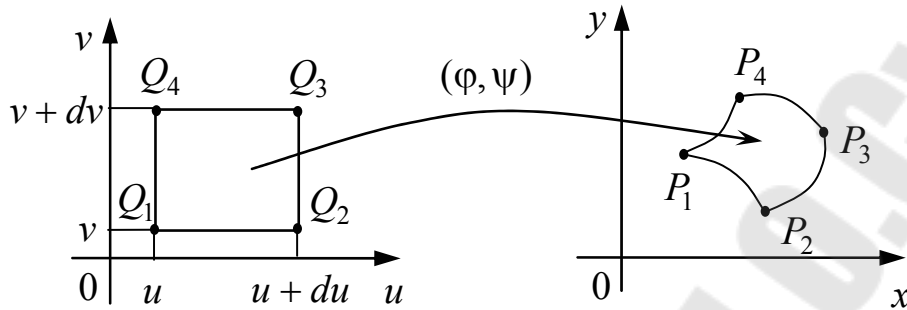


Рис. 1.29

Вершине Q_3 соответствует точка

$$P_3(\varphi(u + du, v + dv), \psi(u + du, v + dv)).$$

И, наконец, вершине Q_4 соответствует точка

$$P_4(\varphi(u, v + dv), \psi(u, v + dv)).$$

Далее нам потребуется связь между полным приращением и полным дифференциалом функции двух переменных

$$\Delta f = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \gamma(\rho)\rho = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \gamma(\rho)\rho,$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, а $\gamma = \gamma(\rho)$ – бесконечно малая функция в точке ноль, т. е. $\lim_{\rho \rightarrow 0} \gamma = 0$. Перепишем это равенство следующим образом:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$$

или

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y. \quad (1.54)$$

С этого момента мы не будем учитывать приближенный характер равенства (1.54), полагая, что рассматриваются только бесконечно малые приращения функций. В этом предположении будем иметь:

$$\varphi(u + du, v) = \varphi(u, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial u} du = x + \frac{\partial \varphi}{\partial u} du. \quad (1.55)$$

$$\psi(u + du, v) = \psi(u, v) + \frac{\partial \psi}{\partial u} du = y + \frac{\partial \psi}{\partial u} du. \quad (1.56)$$

$$\varphi(u + du, v + dv) = \varphi(u, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv = x + \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv. \quad (1.57)$$

$$\psi(u + du, v + dv) = \psi(u, v) + \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv = y + \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv. \quad (1.58)$$

$$\varphi(u, v + dv) = \varphi(u, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv = x + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv. \quad (1.59)$$

$$\psi(u, v + dv) = \psi(u, v) + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv = y + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv. \quad (1.60)$$

Подчеркнем, что все функции, стоящие в правых частях равенств (1.55)–(1.60), вычисляются в точке $Q_1(u, v)$.

Итак, окончательные координаты точек-образов P_i ($i = \overline{1,4}$) суть:

$$\left. \begin{aligned} P_1(x, y); P_2\left(x + \frac{\partial \varphi}{\partial u} du, y + \frac{\partial \psi}{\partial u} du\right); \\ P_3\left(x + \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv, y + \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv\right); \\ P_4\left(x + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv, y + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv\right). \end{aligned} \right\} \quad (1.61)$$

Рассмотрим теперь векторы:

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{P_1 P_2} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} du, \frac{\partial \psi}{\partial u} du \right), \\ \overrightarrow{P_4 P_3} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} du, \frac{\partial \psi}{\partial u} du \right), \\ \overrightarrow{P_1 P_4} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} dv, \frac{\partial \psi}{\partial v} dv \right), \\ \overrightarrow{P_2 P_3} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} dv, \frac{\partial \psi}{\partial v} dv \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.62)$$

Вывод напрашивается сам собой:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_4P_3}; \quad \overrightarrow{P_1P_4} = \overrightarrow{P_2P_3}, \quad (1.63)$$

и четырехугольник $P_1P_2P_3P_4$ – параллелограмм.

Конечно, сформулированное утверждение верно с точностью до бесконечно малых высшего порядка малости – ведь мы при нахождении координат вершин «пожертвовали» членами высшего порядка малости.

Будем считать, что наш параллелограмм достаточно точно заменил криволинейный четырехугольник с теми же вершинами, образованный координатными линиями. Зато теперь площадь ds параллелограмма $P_1P_2P_3P_4$ находится без особых проблем. Напомним, что площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} , \vec{b} равна модулю векторного произведения его сторон:

$$S = |[a, b]| = \left\| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{array} \right\|. \quad (1.64)$$

В этой формуле две внешние вертикальные черты – знак модуля, а две внутренние – определителя. Чтобы применить формулу (1.64) будем считать, что у векторов (1.63) третьи координаты равны нулю. В этом предположении получаем:

$$\begin{aligned} dS &= \left| \left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_4} \right] \right| = \left\| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} du & \frac{\partial \psi}{\partial u} du & 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv & \frac{\partial \psi}{\partial v} dv & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi}{\partial u} du & \frac{\partial \psi}{\partial u} du \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv & \frac{\partial \psi}{\partial v} dv \end{array} \right\| = \\ &= \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{array} \right\| dudv = \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right| dudv = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| dudv. \end{aligned}$$

Комментарий

1. При переходе от определителя третьего порядка к определителю второго порядка мы разложили исходный определитель по эле-

ментам третьего столбца. Затем мы вынесли общие множители du , dv из первой и второй строк, соответственно, определителя второго порядка за его знак.

2. Получившийся у нас в процессе преобразований функциональный определитель называется определителем Якоби.

Отметим, что выбор обозначения, похожего на знак производной, связан с тем обстоятельством, что якобиан в теории функций нескольких переменных во многих случаях играет роль, аналогичную роли производной для функции одного переменного.

Итак, для элемента площади параллелограмма $P_1P_2P_3P_4$ окончательно получаем:

$$dS = \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right| dudv. \quad (1.65)$$

(Очевидно, произведение $dudv$ дает площадь бесконечно малого прямоугольника $Q_1Q_2Q_3Q_4$ в плоскости (u, v)). Взяв теперь значения интегрируемой функции в точке (x, y) , – вершине P_1 , – получаем формулу:

$$f(x, y)dS = f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right| dudv. \quad (1.66)$$

Записав равенства типа (1.66) для всех соответствующих друг другу ячеек наших разбиений областей Δ и D (в плоскости (u, v) – это прямоугольники, а в плоскости (x, y) – криволинейные параллелограммы, образованные координатными линиями) и, просуммировав эти равенства, приходим к формуле

$$\iint_D f(x, y)dS = \iint_D f(x, y)dx dy = \iint_{\Delta} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right| dudv. \quad (1.67)$$

Это и есть формула замены переменных в двойном интеграле. Изложенный здесь вывод формулы (1.67) принадлежит М. В. Остроградскому (Михаил Васильевич Остроградский (1801–1861) – знаменитый русский математик).

Замечание 1.10

Окинем взглядом содеянное. Суть наших рассуждений состояла в том, что область интегрирования D разбивалась не на прямоугольные ячейки со сторонами, параллельными осям Ox и Oy , а на криво-

линейные параллелограммы с помощью сетки координатных линий. Модуль якобиана дает согласно формуле (1.65) отношение $\frac{dS}{dudv}$ площади бесконечно малого криволинейного параллелограмма, образованного двумя парами бесконечно близких координатных линий, к площади соответствующего ему бесконечно малого прямоугольника на плоскости (u, v) . В дальнейшем для упрощения записей будем пользоваться обозначением

$$J = J(u, v) = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}. \quad (1.68)$$

Теперь мы можем следующим образом сформулировать *геометрический смысл* якобиана: $|J|$ представляет собой коэффициент растяжения площади в точке (u, v) при отображении области Δ на область D согласно формулам (1.50).

Замечание 1.11

Для случая полярных координат получаем: $x = \rho \cos \varphi$,
 $y = \rho \sin \varphi$

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix} = -\rho \sin^2 \varphi - \rho \cos^2 \varphi = \\ &= -\rho(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = -\rho, \\ |J| &= \rho. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Соответствующая формула принимает вид:

$$\iint_D f(x, y) dS = \iint_{\Delta} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi = \iint_{\Delta} F(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi. \quad (1.70)$$

Остается конкретизировать ее для соответствующих стандартных областей (стандартные ситуации 1.3, 1.4, 1.5).

Теперь уже, опираясь на проведенное исследование, мы можем смело приступить к решению примера 1.14 (см. рис. 1.25).

Итак, наша задача – вычислить интеграл (1.48):

$$S(D) = \iint_D dS.$$

Как мы уже отмечали, вычисление его в декартовых координатах ничего хорошего не сулит. Поэтому попробуем преобразовать его к новым криволинейным координатам так, чтобы областью интегрирования D стал не криволинейный четырехугольник $MNKL$ (рис. 1.25), а некоторый прямоугольник $\Delta: M'N'K'L'$. Для этого рассмотрим два семейства кривых (парабол и гипербол):

$$\frac{y}{x^2} = u, \quad xy = v. \quad (1.71)$$

Чтобы каждое из них заполняло область D , достаточно взять те значения параметров u, v , которые удовлетворяют неравенствам

$$a \leq u \leq b, \quad p \leq v \leq q.$$

Легко видеть (см. наши рассуждения при построении области D), что через каждую точку области D проходит одна и только одна парабола $y = ux^2$, а также одна и только одна гипербола $xy = v$. Так что указанные два семейства кривых образуют сетку координатных линий, и поскольку задание этих двух кривых, т. е. значений параметров u, v , однозначно определяет точку фигуры D , то эти параметры и примем за криволинейные координаты точек D .

Областью изменения параметров u, v в плоскости (u, v) будет прямоугольник $\Delta = \{(u, v) : a \leq u \leq b, p \leq v \leq q\}$ (рис. 1.30).

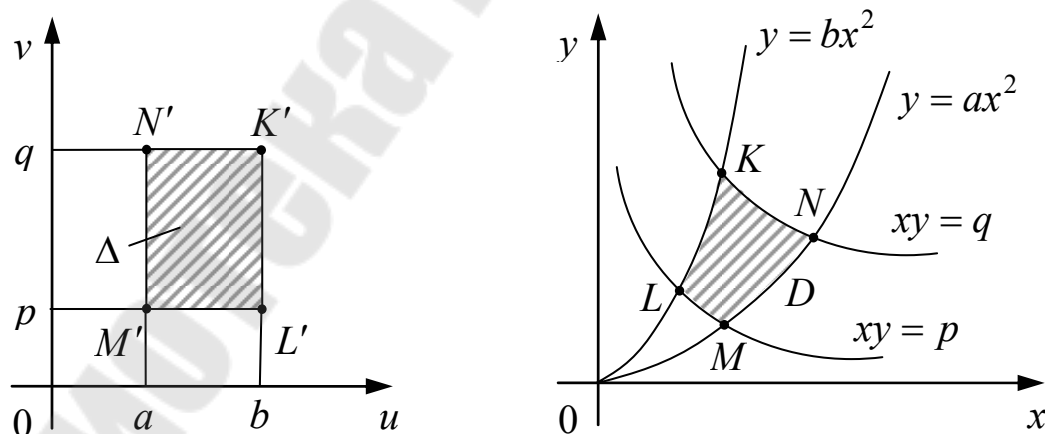


Рис. 1.30

Далее выразим x , y через u , v . Из системы уравнений (1.71):

$$\begin{cases} \frac{y}{x^2} = u \\ x^2 y^2 = v^2 \end{cases} \Rightarrow y^3 = uv^2 \Rightarrow y = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}}$$

(сначала возвели в квадрат нижнее уравнение системы (1.71), а затем полученные уравнения перемножили). Теперь из второго уравнения (1.71) находим:

$$x = vy^{-1} = vu^{-\frac{1}{3}} v^{-\frac{2}{3}} = u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}}.$$

Значит,
$$\begin{cases} x = u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}}, \\ y = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}}. \end{cases}$$

Переходим к формированию якобиана:

$$x'_u = -\frac{1}{3} u^{-\frac{4}{3}} v^{\frac{1}{3}}; \quad x'_v = \frac{1}{3} u^{-\frac{1}{3}} v^{-\frac{2}{3}};$$

$$y'_u = \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} v^{\frac{2}{3}}; \quad y'_v = \frac{2}{3} u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}}.$$

$$J(u, v) = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} -u^{-\frac{4}{3}} v^{\frac{1}{3}} & u^{-\frac{2}{3}} v^{\frac{2}{3}} \\ u^{-\frac{1}{3}} v^{-\frac{2}{3}} & 2u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{9} (-2u^{-1} - u^{-1}) = \frac{1}{9} (-3u^{-1}) = -\frac{1}{3u},$$

$$|J(u, v)| = \frac{1}{3u}.$$

Согласно формуле (1.67) имеет место:

$$\begin{aligned} S(D) &= \iint_{\Delta} |J(u, v)| du dv = \frac{1}{3} \iint_{\Delta} \frac{1}{u} du dv = \frac{1}{3} \int_a^b \frac{1}{u} du \int_p^q dv = \frac{1}{3} \ln|u| \Big|_a^b \cdot v \Big|_p^q = \\ &= \frac{1}{3} (\ln|b| - \ln|a|) \cdot (q - p) = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{b}{a} \right| (q - p) = \frac{q - p}{3} \ln \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Примечание 1.8

1. Модули в последних соотношениях можно было вообще не писать, ибо по условию $0 < a < b$.

2. Опять же по условию $0 < p < q$. Поэтому, как и следовало ожидать, ответом является положительное число.

Чтобы усовершенствоваться в методе замены переменных, рассмотрим еще один.

Пример 1.16. Вычислить интеграл

$$I_{16} = \iint_D 2\pi(x^2 - y^2) \sin \pi(x - y)^2 dx dy,$$

где D – область, ограниченная прямыми $x + y = 2$, $x + y = 4$, $x - y = -1$, $x - y = 2$.

Решение

Как известно из аналитической геометрии, для того, чтобы прямые

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (1.72)$$

были параллельными, достаточно, чтобы их координаты при неизвестных были пропорциональными: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Опираясь на этот факт, заключаем, что прямые $x + y = 2$ и $x + y = 4$ параллельны. Аналогично устанавливаем, что и прямые $x - y = -1$, $x - y = 2$ параллельны. Значит, область D – параллелограмм. Более того, докажем, что D – прямоугольник. Прежде всего вспомним условия перпендикулярности прямых, заданных уравнениями (1.72): $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$. Проверим его, скажем, для прямых $x + y = 2$, $x - y = -1$. Имеем: $A_1 = 1$, $B_1 = 1$, $A_2 = 1$, $B_2 = -1$. Следовательно, $A_1A_2 + B_1B_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$ и эти прямые взаимно перпендикулярны.

Осталось вспомнить, что параллелограмм с прямым углом – прямоугольник (рис. 1.31).

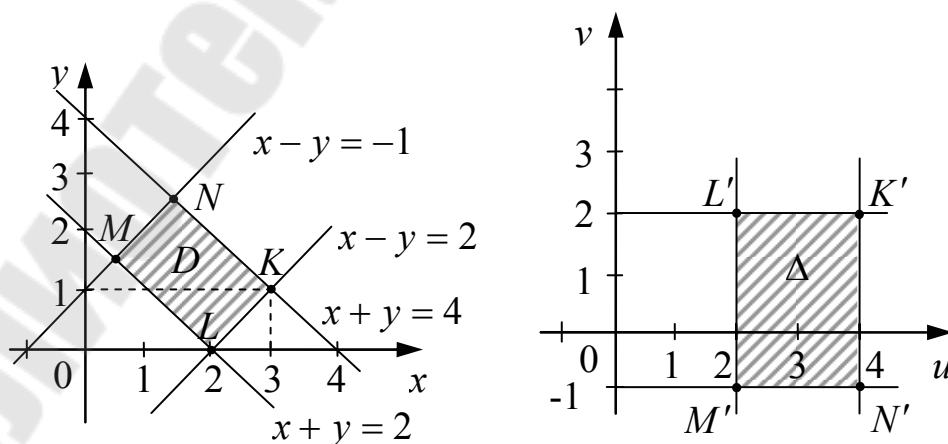


Рис. 1.31

Непосредственное вычисление I_{16} достаточно трудоемкое, ибо для его реализации область D придется разбить на три трапециевидные части, да и подынтегральная функция особых симпатий не вызывает.

Поэтому попробуем ввести новые переменные в надежде, что ситуация упростится:

$$x + y = u, \quad x - y = v. \quad (1.73)$$

Тогда

$$D: \begin{cases} x + y = 2, \\ x + y = 4, \\ x - y = -1, \\ x - y = 2, \end{cases} \Rightarrow \Delta: \begin{cases} u = 2, \\ u = 4, \\ v = -1, \\ v = 2, \end{cases}$$

и вместо неудобно расположенного прямоугольника $MNKL$ в плоскости (x, y) мы получаем в плоскости (u, v) прямоугольник $M'L'K'N'$, стороны которого параллельны осям координат и, значит, интегрирование по нему осуществляется наиболее просто.

Итак, мы на верном пути, и остается пересчитать подынтегральную функцию в новых координатах и вычислить якобиан преобразования. Последовательно имеем:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2\pi(x^2 - y^2) \sin \pi(x - y)^2 = 2\pi(x - y)(x + y) \sin \pi(x - y)^2 = \\ &= 2\pi uv \sin \pi v^2. \end{aligned}$$

Далее, из системы (1.73) выражаем x, y через u, v :

$$\begin{cases} 2x = u + v, \\ 2y = u - v, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u + v}{2}, \\ y = \frac{u - v}{2}. \end{cases}$$

Теперь имеем:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow |J(u, v)| = \frac{1}{2}.$$

И мы готовы к замене переменных:

$$\begin{aligned}
 I_{16} &= \iint_D 2\pi uv \sin \pi v^2 \cdot \frac{1}{2} dudv = \pi \int_2^4 udu \int_{-1}^2 v \sin \pi v^2 dv = \\
 &= \frac{\pi u^2}{2} \Big|_2^4 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^2 \sin \pi v^2 d(\pi v^2) = \frac{\pi(16-4)}{2} \cdot \left[-\frac{1}{2\pi} \cos \pi v^2 \right]_{-1}^2 = \\
 &= 6\pi \cdot \left[-\frac{1}{2\pi} (\cos 4\pi - \cos \pi) \right] = -6 \cdot \frac{1 - (-1)}{2} = -6.
 \end{aligned}$$

Замечание 1.12

Из приведенных примеров и из вывода общей формулы замены переменных (1.67) вполне понятно, что цель замены переменных в двойном интеграле несколько иная, чем цель замены переменного в интеграле по отрезку. Там мы заботились только об упрощении подынтегральной функции, а область интегрирования при любой замене переменного оставалась отрезком. Здесь же, т. е. в двойном интеграле, мы преследуем, проводя замену переменных, сразу две цели: максимальное упрощение области интегрирования (т. е. приведение ее к стандартному виду) и возможное упрощение подынтегральной функции.

Что же касается практического выбора криволинейных координат при вычислении двойного интеграла, то эта проблема явно попадает в разряд эвристических, ибо в общем случае никакого определенного рецепта (стандарта на решение) дать нельзя. Тем не менее, существует один вид криволинейных координат, который имеет практически неограниченный диапазон применений.

1.9. Двойной интеграл в обобщенных полярных координатах. Теорема существования для общего случая замены переменных

Начнем с простой задачи.

Пример 1.17. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1.74}$$

Решение

Задачу вполне можно одолеть и с помощью обычного определенного интеграла. Действительно, учитывая симметрию эллипса (рис. 1.32), получаем:

$$\frac{S}{4} = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx. \quad (1.75)$$

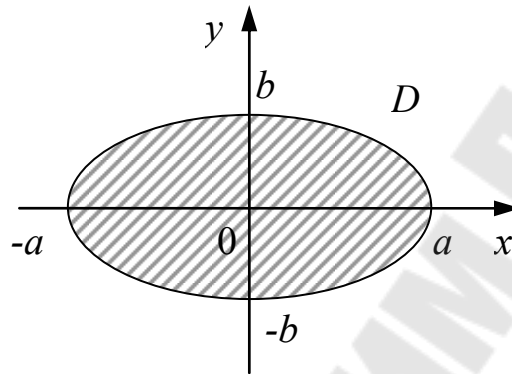


Рис. 1.32

С этим интегралом мы уже однажды сталкивались (пример 1.10): его можно, к примеру, вычислить с помощью подстановки: $x = a \cos t$.

Станем теперь решать эту задачу с помощью двойного интеграла: $S(D) = \iint_D dS$.

Если далее работать с декартовыми координатами, то опять приходим к интегралу (1.75). Не помогут и обычные полярные координаты: эллипс, увы, – не окружность!

Попробуем подобрать такие криволинейные координаты, в которых эллипс превратится в окружность. Возьмем обычные полярные координаты и модифицируем их введением соответствующих коэффициентов искажения по осям

$$x = a\rho \cos \varphi, \quad y = b\rho \sin \varphi, \quad (1.76)$$

где параметры a , b – суть константы из уравнения эллипса (1.74). В новых координатах уравнение эллипса принимает вид:

$$\frac{a^2 \rho^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{a^2 \rho^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1 \Rightarrow \rho^2 = 1 \Rightarrow \rho = 1.$$

Значит, область

$$\Delta = \{(\rho, \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}. \quad (1.77)$$

При этом мы, естественно, считаем, что полярная система координат обычным образом совмещена с декартовой: полюс полярной системы совпадает с точкой $O(0,0)$, а полярная ось – с осью Ox .

Остается найти якобиан преобразования (1.76):

$$J = \begin{vmatrix} a \cos \varphi & -a\rho \sin \varphi \\ b \sin \varphi & b\rho \cos \varphi \end{vmatrix} = ab\rho. \quad (1.78)$$

Возвращаясь к площади эллипса в новых координатах, получаем

$$S(D) = \iint_D dS = \iint_{\Delta} ab\rho d\rho d\varphi = ab \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho = 2\pi ab \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^1 = \pi ab.$$

Замечание 1.13

1. Посмотрите насколько просто, хочется даже сказать – элегантно, удалось осуществить вычисление (невольно на ум приходят слова из песни: «Вы оцените красоту игры!»).

2. Преобразом области D (рис. 1.31) в плоскости (ρ, φ) служит прямоугольник (1.77) (рис. 1.33).

3. Если в уравнении (1.74) $a = b$ (т. е. эллипс превращается в окружность), то из формулы $S(D) = \pi ab$ вытекает $S(D) = \pi a^2$ – известная формула площади круга.

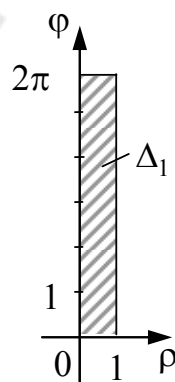


Рис. 1.33

4. В некоторых более сложных ситуациях даже формул типа (1.76) оказывается недостаточно. Тогда приходится использовать са-

мый общий вид полярных координат – *обобщенные полярные координаты*. Они вводятся по формулам

$$x - x_0 = a\rho^\beta \cos^\alpha \varphi, \quad y - y_0 = b\rho^\beta \sin^\alpha \varphi, \quad (1.79)$$

где $x_0, y_0, a, b, \alpha, \beta$ – некоторые числа, выбираемые в каждом конкретном случае из соображений удобства. Якобиан этого отображения

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \beta a \rho^{\beta-1} \cos^\alpha \varphi & -\alpha a \rho^\beta \cos^{\alpha-1} \sin \varphi \\ \beta b \rho^{\beta-1} \sin^\alpha \varphi & \alpha b \rho^\beta \sin^{\alpha-1} \cos \varphi \end{vmatrix} = \\ &= ab\alpha\beta\rho^{2\beta-1} \cos^{\alpha+1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi + ab\alpha\beta\rho^{2\beta-1} \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha+1} \varphi = \\ &= ab\alpha\beta\rho^{2\beta-1} \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \\ &= ab\alpha\beta\rho^{2\beta-1} \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Пример 1.18. Вычислить интеграл

$$I_{18} = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy,$$

где D – круг, ограниченный окружностью

$$x^2 + y^2 = 2x. \quad (1.81)$$

Решение

Найдем центр и радиус окружности (1.81):

$$x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + y^2 = 1 \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

Значит центр окружности находится в точке $Q(1,0)$, а ее радиус равен 1 (рис. 1.34). Рассмотрим теперь два возможных способа введения новых переменных.

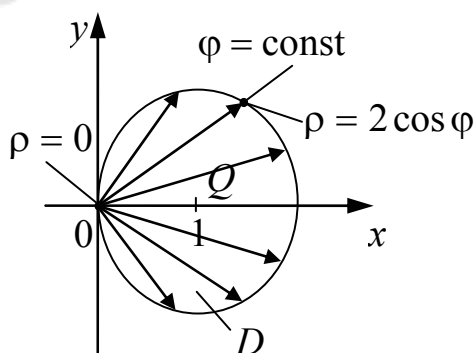


Рис. 1.34

Первый способ. Воспользуемся обыкновенными полярными координатами (1.53):

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

Найдем прообраз Δ круга D в плоскости (ρ, φ) . Из рис. 1.34 наглядно видно, что достаточно считать $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Займемся теперь границами для ρ . Подставляя выражения (1.53) в уравнение окружности (1.81), получаем:

$$\rho^2 = 2\rho \cos \varphi \Rightarrow \begin{cases} \rho = 0, \\ \rho = 2 \cos \varphi. \end{cases}$$

Первая из этих линий $\rho = 0$ в плоскости (ρ, φ) есть попросту ось $O\varphi$, а вторая линия $\rho = 2 \cos \varphi$ – это косинусоида, растянутая в два раза по оси $O\rho$. Эти две линии и ограничивают интересующую нас область Δ (рис. 1.35), при этом, как мы уже отмечали, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

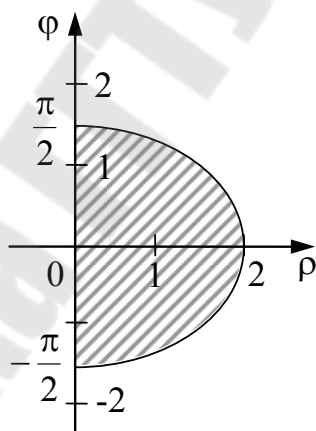


Рис. 1.35

Примечание 1.9. Принято в полярной системе координат первой считать координату ρ , а второй (соответственно) φ , т. е. точки записывают через координаты так: $M(\rho, \varphi)$. Тем не менее, обычно уравнения линий в этой системе координат имеют вид: $\rho = \rho(\varphi)$. Как следствие такой «нестыковки» мы и испытываем некоторое неудобство при изображении линий, ибо ось независимого переменного теперь вертикальная, а ось зависимого переменного – горизонтальная. Ну что же, с этим приходится мириться.

Возвращаясь к нашему интегралу, легко его вычисляем:

$$\begin{aligned}
 I_{18} &= \iint_{\Delta} \rho^2 \rho d\rho d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} \rho^3 d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{2 \cos \varphi} = \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot 16 \cos^4 \varphi = \\
 &= 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi = \\
 &= \left[\varphi + \sin 2\varphi \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} d\varphi = \pi + \frac{1}{2} \left[\varphi + \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Замечание 1.14

На практике нет особой необходимости каждый раз отдельно представлять область Δ , ибо расстановку пределов интегрирования в повторном интеграле нетрудно произвести, рассматривая не область Δ , а изменение полярных координат в исходной области D . Очевидно, в рассмотренном примере мы имели дело со стандартной ситуацией 5, когда полюс полярной системы координат лежит на границе области интегрирования, а полярный радиус меняется от нуля до контура (в нашем случае – до линии $\rho = 2 \cos \varphi$) (рис. 1.34).

Второй способ. Сейчас мы перейдем к полярным координатам с полюсом не в точке $O(0,0)$, а в точке $Q(1,0)$ (центре круга). Соответствующие формулы в этом предположении: $x - 1 = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Тогда прообразом Δ_1 круга D окажется прямоугольник – наиболее простая для интегрирования область:

$$\Delta_1 = \{(\rho, \varphi) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

(рис. 1.33, 1.36). Для подынтегральной функции теперь получаем:

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} x &= 1 + \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 &= 1 + 2\rho \cos \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi + \\
 &+ \rho^2 \sin^2 \varphi = 1 + 2\rho \cos \varphi + \rho^2.
 \end{aligned}$$

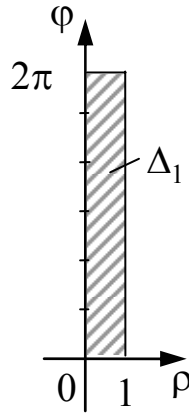


Рис. 1.36

В итоге наш интеграл переписется в виде:

$$\begin{aligned}
 I_{18} &= \iint_{\Delta_1} (1 + 2\rho \cos \varphi + \rho^2) \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho + 2\rho^2 \cos \varphi + \rho^3) d\rho = \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{\rho^2}{2} + \frac{2\rho^3}{3} \cos \varphi + \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cos \varphi \right) d\varphi = \\
 &= \left[\frac{3}{4} \varphi + \frac{2}{3} \sin \varphi \right]_0^{2\pi} = \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Пример 1.19. Найти площадь фигуры, ограниченной петлей кривой

$$(x + y)^3 = axy \quad (a > 0). \quad (1.82)$$

Решение

В условии задачи имеется явная подсказка: у нашей кривой только одна петля. Исследуем уравнение (1.82), чтобы лучше представить ее форму.

1. Кривая проходит через начало координат $(0 + 0)^3 \equiv a \cdot 0 \cdot 0$.

2. Кривая симметрична относительно прямой $y = x$. Действительно, если точка $M(x_0, y_0)$ лежит на нашей кривой, то имеет место тождество: $(x_0 + y_0)^3 \equiv a \cdot x_0 \cdot y_0$. Откуда $(y_0 + x_0)^3 \equiv a \cdot y_0 \cdot x_0$. Значит, и точка $M'(y_0, x_0)$ лежит на данной кривой. Симметрия же этих точек относительно биссектрисы $y = x$ очевидна.

3. Предположим теперь, что $xy > 0$, т. е. x, y – одного знака. Тогда из $a > 0$ следует, что и $axy > 0$. Откуда $(x + y)^3 > 0$ и, значит, $x + y > 0$. Из системы неравенств $\begin{cases} xy > 0 \\ x + y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$.

Вывод: из двух четвертей I и III точки нашей кривой могут быть только в первой четверти.

4. Рассмотрим часть кривой, находящуюся в I четверти ($x \geq 0, y \geq 0$) и покажем, что она ограничена. Для этого распишем правую часть равенства (1.82) по формуле куба суммы:

$$(x + y)^3 = axy \Rightarrow x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = axy.$$

Теперь с учетом $x \geq 0, y \geq 0$, имеем:

$$3x^2y \leq x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = axy \Rightarrow 3x^2y \leq axy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{cases} 3xy \left(x - \frac{a}{3} \right) \leq 0 \\ xy \geq 0 \end{cases} \right\} \Rightarrow x - \frac{a}{3} \leq 0 \Rightarrow x \leq \frac{a}{3}.$$

Аналогично, учитывая симметрию уравнения (1.82), заключаем, что $y \leq \frac{a}{3}$. Отсюда и следует требуемое утверждение.

Примечание 1.10. Этот факт достаточно легко усмотреть, опираясь на следующие соображения качественного характера. Из уравнения (1.82) видно, что при больших положительных значениях x, y его левая часть растет вместе с x, y как третья степень, а правая – как вторая, т. е. левая часть растет быстрее правой.

Значит, при $\begin{cases} x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty \end{cases}$ равенство (1.82) невозможно.

Вывод: поскольку кривая ограничена в первой четверти и пересекается, как не трудно видеть, с осями координат в единственной точке $O(0,0)$, то она образует в первой четверти петлю, симметричную относительно оси $y = x$.

5. Покажем, что оси координат являются касательными к петле нашей кривой в точке $O(0,0)$. С учетом симметрии достаточно доказать это утверждение для оси Ox .

Напомним, что уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \quad (1.83)$$

Поскольку в нашем случае $x_0 = y_0 = 0$, то уравнение (1.83) упрощается до такого

$$y = f'(0)x \quad (1.84)$$

и нам остается показать, что $f'(0) = 0$.

Продифференцируем уравнение (1.82) по x , считая y функцией от x . Имеем

$$3(x + y)^2(1 + y') = a(y + xy').$$

Полагая в этом равенстве $x = y = 0$, получаем

$$0(1 + y'(0)) = a \cdot 0 \Rightarrow 0 \equiv 0.$$

И никакой полезной информации нам «выудить» пока не удалось. Значит, надо искать другой подход к этой проблеме. Придется копнуть глубже.

Определение 1.7. Точка $M_0(x_0, y_0)$ кривой $F(x, y) = 0$ называется *особой*, если ее координаты одновременно удовлетворяют трем уравнениям:

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F'_x(x_0, y_0) = 0, \quad F'_y(x_0, y_0) = 0. \quad (1.85)$$

(Угловой коэффициент касательной к кривой в особой точке: $k = -\frac{F'_x}{F'_y}$ представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$).

Правило нахождения касательных в особой точке $O(0,0)$

Уравнения касательных к кривым в особой точке $O(0,0)$ можно получить, если приравнять нулю группу членов наиболее низкой степени.

Вооружившись приведенной информацией, легко решаем возникшую проблему. Прежде всего проверим в нашем случае выполнимость для точки $O(0,0)$ условий (1.85). Для этого перепишем (1.82) так:

$$F(x, y) = (x + y)^3 - axy = 0.$$

Имеем:

$$F'_x = 3(x + y)^2 - ay,$$

$$F'_y = 3(x + y) - ax.$$

Следовательно, $F(0,0) = F'_x(0,0) = F'_y(0,0) = 0$ и $O(0,0)$ – особая точка.

Уравнение (1.82) содержит члены только третьего и второго измерений. Поэтому придется приравнять к нулю член axy . Из условий

$$\begin{cases} axy = 0, \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow xy = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

и все доказано.

6. Если бы мы пожелали уточнить форму петли, то потребовались бы дополнительные точки. Их целесообразно искать как точки пересечения кривой с прямыми $y = kx$ при различных значениях k . В нашем случае (опять учитывая симметрию) достаточно, скажем, рассмотреть случаи $k \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$. Непосредственным подсчетом (рекомендуем заняться этим самостоятельно) устанавливаем, что наиболее удаленная от начала координат точка петли («вершина петли») лежит на прямой $y = x$

и имеет координаты $\left(\frac{a}{8}; \frac{a}{8}\right)$. Для нее $d = \frac{a\sqrt{2}}{8}$.

7. Обсудим, наконец, случай, когда $xy < 0$, т. е. x и y – разных знаков. В этом предположении несоответствия в порядке роста между левой и правой частями уравнения (1.82) уже не будет, ибо в левой части уравнения под знаком третьей степени производится вычитание (а не сложение).

Вывод: во второй и четвертой четвертях могут быть (и они действительно имеются) две ветви кривой, уходящие в бесконечность от начала координат.

Чтобы в этом убедиться, достаточно, скажем, записать уравнение кривой в параметрическом виде. Пусть $y = tx$. Тогда $(x + tx)^3 =$

$$= axtx \Rightarrow x^3(1+t)^3 = at \cdot x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{at}{(1+t)^3} \\ y = tx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{at}{(1+t)^3} \\ y = \frac{at^2}{(1+t)^3} \end{cases}.$$

Так как при $t \rightarrow -1$ величины стремятся к бесконечности, то кривая имеет бесконечные ветви. Это значит, что она может иметь и

асимптоту, которую можно найти, в принципе, тем же способом, что и для кривых, заданных явным уравнением: $y = y(x)$. Попытаемся продвинуться в указанном направлении

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow -1} t = -1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [y(x) - kx] = \lim_{t \rightarrow -1} \left[\frac{at^2}{(1+t)^3} + \frac{at}{(1+t)^3} \right] = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{at^2 + at}{(1+t)^3} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow -1} \frac{2at + a}{3(1+t)^2} = \frac{-a}{0} = \infty \text{ (применили правило Лопиталья).}$$

Итак, последний предел не существует. Поэтому наклонных (а, значит, и горизонтальных) асимптот у кривой нет. В силу симметрии кривой относительно прямой $y = x$ заключаем, что и вертикальных асимптот тоже нет.

Таким образом, можно надеяться, что картина предельно ясна и остается выполнить соответствующий эскиз (рис. 1.37).

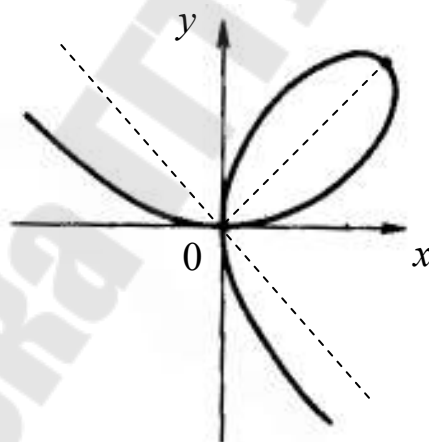


Рис. 1.37

Понятно, что проводить вычисление площади петли в прямоугольных координатах в данном случае не представляется возможным, ибо уравнение (1.82) нельзя разрешить относительно x или y . Не помогут и обычные полярные координаты, ибо переход к ним не дает упрощения уравнения кривой. Попробуем воспользоваться (с целью упрощения суммы $x + y$) обобщенными полярными координатами:

$$x = \rho \cos^2 \varphi, \quad y = \rho \sin^2 \varphi. \quad (1.86)$$

$$\text{Имеем: } (x + y)^3 = axy \Rightarrow (\rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi)^3 = a\rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho^3 = a\rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \Rightarrow \begin{cases} \rho = 0, \\ \rho = a \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = \frac{a}{4} \sin^2 2\varphi. \end{cases}$$

Итак, в новых координатах уравнение кривой имеет следующий компактный вид:

$$\rho = \frac{a}{4} \sin^2 2\varphi. \quad (1.87)$$

Теперь необходимо найти якобиан преобразования (1.86). Сравнивая (1.79) и (1.86) устанавливаем: $x_0 = y_0 = 0$, $a = b = 1$, $\beta = 1$, $\alpha = 2$. Следовательно, из (1.80) вытекает:

$$J = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \rho \cos \varphi \sin \varphi = \rho \sin 2\varphi. \quad (1.88)$$

(Конечно, этот же результат нетрудно получить непосредственным вычислением якобиана).

Значит,

$$S(D) = \iint_D 1 \cdot ds = \iint_{\Delta} \rho \sin 2\varphi d\rho d\varphi. \quad (1.89)$$

Остается установить границы изменения переменных ρ , φ . Для ρ все просто: поскольку полюс полярной системы координат лежит на границе области интегрирования, то $0 \leq \rho \leq \frac{a}{4} \sin^2 2\varphi$ (стандартная ситуация 1.5).

Из п. 5 примера 1.19 вытекает, что $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (ведь оси координат являются касательными к петле (см. рис. 1.37)).

К этому же результату можно прийти, опираясь на рис. 1.37 и полярное уравнение кривой (1.87). В самом деле, из рис. 1.37 видно, что когда точка $M(x, y)$, выходя из начала координат, пробегает петлю, скажем, против часовой стрелки и опять возвращается в начальное положение, полярный радиус ρ точки M в это время начинает свое изменение от 0 и снова возвращается в ноль. Но из уравнения

(1.87) видно, что $\rho = 0$ при $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, это и есть пределы внешнего интегрирования по φ .

Более того, учитывая симметрию петли относительно прямой $y = x$, разумно подсчитать площадь ее половинки и результат удвоить. Теперь по формуле (1.89) окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
 S(D) &= \iint_{\Delta} \rho \sin 2\varphi d\rho d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\varphi d\varphi \int_{\rho=0}^{\rho=\frac{a}{4} \sin^2 2\varphi} \rho d\rho = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\varphi d\varphi \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^{\frac{a}{4} \sin^2 2\varphi} = \\
 &= \frac{a^2}{16} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^5 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{16} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 2\varphi \cdot \sin 2\varphi d\varphi = -\frac{a^2}{32} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos^2 2\varphi)^2 d(\cos 2\varphi) = \\
 &= -\frac{a^2}{32} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\cos^2 2\varphi + \cos^4 2\varphi) d(\cos 2\varphi) = \\
 &= -\frac{a^2}{32} \left[\cos 2\varphi - \frac{2}{3} \cos^3 2\varphi + \frac{1}{5} \cos^5 2\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{32} \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{a^2}{32} \cdot \frac{8}{15} = \frac{a^2}{60}.
 \end{aligned}$$

Примечание 1.11. Возможно, проведенный детальный анализ формы кривой кому-то покажется излишним, ибо, по-видимому, для решения поставленной задачи о вычислении площади можно было бы ограничиться частью «добытой» информации, но:

1. Предусмотрительность лучше, чем раскаяние (английская пословица).
2. Как видно, хотя бы из рассмотренного примера, построение графиков функций, заданных неявно, – задача, как правило, достаточно сложная. Поэтому опыт, приобретенный при внимательном изучении решения примера 1.19, может оказаться полезным в аналогичных ситуациях.

Замечание 1.15

В математической литературе хорошо известен «персонаж», весьма схожий с нашей кривой (рис. 1.37) – это «лист Декарта*». Его уравнение: $x^3 + y^3 = 3axy$ ($a > 0$). Правда, у декартова листа (в отличие от нашей кривой) имеется наклонная асимптота: $y = -x - a$ (рис. 1.38).

*Первое упоминание Декарта об этой кривой относится к 1638 г. Но ни он, ни его преемники не предполагали существование у кривой бесконечных ветвей и рассматривали только овал, названный Декартом листом. Лишь в 1725 г. были окончательно установлены очертания этой кривой и наличие асимптот.

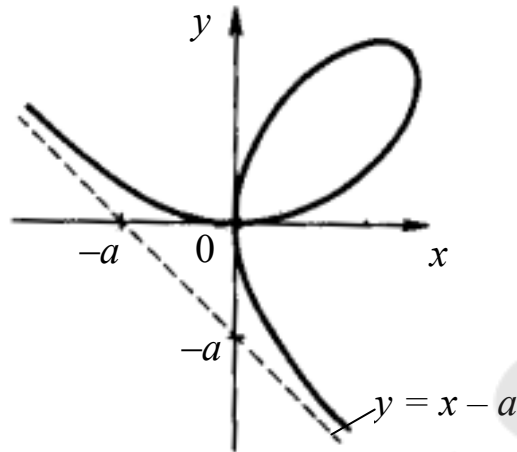


Рис. 1.38

ВНИМАНИЕ – ЗАДАНИЕ

Найти площадь фигуры, ограниченной петлей декартова листа.

Пример 1.20. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = 4xy \quad (a > 0, b > 0). \quad (1.90)$$

Решение

Исследуем уравнение (1.90).

1. Кривая проходит через начало координат: $\left(\frac{0}{a} + \frac{0}{b}\right)^4 = 4 \cdot 0 \cdot 0$.

2. Из $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 \geq 0$ следует, что и $4xy \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$ и, значит,

наша фигура расположена в I и III четвертях.

3. Кривая симметрична относительно начала координат. В самом деле, пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на рассматриваемой кривой.

Тогда имеет место тождество: $\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right)^4 \equiv 4x_0y_0$. Переписывая его в

виде $\left(\frac{-x_0}{a} + \frac{-y_0}{b}\right)^4 \equiv 4(-x_0)(-y_0)$, заключаем, что и точка

$M'_0(-x_0, -y_0)$ лежит на нашей кривой. А эти точки центрально симметричны относительно точки $O(0,0)$.

Вывод: вся фигура D состоит из двух частей, симметричных друг другу относительно начала координат.

Остается найти площадь части фигуры, лежащей в первой четверти, и результат удвоить.

Вычисления удобно производить в обобщенных полярных координатах

$$x = a\rho \cos^2 \varphi, \quad y = b\rho \sin^2 \varphi, \quad (1.91)$$

которые отличаются от их предшественников из предыдущего примера лишь коэффициентами искажения по осям (формулы (1.86)).

Имеем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = 4xy &\Rightarrow \left(\frac{a\rho \cos^2 \varphi}{a} + \frac{b\rho \sin^2 \varphi}{b}\right)^4 = 4ab\rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho^4 = ab\rho^2 \sin^2 2\varphi \Rightarrow \begin{cases} \rho = 0, \\ \rho^2 = ab \sin^2 2\varphi, \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \rho = 0, \\ \rho = \sqrt{ab} \sin 2\varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}). \end{cases} \end{aligned} \quad (1.92)$$

Комментарий. Из равенства $\rho^2 = ab \sin^2 2\varphi$ следует, что $\rho = ab |\sin 2\varphi|$ ($\rho, a, b > 0$ по условию). Но из $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \Rightarrow 2\varphi \in [0; \pi]$, т. е. 2φ находится либо в I, либо во II четверти, значит, $\sin 2\varphi > 0 \Rightarrow |\sin 2\varphi| = \sin 2\varphi$.

Якобиан преобразования, очевидно, отличается от своего «собрата» (1.88) лишь на ab : $J = ab\rho \sin 2\varphi$.

Кривые (1.92) ограничивают на плоскости (ρ, φ) некоторую область Δ – прообраз части фигуры D , лежащий в I четверти (рис. 1.39). Имеем теперь:

$$\begin{aligned}
\frac{S(D)}{2} &= \iint_{\Delta} ab\rho \sin 2\varphi d\rho d\varphi = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{ab} \sin 2\varphi} \rho d\rho = \\
&= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi \cdot \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{ab} \sin 2\varphi} = \frac{(ab)^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\varphi d\varphi = \frac{a^2 b^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi \sin 2\varphi d\varphi = \\
&= -\frac{a^2 b^2}{2 \cdot 2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 2\varphi) d(\cos 2\varphi) = -\frac{a^2 b^2}{4} \left[\cos 2\varphi - \frac{\cos^3 2\varphi}{3} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= -\frac{a^2 b^2}{4} \left(-1 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} \right) = -\frac{a^2 b^2}{4} \left(-\frac{4}{3} \right) = \frac{a^2 b^2}{3}. \text{ Отсюда } S(D) = \frac{2}{3} a^2 b^2.
\end{aligned}$$

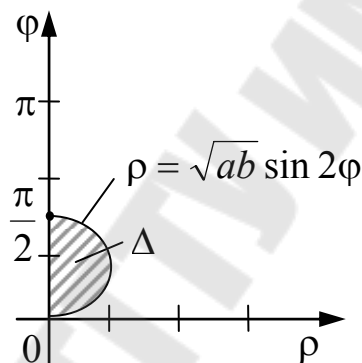


Рис. 1.39

Примечание 1.12. При решении этого примера мы даже обошлись без построения области D , зато построили ее прообраз в I четверти – область Δ . При решении же примера 1.19 мы, наоборот, построили D , но не построили Δ . Иногда удастся расстановку пределов интегрирования в повторном интеграле произвести, не выполняя никаких рисунков, а довольствуясь лишь аналитическими соотношениями для границ изменения переменных.

ВНИМАНИЕ – ЗАДАНИЕ

Построить кривую (1.90).

Подведем итог всему сказанному в разделе 1.9 в виде следующего утверждения:

Теорема 1.5. Пусть D и Δ – замкнутые квадратуемые области, функция $f(x, y)$ ограничена в области D и непрерывна всюду, кроме

быть может, некоторого множества точек площади нуль, а отображение (1.50)

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v) \quad (1.50')$$

области Δ на область D удовлетворяет условиям:

1°. Оно взаимно однозначно, т. е. различным точкам (u, v) области Δ соответствуют различные точки (x, y) области D .

2°. Функции $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ имеют в области Δ непрерывные частные производные первого порядка.

3°. Якобиан отображения $J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix}$ отличен от нуля

во всех точках области Δ .

Тогда справедливо равенство (1.67)

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J| du dv. \quad (1.67')$$

(Это равенство называется *формулой замены переменных в двойном интеграле*).

Замечание 1.16

Если условие 1° (взаимная однозначность отображения (1.50')) или условие 3° (отличие от нуля якобиана отображения) нарушаются на множестве точек площади нуль (в частности, в отдельных точках), то формула (1.67') сохраняет силу. Мы уже нелегально опирались на этот факт в решении примера 1.18 из рассматриваемого раздела, ибо якобиан использованного там преобразования (1.53) $J = -\rho$ обращается в ноль на границе $\rho = 0$ области Δ .

ГЛАВА 2. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ, СВОЙСТВА И ВЫЧИСЛЕНИЕ

Тройной интеграл, будучи полным аналогом двойного интеграла, сохраняет, практически, все его свойства. И где сможем – мы на этом сэкономим. Однако цепь задач – об определении площади и объема – естественно приведших нас к обычному определенному и двойному интегралам, как к пределам особого типа сумм, на этот раз прерывается, и нам придется исходить из задачи совсем другого рода (впрочем, в случае двойного интеграла мы с этой задачей уже встречались).

2.1. Задача о массе пространственного тела

Найти массу пространственного тела T , в каждой точке которого известна плотность $\rho = f(P)$.

Решение

Решение осуществляем по той же схеме, что и задачи 1.2 из раздела 1.1. Разобьем тело T на части $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$ (ΔV_i одновременно и сама часть, и ее объем) так, чтобы любые две части не имели общих внутренних точек. Выбрав в каждой части ΔV_i произвольную точку P_i , получим

$$M(T) \approx \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta V_i, \quad (2.1)$$

$$M(T) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta V_i, \quad (2.2)$$

где λ – наибольший из диаметров частей ΔV_i .

2.2. Интегральная сумма. Тройной интеграл

Пусть в некоторой ограниченной трехмерной области T задана функция $f(P) = f(x, y, z)$. Разобьем область T сетью поверхностей на n произвольных частей: $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$, объемы которых мы обозначим теми же символами. В каждой части ΔV_i ($i = \overline{1, n}$) возьмем произвольно точку $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ и вычислим значение функции в ней, а затем составим сумму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta V_i, \quad (2.3)$$

которая называется n -й интегральной суммой для функции $f(P)$ по области T .

Определение 2.1. Если существует конечный предел I интегральной суммы (2.3) при стремлении к нулю наибольшего из диаметров элементарных частей деления ΔV_i ($i = \overline{1, n}$), не зависящий ни от способа дробления области T на части, ни от выбора точки P_i , то этот предел и называется *тройным интегралом* от функции $f(P)$ по телу T и обозначается символом:

$$\iiint_T f(P)dV = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta V_i, \quad (2.4)$$

а функция $f(x, y, z)$ в этом случае называется *интегрируемой* в области T .

Так же, как и для двойного интеграла (см. Теоремы 1.1, 1.2 из раздела 1.3) справедливы следующие достаточные условия интегрируемости функций по пространственной области:

Теорема 2.1. Функция, непрерывная в замкнутой кубируемой (т. е. имеющей объем) области, интегрируема в этой области.

Теорема 2.2. Функция, ограниченная в кубируемой области и непрерывная всюду, кроме некоторого множества точек объема нуль, интегрируема в этой области.

2.3. Вычисление тройного интеграла

Найдем, прежде всего, выражение для бесконечно малого элемента объема dV (равенство (2.4)). Для этого тело T разобьем на части тремя семействами плоскостей: $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, $z = \text{const}$. Возьмем две бесконечно близкие плоскости, параллельные плоскости xOy и проходящие соответственно через точки $(0, 0, z)$ и $(0, 0, z + dz)$. Аналогично проводим бесконечно близкие плоскости, параллельные xOz соответственно через точки $(0, y, 0)$ и $(0, y + dy, 0)$ и две плоскости, параллельные yOz , через точки $(x, 0, 0)$ и $(x + dx, 0, 0)$.

В результате мы получили бесконечно малый элемент объема dV – параллелепипед со сторонами dx , dy , dz , параллельными соответствующим осям координат. Понятно, что

$$dV = dx dy dz \quad (2.5)$$

и тройной интеграл (2.4) теперь можно записать в виде

$$I = \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz. \quad (2.6)$$

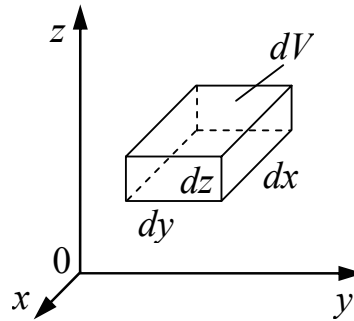


Рис. 2.1

Чтобы установить правило вычисления тройного интеграла, предположим, что функция $f(x, y, z)$ является плотность распределения массы. Тогда масса M тела есть:

$$M(T) = \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz. \quad (2.7)$$

Подсчитаем теперь массу по-другому, в предположении, что тело имеет следующее специальное устройство (Стандартная ситуация 2.1): оно ограничено поверхностями $z = z_1(x, y)$ – снизу, $z = z_2(x, y)$ – сверху и цилиндрической поверхностью с боков (эта поверхность может вырождаться в линию).

Функции $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$ заданы в области D – проекции T на xOy . Каждая прямая, параллельная оси Oz и проходящая через внутреннюю точку проекции D , пересекает границу T в двух точках – точке входа на поверхности $z = z_1(x, y)$ и точке выхода на поверхности $z = z_2(x, y)$ (рис. 2.2). Очевидно, тело T можно рассматривать как «разность» двух цилиндров.

Далее возьмем бесконечно малый элемент площади dS на проекции D и подсчитаем массу узкого вертикального стержня, вырезанного в теле T цилиндрической поверхностью, у которой направляющей линией служит граница элемента dS , а образующие параллельны оси Oz . Считаем координаты x, y точек площади dS , а значит, и z точек нашего узкого столбика, постоянными (в силу малости размеров dS). Выделим на высоте z из нашего столбика элемент

длиной dz . Объем этого элемента есть $dS \cdot dz$, а масса есть $f(x, y, z)dSdz$.

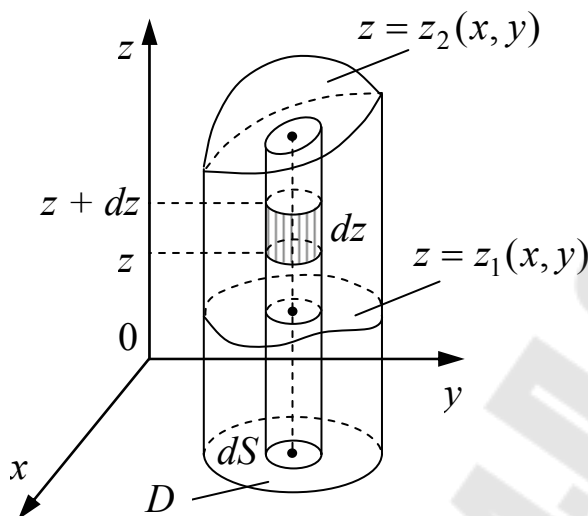


Рис. 2.2

Чтобы найти массу всего выделенного узкого столбика, надо «просуммировать» все такие элементы:

$$\int_{z=z_1(x,y)}^{z=z_2(x,y)} f(x, y, z)dSdz = dS \int_{z=z_1(x,y)}^{z=z_2(x,y)} f(x, y, z)dz .$$

Здесь интегрирование ведется по z от точки входа на поверхности $z = z_1(x, y)$ до точки выхода на поверхности $z = z_2(x, y)$. При выполнении этого интегрирования координаты x и y и элемент dS – постоянны.

Для того, чтобы определить массу всего тела T , нужно «просуммировать» массы всех узких столбиков, подобных, только что рассмотренному, и опирающихся на всевозможные элементы dS . Значит,

$$M(T) = \iint_D dS \int_{z=z_1(x,y)}^{z=z_2(x,y)} f(x, y, z)dz . \quad (2.8)$$

Сравнивая (2.7) и (2.8), получаем:

$$\iiint_T f(x, y, z)dx dy dz = \iint_D dS \int_{z=z_1(x,y)}^{z=z_2(x,y)} f(x, y, z)dz . \quad (2.9)$$

Сформулируем (2.9) в виде правила: чтобы вычислить тройной интеграл, интегрируем $f(x, y, z)$ по z от точки входа до точки выхода, считая x и y постоянными. Затем от полученного результата берем двойной интеграл по проекции тела T на плоскость xOy .

Итог сказанному подводит

Теорема 2.3. Пусть функция $f(x, y, z)$ определена в области $T = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$, где $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ – непрерывные функции в квадратуемой области D (рис. 2.2) и пусть

1°. Существует тройной интеграл

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz.$$

2°. $\forall (x, y) \in D$ существует определенный интеграл

$$I(x, y) = \int_{z=z_1(x, y)}^{z=z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Тогда существует двойной интеграл

$$\iint_D I(x, y) dx dy = \iint_D dx dy \int_{z=z_1(x, y)}^{z=z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

(он называется повторным) и справедливо равенство (2.9):

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dS \int_{z=z_1(x, y)}^{z=z_2(x, y)} f(x, y, z) dz,$$

т. е. тройной интеграл равен повторному.

Замечание 2.1

Если область D является y -трапециевидной, т. е.

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\},$$

то двойной интеграл $\iint_D I(x, y) dx dy$, в свою очередь, можно свести к повторному:

$$\iint_D I(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} I(x, y) dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (2.10)$$

Значит, вычисление тройного интеграла сводится в этом случае к последовательному вычислению трех определенных (однократных) интегралов.

Замечание 2.2

Если тело T ограничено поверхностями $x = x_1(y, z)$ и $x = x_2(y, z)$ и цилиндрической поверхностью с образующими параллельными оси Ox (Стандартная ситуация 2.2), то в формуле (2.9) внутреннее интегрирование ведется по x , а двойной интеграл берется по проекции тела на плоскость yOz . Аналогично следует поступать, если тело ограничено поверхностями $y = y_1(x, z)$ и $y = y_2(x, z)$ и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oy (Стандартная ситуация 2.3).

Пример 2.1. Вычислить интеграл $I_1 = \iiint_T (x + y + z) dx dy dz$, где T – область, ограниченная поверхностями: $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

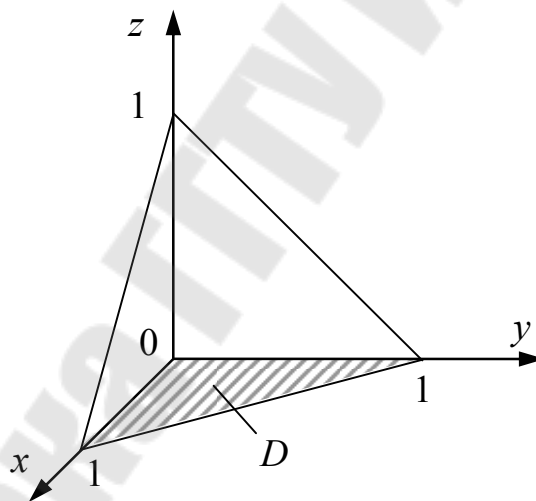


Рис. 2.3

Решение

Прежде всего необходимо распознать поверхности, являющиеся границами области интегрирования. Сразу понятно, что это плоскости, ибо все переменные в них присутствуют в первой степени. Очевидно, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ – координатные плоскости. А если мы при-

помним, что $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ есть уравнение плоскости в отрезках по осям (см. курс аналитической геометрии), то ясно, что $x + y + z = 1$ есть

плоскость, отсекающая на осях координат отрезки длиной 1 (рис. 2.3).
Остается применить формулу (2.9) (а можно даже сразу (2.10)):

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \iint_D dS \int_{z=0}^{z=1-x-y} (x+y+z) dz = \iint_D dx dy \left[xz + yz + \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} = \\
 &= \iint_D dx dy \left[x(1-x-y) + y(1-x-y) + \frac{(1-x-y)^2}{2} \right] = \\
 &= \iint_D \left[x - x^2 - xy + y - xy - y^2 + \frac{(x+y-1)^2}{2} \right] dx dy = \\
 &= \iint_D \left[(x+y) - (x+y)^2 + \frac{(x+y-1)^2}{2} \right] dx dy = \\
 &= \int_0^1 dx \int_{y=0}^{1-x} \left[x+y - (x+y)^2 + \frac{(x+y-1)^2}{2} \right] dy = \\
 &= \int_0^1 dx \left[xy + \frac{y^2}{2} - \frac{(x+y)^3}{3} + \frac{(x+y-1)^3}{6} \right]_{y=0}^{y=1-x} = \\
 &= \int_0^1 \left[x - x^2 + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{1}{3} + 0 - 0 - 0 + \frac{x^3}{3} - \frac{(x-1)^3}{6} \right] dx = \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{(x-1)^3}{6} - \frac{x}{3} + \frac{x^4}{12} - \frac{(x-1)^4}{24} \right]_0^1 = \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - 0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{12-8-8+2+4+1}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

Post Scriptum. Как заметил А. А. Бабич (доцент кафедры «Высшая математика» ГГТУ им. П. О. Сухого), вычисления можно несколько упростить:

$$(x+y) - (x+y)^2 + \frac{(x+y)^2}{2} - (x+y) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} [1 - (x+y)^2].$$

Далее

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[y - \frac{(x+y)^3}{3} \right] \Big|_0^{1-x} = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[1 - x - \frac{1}{3} + \frac{x^3}{3} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

Примечание 2.1. На первых порах можно порекомендовать при двойном интегрировании на отдельном рисунке изображать область D (рис. 2.4). Но при наличии определенного опыта все это можно проделывать умозрительно как мы и поступили в примере 2.1.

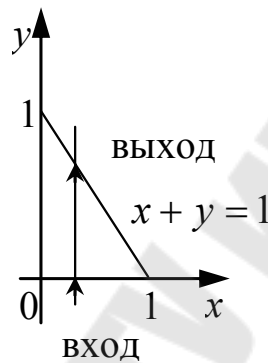


Рис. 2.4

Пример 2.2. Вычислить интеграл $I_2 = \iiint_T \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3}$, где T – область, ограниченная поверхностями: $x+z=3$, $y=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Решение

Как и в предыдущем примере все поверхности, ограничивающие тело T , – плоскости, а именно:

- а) $x+z=3$ есть плоскость, параллельная оси Oy , ибо данное уравнение не содержит (явно) переменную y ;
- б) $y=2$ есть плоскость, параллельная плоскости xOz ;
- в) $x=0$, $y=0$, $z=0$ – координатные плоскости.

Теперь уже область T представить достаточно легко – это прямая треугольная призма, основаниями которой служат прямоугольные треугольники AOB и $A'O'B'$ (рис. 2.5).

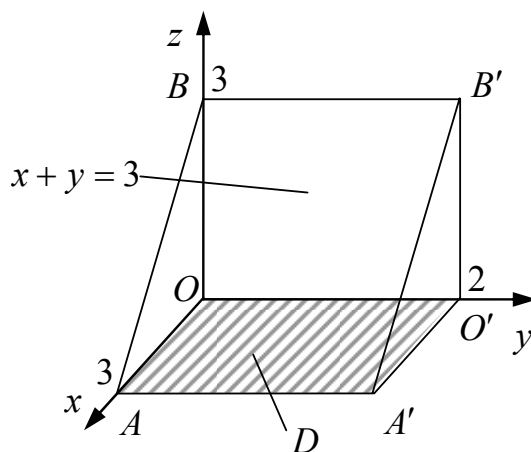


Рис. 2.5

Имеем:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \iint_D dx dy \int_{z=0}^{z=3-x} (x+y+z+1)^{-3} dz = \iint_D dx dy \left[\frac{(x+y+z+1)^{-2}}{-2} \right]_{z=0}^{z=3-x} = \\
 &= -\frac{1}{2} \iint_D dx dy [(y+4)^{-2} - (x+y+1)^{-2}] = \frac{1}{2} \iint_D [(x+y+1)^{-2} - (y+4)^{-2}] dx dy = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^3 dx \int_0^2 [(x+y+1)^{-2} - (y+4)^{-2}] dy = \frac{1}{2} \int_0^3 dx \left[\frac{(x+y+1)^{-1}}{-1} - \frac{(y+4)^{-1}}{-1} \right]_0^2 = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^3 \left[\frac{1}{y+4} - \frac{1}{x+y+1} \right]_{y=0}^{y=2} dx = \frac{1}{2} \int_0^3 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^3 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{12} \right) dx = \frac{1}{2} \left[\ln |x+1| - \ln |x+3| - \frac{x}{12} \right]_0^3 = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\ln \left| \frac{x+1}{x+3} \right| - \frac{x}{12} \right] = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{4}{6} - \frac{3}{12} - \ln \frac{1}{3} - 0 \right) = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{2}{3} - \ln \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{2}{3} : \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{1}{4} \right) = \frac{4 \ln 2 - 1}{8}.
 \end{aligned}$$

Примечание 2.2. Поскольку тело T можно рассматривать как цилиндр, образующие которого параллельны оси Oy (стандартная ситуация 2.3), то возможно и такое сведение тройного интеграла к повторному:

$$I_2 = \iint_{D_{xz}} dS \int_{y=0}^{y=2} dy = \int_0^3 dx \int_{z=0}^{z=3-x} dz \int_{y=0}^{y=2} dy.$$

А дальше – самостоятельно!

Пример 2.3

Вычислить интеграл: $I_3 = \iiint_T xy dx dy dz$, где T – ограниченная поверхностями: $z = xy$, $x + y = 1$, $z = 0$ ($z \geq 0$).

Решение

То, что $x + y = 1$ есть плоскость, параллельная оси Oz и что $z = 0$ – координатная плоскость xOy , по-видимому, очевидно. А вот что «скрывается» за уравнением $z = xy$? Конечно, это поверхность второго порядка, но в перечне поверхностей второго порядка (например, Выготский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выготский. – Москва : Наука физ.-мат., 1966. – С. 217–218) ее нет. Как быть?

В полном объеме ответ на этот вопрос дается в курсе аналитической геометрии в теме «Общая теория поверхностей второго порядка». А здесь мы ограничимся малым: введем новые переменные u , v

по формулам: $\begin{cases} x = u - v \\ y = u + v \end{cases}$. Тогда будем иметь:

$$z = xy \Rightarrow z = (u - v)(u + v) = u^2 - v^2 \Rightarrow z = u^2 - v^2.$$

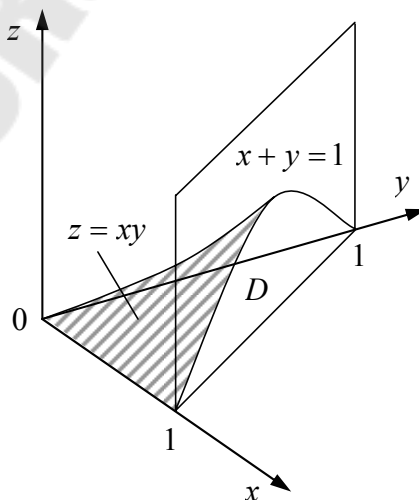


Рис. 2.6

А эта поверхность уже есть в перечне, а именно – это гиперболический параболоид, называемый также «седлом». Итак, мы свое любопытство (точнее, любознательность) удовлетворили и можно, не опасаясь, делать рисунок. А далее без особых проблем сводим наш интеграл к повторному:

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \iint_D dx dy \int_{z=0}^{z=xy} xy dz = \iint_D xy dx dy \int_{z=0}^{z=xy} dz = \\
 &= \iint_D (xy)^2 dx dy = \int_0^1 x^2 dx \int_{y=0}^{y=1-x} y^2 dy = \\
 &= \int_0^1 x^2 dx \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1-x} = \frac{1}{3} \int_0^1 x^2 (1-x)^3 dx = \frac{1}{3} \int_0^1 x^2 (1-3x+3x^2-x^3) dx = \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^1 (x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5) dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} + \frac{3x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{3 \cdot 60} (20 - 45 + 36 - 10) = \frac{1}{180}.
 \end{aligned}$$

Пример 2.4

Вычислить интеграл $I_4 = \iiint_T xy \sqrt{z} dx dy dz$, где T – область, ограниченная поверхностями: $z = 0$, $z = y$, $y = x^2$, $y = 1$.

Решение

Прежде всего необходимо определиться с поверхностями:

- а) $z = 0$ – плоскость xOy ;
- б) $z = y$ – плоскость, проходящая через ось Ox и делящая двугранный угол между плоскостями xOz и yOz пополам (такую плоскость называют биссектральной);
- в) $y = x^2$ – параболический цилиндр, образующие которого параллельны оси Oz ;
- г) $y = 1$ – плоскость, параллельная координатной плоскости xOz и отстоящая от нее на расстоянии 1.

Для улучшения видимости систему координат удобно расположить так же как на рис. 2.6 (рис. 2.7).

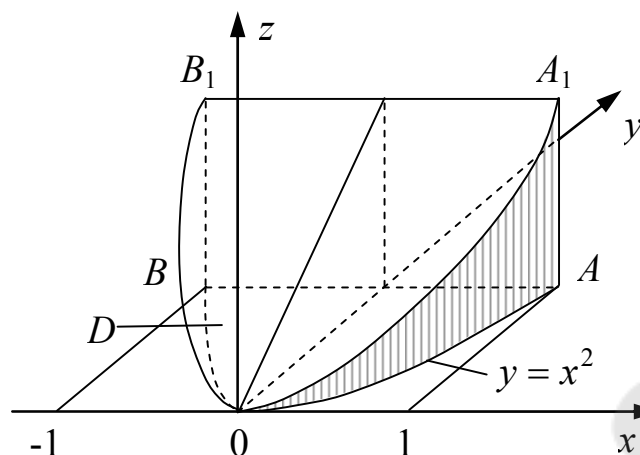


Рис. 2.7

Теперь имеем:

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \iint_D dx dy \int_{z=0}^{z=y} xy \sqrt{z} dz = \iint_D xy dx dy \int_{z=0}^{z=y} z^{\frac{1}{2}} dz = \\
 &= \iint_D xy dx dy \frac{2}{3} \left[z^{\frac{3}{2}} \right]_0^y = \frac{2}{3} \iint_D (xy dx dy) \cdot y^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \iint_D xy^{\frac{5}{2}} dx dy = \frac{2}{3} \int_{-1}^1 x dx \int_{y=x^2}^1 y^{\frac{5}{2}} dy = \\
 &= \frac{2}{3} \int_{-1}^1 x dx \cdot \frac{2}{7} \left[y^{\frac{7}{2}} \right]_{y=x^2}^{y=1} = \frac{4}{21} \int_{-1}^1 x dx \left[1 - (x^2)^{\frac{7}{2}} \right] = \frac{4}{21} \int_{-1}^1 x dx (1 - |x|^7) = \\
 &= \frac{4}{21} \int_{-1}^1 (x - x |x|^7) dx = \frac{4}{21} \left(\int_{-1}^1 x dx - \int_{-1}^0 x |x|^7 dx - \int_0^1 x |x|^7 dx \right) = \\
 &= \frac{4}{21} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^0 x^8 dx - \int_0^1 x^8 dx \right) = \frac{4}{21} \left(0 + \frac{x^9}{9} \Big|_{-1}^0 - \frac{x^9}{9} \Big|_0^1 \right) = \frac{4}{21} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Комментарий

1. В этом примере мы столкнулись с необходимостью применить формулу, которая является проклятием абитуриентов: $\sqrt{x^2} = |x|$. Действительно, $(x^2)^{\frac{7}{2}} = \sqrt{(x^2)^7} = (\sqrt{x^2})^7 = |x|^7$.

Затем наличие модуля принудило нас разбить отрезок интегрирования $[-1,1]$ на две части: $[-1,1] = [-1;0] \cup [0;1]$, что позволило на каждой из частей расписать $|x|^7$, а именно:

$$x \in [-1;0] \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow |x| = -x;$$

$$x \in [0;1] \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow |x| = x.$$

Остальное, по-видимому, понятно.

Кстати, вычисления можно существенно упростить, если заметить, что функция $x - x|x|^7 = x(1 - |x|^7)$ нечетная (как произведение нечетной и четной функций). И, следовательно, интеграл от нее по симметричному промежутку равен нулю.

2. Отдадим дань некоторому формализму. Область T аналитически можно записать так: $T = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq y\}$, где $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$.

А сейчас немного «лирики».

Область D есть, очевидно, параболический сегмент AOB (рис. 2.8). А вся область T – цилиндрическое «копыто».

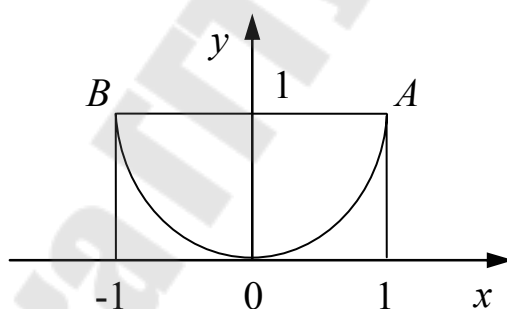


Рис. 2.8

Пример 2.5. Вычислить интеграл $I_5 = \iiint_T z dx dy dz$, где T – область, ограниченная поверхностями: $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$, ($z \geq 0$) и $x^2 + y^2 = R^2$ ($h, R > 0$).

Решение

Заглянем опять в справочник М. Я. Выготского. Поверхность под номером 4 из перечня поверхностей 2-го порядка очень напоми-

нает нашу: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ – это конус второго порядка. Значит, и наша поверхность есть конус второго порядка $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2) \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{R}{h}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{R}{h}\right)^2} - z^2 = 0$.

Вторая же поверхность $x^2 + y^2 = R^2$ есть цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны оси Oz .

Изобразить теперь тело T не составляет никакого труда (рис. 2.9). Далее имеем:

$$I_5 = \iint_D dx dy \int_{z=0}^{z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}} z dz = \iint_D dx dy \cdot \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_D \frac{h^2}{R^2} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{h^2}{2R^2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy.$$

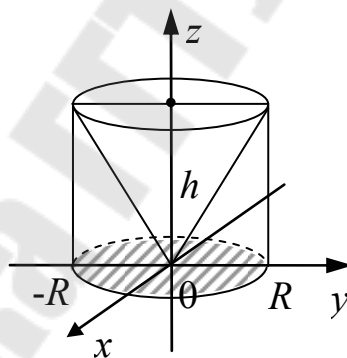


Рис. 2.9

Найдем теперь линию пересечения наших поверхностей. Для этого нам придется решить систему

$$\begin{cases} z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2) \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow z^2 = \frac{h^2}{R^2} \cdot R^2 = h^2 \Rightarrow h^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2) \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2.$$

А это – окружность с центром в точке $O(0,0)$ и радиуса R . Следовательно, проекцией тела T на плоскость xOy служит круг радиуса R

с центром в начале координат. К тому же подынтегральная функция есть сумма квадратов переменных: $x^2 + y^2$. Как мы уже подчеркивали в разделе 1.7, именно в такой ситуации очень удобно применять полярные координаты.

Действительно, $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi \Rightarrow$

- 1) $x^2 + y^2 = \rho^2$;
- 2) $x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow \rho^2 = R^2 \Rightarrow \rho = R$;
- 3) якобиан преобразования $|J| = \rho$.

Значит,

$$\begin{aligned} I_5 &= \frac{h^2}{2R^2} \iint_D \rho^2 \rho d\rho d\varphi = \frac{h^2}{2R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{h^2}{2R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^R = \\ &= \frac{h^2}{2R^2} \cdot \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{h^2 R^2}{8} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi h^2 R^2}{8} = \frac{\pi h^2 R^2}{4}. \end{aligned}$$

Замечание 2.3

Практически, при вычислении этого интеграла мы в неявном виде столкнулись с цилиндрическими координатами. (Более подробно о них поговорим попозже).

2.4. Второе правило вычисления тройного интеграла

В некоторых ситуациях удобнее вместо формулы (2.9) применять другое сведение тройного интеграла к двойному и однократному.

Пусть функция $f(x, y, z)$ определена и ограничена в области T , которая заключена между плоскостями $z = a$ и $z = b$, причем каждое сечение области T $z = \text{const}$ ($a \leq z \leq b$) представляет собой квадрируемую фигуру (Стандартная ситуация 2.4). Проведем сечение D_z тела T плоскостью, параллельной координатной плоскости xOy на высоте z и рассмотрим бесконечно узкий слой между этим сечением и сечением, ему параллельным и отстоящим от него на расстоянии dz (рис. 2.10). Этот слой можно приближенно считать цилиндром с основанием D_z . Выделим элемент dS на D_z и подсчитаем массу верти-

кального столбика, опирающегося на dS , имеющего высоту dz . Эта масса будет равна

$$f(x, y, z)dSdz.$$

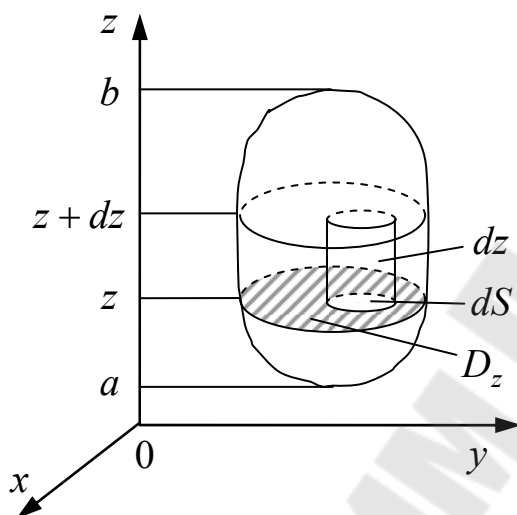


Рис. 2.10

Масса всего нашего слоя будет выражаться интегралом

$$\iint_{D_z} f(x, y, z)dSdz = \left(\iint_{D_z} f(x, y, z)dS \right) dz$$

(При этом интегрировании z и dz постоянны). Наконец, чтобы вычислить всю массу тела T , надо просуммировать массы всех бесконечно тонких слоев:

$$M(T) = \int_a^b \left(\iint_{D_z} f(x, y, z)dS \right) dz = \int_a^b dz \iint_{D_z} f(x, y, z)dS. \quad (2.11)$$

Сформулируем полученный результат в виде правила:

Чтобы вычислить тройной интеграл надо при произвольном, но фиксированном z , взять двойной интеграл по сечению D_z на высоте z , а затем полученный результат проинтегрировать по z в пределах его наибольшего изменения.

А теперь приведем соответствующую теорему существования равенства (2.11).

Теорема 2.4. Пусть

1°. Существует тройной интеграл

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz.$$

2°. $\forall z \in [a, b]$ существует двойной интеграл

$$I(z) = \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy.$$

Тогда существует определенный интеграл

$$\int_a^b I(z) dz = \int_a^b dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$$

(он называется повторным) и справедливо равенство (2.11), т. е.

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy.$$

Пример 2.6. Найти объем эллипсоида: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

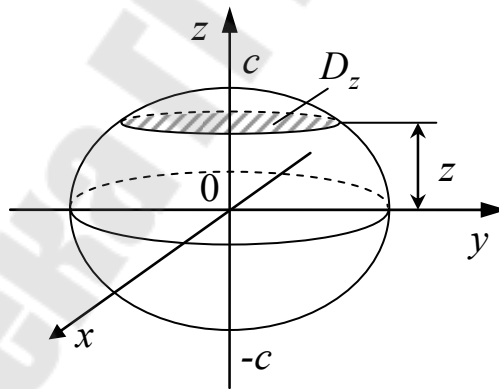


Рис. 2.11

Решение

Имеем:

$$V = \iiint_T 1 \cdot dV = 2 \int_0^c dz \iint_{D_z} dS, \text{ но } \iint_{D_z} 1 \cdot dS \text{ есть не что иное, как пло-}$$

щадь фигуры, ограниченной эллипсом, по которому плоскость $z = \text{const}$ пересекает эллипсоид. Ранее мы установили (см. раздел 1.9,

пример 1.17), что площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, равна πab . Поэтому $S(D_z) = \pi a_z b_z$, где a_z и b_z находим из уравнения эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}\right)^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a_z = a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}, \\ b_z = b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$S(D_z) = \pi a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \cdot b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} = \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) = \frac{\pi ab}{c^2} (c^2 - z^2).$$

Окончательно получаем

$$V = 2 \int_0^c \frac{\pi ab}{c^2} (c^2 - z^2) dz = \frac{2\pi ab}{c^2} \left[c^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_0^c = \frac{2\pi ab}{c^2} \left(c^3 - \frac{c^3}{3} \right) =$$

$$= \frac{2\pi ab}{c^2} \cdot \frac{2}{3} c^3 = \frac{4\pi abc}{3}.$$

Примечание 2.3

1. Для упрощения вычислений мы воспользовались симметрией эллипсоида относительно плоскости $z = 0$.

2. В частности, когда $a = b = c = R$ и эллипсоид становится шаром, получаем известную формулу объема шара: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

Пример 2.7. Вычислить интеграл $I_7 = \iiint_T (x^2 + y^2) dx dy dz$,

где T – конус, размеры которого показаны на рис. 2.12.

Решение

В этом примере опять удобно применить второе правило:

$$\begin{aligned}
I_7 &= \int_0^H dz \iint_{D_z} (x^2 + y^2) dS = \\
&= \int_0^H dz \iint_{D'_z} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\varphi = \int_0^H dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{R(H-z)}{H}} \rho^3 d\rho = \int_0^H dz \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\frac{R(H-z)}{H}} = \\
&= \frac{1}{4} \int_0^H \frac{R^4}{H^4} (H-z)^4 dz \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi R^4}{4H^4} \int_0^H (H-z)^4 dz = \\
&= -\frac{\pi R^4}{2H^4} \int_0^H (H-z)^4 d(H-z) = -\frac{\pi R^4}{2H^4} \frac{(H-z)^5}{5} \Big|_0^H = -\frac{\pi R^4}{10H^4} (0 - H^5) = \\
&= \frac{\pi R^4 H}{10}.
\end{aligned}$$

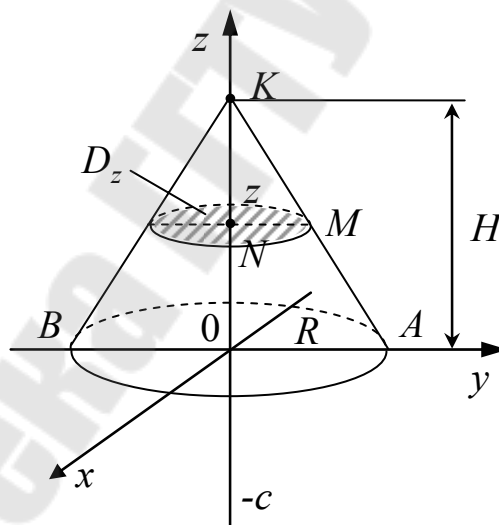


Рис. 2.12

Комментарий

1. В двойном интеграле $\iint_{D_z} (x^2 + y^2) dS$ мы перешли к полярным координатам.

2. Радиус окружности, по которой плоскость $z = \text{const}$ пересекает поверхность конуса, находим из подобия треугольников:

$\triangle KNM \sim \triangle KOA$ (они прямоугольные и имеют общий угол OKA). Откуда, $\frac{NM}{KN} = \frac{OA}{KO} \Rightarrow NM = \frac{OA \cdot KN}{KO} = \frac{R(H-z)}{H}$.

3. Если считать, что конус T – однородное тело с плотностью $\rho = 1$, то мы, фактически, нашли момент инерции конуса относительно оси Oz .

2.5. Тройной интеграл в криволинейных координатах: общий случай замены переменных

Если при изучении двойного интеграла мы шли от частного к общему (т. е. индуктивным путем), то здесь мы уже применим дедуктивный подход (т. е. пойдём от общего к частному).

А. Замена переменных в тройном интеграле.

Подобно случаю двойного интеграла идея замены переменных в тройном интеграле $\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz$ состоит в переходе от переменных x, y, z к новым переменным u, v, w по формулам

$$x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \chi(u, v, w), \quad (2.12)$$

где $u, v, w \in \tau$.

При этом каждая точка (x, y, z) области T соответствует по формулам (2.12) некоторой точке (u, v, w) области τ , а каждая точка (u, v, w) области τ переходит в некоторую точку (x, y, z) области T . Иными словами, когда точка (u, v, w) «пробегает» область τ , соответствующая ей точка $(x, y, z) = (\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w))$ «пробегает» область T .

Функции (2.12) называют также отображением области τ пространства (u, v, w) на область T пространства (x, y, z) . Используется еще и следующая терминология: область T называют образом области τ , а область τ – прообразом области T при отображении (2.12).

Теорема 2.5. Пусть T и τ – замкнутые кубируемые области, функция $f(x, y, z)$ ограничена в области T и непрерывна всюду, кроме, быть может, некоторого множества точек объема нуль. Допустим далее, что отображение (2.12) удовлетворяет следующим условиям:

1°. Оно взаимно однозначно.

2°. Функции $\varphi(u, v, w)$, $\psi(u, v, w)$, $\chi(u, v, w)$ имеют в области τ непрерывные частные производные первого порядка.

3°. Якобиан отображения $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$ отличен от

нуля в области τ .

Тогда справедливо равенство (формула замены переменных в тройном интеграле):

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_\tau f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) \cdot \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| du dv dw. \quad (2.13)$$

Замечание 2.4

Формула (2.13) остается справедливой, если условия 1° или 3° нарушаются на множестве точек объема нуль.

Б. Криволинейные координаты.

Формулы (2.12) можно интерпретировать как формулы перехода к новым, криволинейным координатам (u, v, w) в области T . Поверхности $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $w = \text{const}$ представляют собой координатные поверхности (вообще говоря, криволинейные) в пространстве (x, y, z) . Кривые, на которых две криволинейные координаты имеют постоянные значения, и изменяется только одна из координат, представляют собой координатные линии.

Приведем два примера наиболее употребительных криволинейных координат.

1. Цилиндрические координаты

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка в пространстве (x, y, z) , а M' – ее проекция на плоскость (x, y) (рис. 2.13). Положение точки M однозначно задается тройкой чисел (ρ, φ, z) , где (ρ, φ) – полярные координаты точки M' на плоскости (x, y) , а z – аппликата точки M .

Тройка чисел (ρ, φ, z) носит название *цилиндрических координат* точки M .

Связь между прямоугольными и цилиндрическими координатами точки M вполне понятна:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z \quad (2.14)$$

$$(0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty).$$

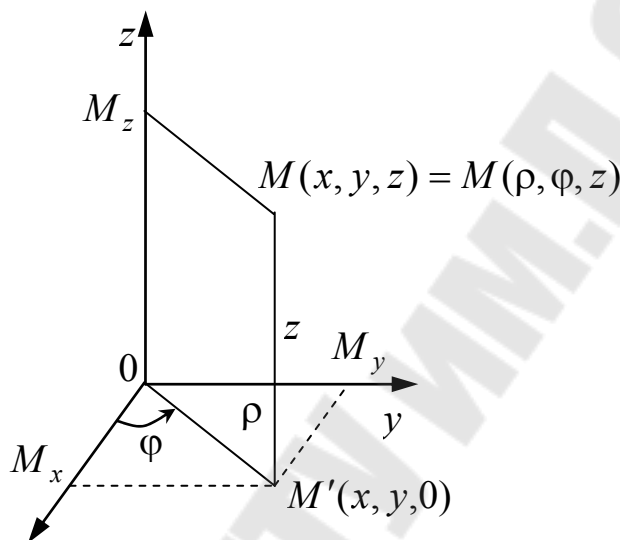


Рис. 2.13

Примечание 2.4. Иногда для φ берется такой промежуток изменения: $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Легко подсчитать, что якобиан отображения (2.14) равен ρ . (Рекомендуем сделать это самостоятельно).

Координатная поверхность $\rho = \text{const}$ представляет собой цилиндрическую поверхность – отсюда, естественно, и название координат.

Примечание 2.5. Мы пользуемся фактически цилиндрическими координатами при вычислении тройных интегралов, когда выполняя вычисление по первому из правил (см. формулу (2.9) из раздела 2.3), после интегрирования по z мы переходим в получившемся двойном интеграле к полярным координатам (см. пример 2.5 из раздела 2.3). Тем не менее, в некоторых ситуациях удобно сразу заменять тройной интеграл на три однократных (по аналогии с формулой (2.10) из раздела 2.3).

Пример 2.8. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ ($z > 0$), если плотность в каждой точке равна сумме квадратов координат точки.

Решение

Прежде всего «разберемся» с поверхностями, а именно:
 $x^2 + y^2 = 2z \Rightarrow z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ есть эллиптический параболоид (и даже – параболоид вращения). Очевидно, (см. любой учебник по аналитической геометрии), что он проходит через начало координат и для него $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \geq 0$.

Далее $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ есть сфера с центром в начале координат и радиуса $\sqrt{3}$. И поскольку по условию для нее $z > 0$, то это – верхняя ее половинка. Теперь уже, конечно, чертеж очевиден (рис. 2.14).

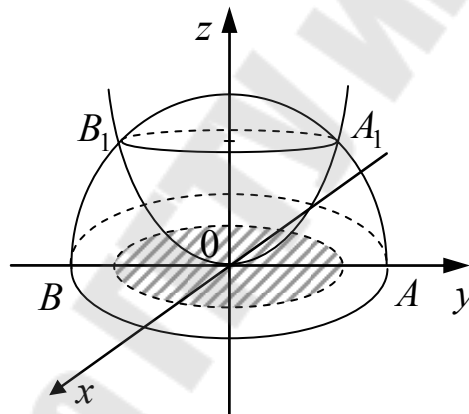


Рис. 2.14

Найдем линию пересечения данных поверхностей. Для этого решим совместно систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2z, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3, \end{cases} \Rightarrow z^2 + 2z - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 1, \\ z = -3, \\ z > 0, \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} z = 1, \\ x^2 + y^2 = 2z, \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2.$$

Значит, линией пересечения служит окружность с центром на оси Oz и радиуса $\sqrt{2}$, а проекцией нашего тела на плоскость xOy будет круг с центром в начале координат и радиуса $\sqrt{2}$.

Теперь уже можно приступить непосредственно к ответу на вопрос задачи:

$$M(T) = \iiint_T \rho(x, y, z) dV = \iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

Переходя к цилиндрическим координатам, получаем

$$\begin{aligned} M(T) &= \iiint_T (\rho^2 + z^2) \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho \int_{z=\frac{\rho^2}{2}}^{z=\sqrt{3-\rho^2}} (\rho^2 + z^2) dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho \left[\rho^2 z + \frac{z^3}{3} \right]_{z=\frac{\rho^2}{2}}^{z=\sqrt{3-\rho^2}} = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho \left[\rho^2 \sqrt{3-\rho^2} + \frac{(3-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho^4}{2} - \frac{\rho^6}{24} \right] = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \rho \cdot \rho^2 \sqrt{3-\rho^2} d\rho + \frac{2\pi}{3} \int_0^{\sqrt{2}} (3-\rho^2)^{\frac{3}{2}} \rho d\rho - \\ &\quad - \frac{2\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \rho^5 d\rho - \frac{2\pi}{24} \int_0^{\sqrt{2}} \rho^7 d\rho = \frac{2\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 (3-\rho^2)^{\frac{1}{2}} d\rho^2 - \\ &\quad - \frac{2\pi}{2 \cdot 3} \int_0^{\sqrt{2}} (3-\rho^2)^{\frac{3}{2}} d(3-\rho^2) - \left[\pi \frac{\rho^6}{6} \right]_0^{\sqrt{2}} - \left[\frac{\pi}{12} \frac{\rho^8}{8} \right]_0^{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Дальнейшие вычисления удобно осуществлять поэтапно:

1) прежде всего займемся «хвостиком»:

$$\begin{aligned} \left. \pi \frac{\rho^6}{6} \right|_0^{\sqrt{2}} - \left. \frac{\pi}{12} \cdot \frac{\rho^8}{8} \right|_0^{\sqrt{2}} &= -\frac{\pi(\sqrt{2})^6}{6} - \frac{\pi(\sqrt{2})^8}{12 \cdot 8} = -\frac{\pi \cdot 8}{6} - \frac{\pi \cdot 16}{12 \cdot 8} = \\ &= -\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{-8\pi - \pi}{6} = -\frac{3\pi}{2}; \end{aligned}$$

2) далее легко вычислим более простой из двух интегралов:

$$-\frac{2\pi}{2 \cdot 3} \int_0^{\sqrt{2}} (3 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} d(3 - \rho^2) = -\frac{\pi}{3} \cdot \frac{2}{5} (3 - \rho^2)^{\frac{5}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} = -\frac{2\pi}{15} \left[(3 - 2)^{\frac{5}{2}} - 3^{\frac{5}{2}} \right] =$$

$$= \frac{2\pi}{15} (3^{\frac{5}{2}} - 1) = \frac{2\pi}{15} (9\sqrt{3} - 1);$$

3) остается преодолеть последнее препятствие

$$\pi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 (3 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} d\rho^2 = N.$$

Очевидно, что вычисление этого интеграла легко осуществить, если воспользоваться следующим «шаблоном»:

$$\int x \sqrt{a - x} dx = \frac{2}{5} (a - x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2a}{3} (a - x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

(Эту формулу легко вывести с помощью замены переменной $\sqrt{a - x} = t$).

Имеем теперь:

$$N = \pi \left[\frac{2}{5} (3 - \rho^2)^{\frac{5}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} - 2(3 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} \right] = \pi \left[\frac{2}{5} (1^{\frac{5}{2}} - 3^{\frac{5}{2}}) - 2(1^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}}) \right] =$$

$$= \frac{2\pi}{5} (1 - 3^{\frac{5}{2}} - 5 + 5 \cdot 3^{\frac{3}{2}}) = \frac{2\pi}{5} (-4 + 3^{\frac{3}{2}}(5 - 3)) = \frac{2\pi}{5} (-4 + 3^{\frac{3}{2}} \cdot 2) =$$

$$= \frac{4\pi}{5} (3^{\frac{3}{2}} - 2) = \frac{4\pi}{5} (3\sqrt{3} - 2).$$

Складывая все полученное, находим:

$$M(T) = \pi \left[-\frac{3}{2} + \frac{2}{15} (9\sqrt{3} - 1) + \frac{4}{5} (3\sqrt{3} - 2) \right] = \frac{\pi}{30} (-45 + 36\sqrt{3} - 4 +$$

$$+ 24 \cdot 3\sqrt{3} - 48) = \frac{\pi}{30} (108\sqrt{3} - 97).$$

Замечание 2.5

Прокомментируем расстановку пределов при сведении тройного интеграла к трем однократным:

а) то, что $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, вопросов не вызывает;

б) далее, уравнение окружности $x^2 + y^2 = 2$ в полярной системе координат суть: $\rho = \sqrt{2}$;

в) уравнение параболоида $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$ в цилиндрических координатах переписывается так: $z = \frac{\rho^2}{2}$;

г) уравнение верхней части сферы ($z > 0$) в цилиндрических координатах принимает вид: $\rho^2 + z^2 = 3 \Rightarrow z = \sqrt{3 - \rho^2}$;

д) остается подчеркнуть, что «вход» в тело T находится на поверхности параболоида, а «выход» – на поверхности сферы.

II. Сферические координаты

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка в пространстве (x, y, z) , а M' – проекция точки M на плоскость (x, y) (рис. 2.15). Положение точки M однозначно задается тройкой чисел (r, θ, φ) , где r – расстояние точки M от точки $O(0,0,0)$; θ – угол между лучами OM и Oz ; φ – полярный угол точки M' на плоскости (x, y) . Тройка чисел (r, θ, φ) называется *сферическими координатами* точки M .

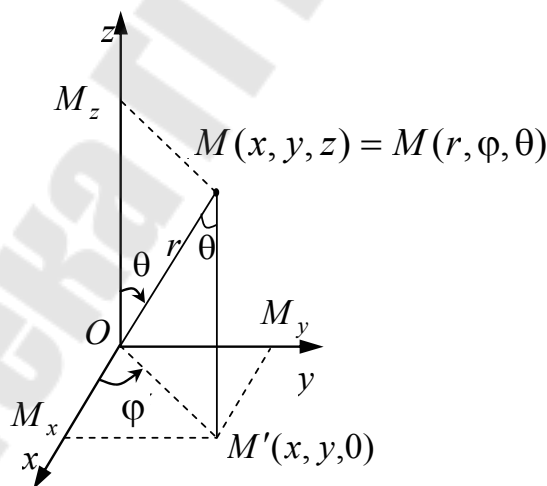


Рис. 2.15

Установим связь между прямоугольными и сферическими координатами.

Из прямоугольного треугольника OM_zM находим:

$$z = OM_z = r \cos \theta; \quad M_zM = r \sin \theta = OM'.$$

Далее из прямоугольного треугольника M_xOM' получаем:

$$x = OM_x = OM' \cos \varphi = r \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y = OM_y = M_xM' = OM' \sin \varphi = r \sin \theta \sin \varphi.$$

Итак,

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta. \quad (2.15)$$

Примечание 2.6. Иногда в качестве угла θ берется угол между лучами OM и OM' со знаком плюс, если $z > 0$, и со знаком минус, если $z < 0$. В этом случае $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а в формулах (2.15) надо заменить $\sin \theta$ на $\cos \theta$, а $\cos \theta$ на $\sin \theta$.

Подсчитаем якобиан преобразования

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -r \sin \theta \sin \varphi \begin{vmatrix} \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta \end{vmatrix} - \\ &- r \sin \theta \cos \varphi \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta \end{vmatrix} = \\ &= -r \sin \theta [\sin \varphi (-r \sin^2 \theta \sin \varphi - r \cos^2 \theta \sin \varphi) + \\ &+ \cos \varphi (-r \sin^2 \theta \cos \varphi - r \cos^2 \theta \cos \varphi)] = r \sin \theta (r \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \\ &+ r \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + r \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r \cos^2 \theta \cos^2 \varphi) = \\ &= r \sin \theta (r \sin^2 \varphi + r \cos^2 \varphi) = r^2 \sin \theta. \quad (2.16) \end{aligned}$$

(Мы разложили определитель третьего порядка по элементам последнего столбца).

Координатная поверхность $r = \text{const} > 0$ представляет собой сферу, отсюда – название «сферические координаты».

Пример 2.9. Вычислить интеграл $I_9 = \iiint_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$,

где T – область, ограниченная поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = x$.

Решение

Прежде всего преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + z^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}.$$

Значит, тело T – шар с центром в точке $\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ и радиуса $\frac{1}{2}$.

А раз так, то удобно перейти к сферическим координатам (см. (2.15) и (2.16)), предварительно сделав чертеж. С целью наглядности оси системы координат расположены так, как показано на рис. 2.16.

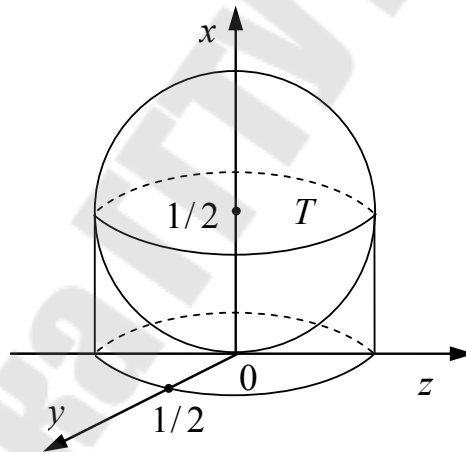


Рис. 2.16

А теперь нам придется подсчитать сумму квадратов переменных, ибо именно это выражение входит в состав подынтегральной функции. Имеем из (2.15):

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta = \\ &= r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 \cos^2 \theta = r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta = \\ &= r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = r^2. \end{aligned}$$

И это соотношение полезно запомнить, т. к. оно часто встречается. Итак,

$$I_9 = \iiint_{\tau} \sqrt{r^2} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \iiint_{\tau} r^3 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\sin \theta \cos \varphi} r^3 \sin \theta dr.$$

Комментарий. 1. Границы изменения для переменной r устанавливаются с помощью следующих простейших манипуляций: запишем уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = x$ в сферических координатах:

$$r^2 = r \sin \theta \cos \varphi \Rightarrow \begin{cases} r = 0, \\ r = \sin \theta \cos \varphi. \end{cases}$$

А то, что изменение r начинается с нуля, по-видимому, очевидно.

2. Чтобы понять, как изменяется угол φ , достаточно пересечь наш шар плоскостью $z = 0$ и оценить, что окружность $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ в плоскости xOy , проходя через начало координат,

лежит справа от оси Oy , касаясь ее (рис. 2.17), а значит, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

(Впрочем, с этой ситуацией мы не раз сталкивались при вычислении двойных интегралов в полярных координатах (стандартная ситуация 1.5)).

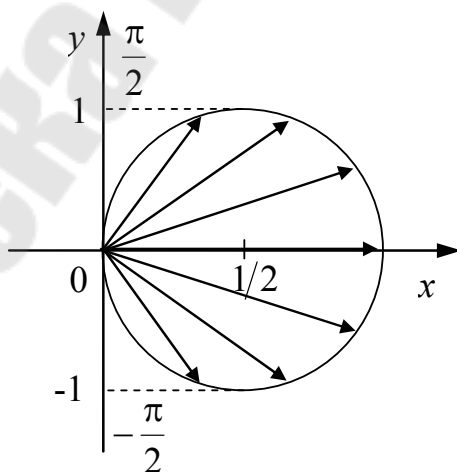


Рис. 2.17

3. Переменные y, z входят в уравнение сферы симметрично, но границы для θ не те, что для φ , а именно: $0 \leq \theta \leq \pi$.

Теперь остается самая малость:

$$I_9 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{\sin \theta \cos \varphi} r^3 dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{\sin \theta \cos \varphi} =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^5 \theta \cos^4 \varphi d\theta = \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi \int_0^{\pi} \sin^5 \theta d\theta.$$

Далее воспользуемся двумя «шаблонами» (Воднев, В. Т. Основные математические формулы : справочник / В. Т. Воднев, Н. Ф. Наумович. – Минск : Выш. шк., 1988. – С. 171):

$$1) \int \sin^5 x dx = -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C;$$

$$2) \int \cos^4 x dx = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$$

Теперь имеем:

$$I_9 = \frac{1}{4} \left[\frac{3\varphi}{8} + \frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{\sin 4\varphi}{32} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[-\cos \theta + \frac{2}{3} \cos^3 \theta - \frac{1}{5} \cos^5 \theta \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{3\pi}{8} \left[-(-1-1) + \frac{2}{3}(-1-1) - \frac{1}{5}(-1-1) \right] = -2 \left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5} \right) \cdot \frac{3\pi}{4 \cdot 8} =$$

$$= \frac{3\pi}{4 \cdot 8} \cdot \frac{16}{15} = \frac{\pi}{10}.$$

Комментарий. Покажем, как можно получить использованные шаблоны.

$$1. \int \sin^5 x dx = \int \sin^4 x \sin x dx = -\int (1 - \cos^2 x)^2 d(\cos x) = \dots$$

$$2. \int \cos^4 x dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx = \dots$$

Замечание 2.6 (второй способ)

Кроме наглядности рис. 2.16 включает в себе (при внимательном рассмотрении) идею другого решения: поменяем оси координат Ox и Oz не только формально (в смысле визуально), но и функционально, т. е. введем сферические координаты следующим образом:

$$z = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x = r \sin \theta \sin \varphi, \quad y = r \cos \theta. \quad (2.17)$$

Тогда переменная φ изменяется от нуля до 2π , а при каждом значении φ переменная θ изменяется от нуля до $\frac{\pi}{2}$. Подставляя выражения (2.17) в уравнение сферы, получим

$$r^2 = r \cos \theta \Rightarrow \begin{cases} r = 0, \\ r = \cos \theta, \end{cases}$$

и можно приступить к вычислению нашего интеграла:

$$\begin{aligned} I_9 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos \theta} r^3 \sin \theta dr = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta [r^4]_0^{\cos \theta} = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2\pi}{4} \cdot (-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d(\cos \theta) = -\frac{\pi}{2} \frac{\cos^5 \theta}{5} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= -\frac{\pi}{10} (0 - 1) = \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

Безусловно, «овчинка стоит выделки», ведь при таком способе введения координат вычисления существенно проще!

Замечание 2.7

В пространстве (r, θ, φ) прообраз τ тела определяется соотношениями:

$$\varphi \in [0; 2\pi], \quad \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad r \in [0; \cos \theta]$$

и поэтому выглядит так:

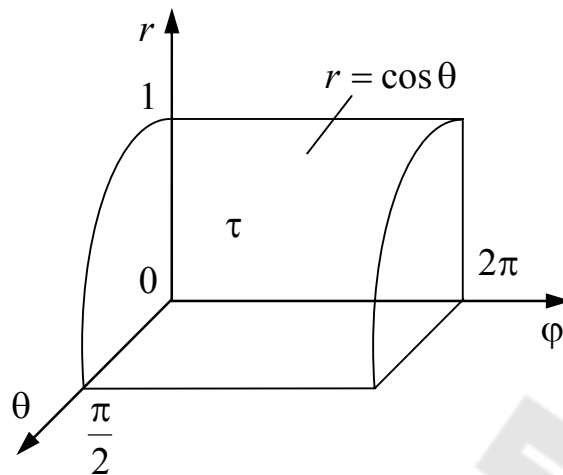


Рис. 2.18

Очевидно, $\begin{cases} \varphi = 0 \\ \varphi = 2\pi \end{cases}$ – это две параллельные плоскости, причем $\varphi = 0$ – это координатная плоскость (r, θ) .

Аналогично $\begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ – две параллельные плоскости, одна из которых координатная.

И, наконец, $r = \cos \theta$ – цилиндрическая поверхность, направляющей которой служит косинусоида $r = \cos \theta$, лежащая в плоскости (r, θ) , а образующие параллельны оси $O\varphi$.

Пример 2.10. Вычислить интеграл $I_{10} = \iiint_T (x^2 + y^2) dx dy dz$, где область T определяется неравенствами: $a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2$.

Решение

Уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ задают две (концентрические) сферы с центрами в начале координат и радиусов a и b ($a < b$) соответственно. Поэтому в рисунке необходимости никакой нет, и мы сразу перейдем к сферическим координатам по формулам (2.15). Предварительно подсчитаем сумму квадратов

$$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi = r^2 \sin^2 \theta.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}
 I_{10} &= \iiint_{\tau} r^2 \sin^2 \theta r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \int_a^b r^4 dr = \\
 &= -\frac{2\pi}{5} (b^5 - a^5) \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta) = -\frac{2\pi}{5} (b^5 - a^5) \left[\cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi} = \\
 &= -\frac{2\pi}{5} (b^5 - a^5) \cdot \left(-1 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} \right) = -\frac{2\pi}{5} (b^5 - a^5) \cdot \left(-\frac{4}{3} \right) = \frac{8\pi}{15} (b^5 - a^5).
 \end{aligned}$$

III. Обобщенные сферические координаты

Мы уже видели (раздел 1.9), насколько обобщенные полярные координаты бывают продуктивнее чем обычные. Аналогичную цель преследует и введение обобщенных сферических координат. Они связаны с прямоугольными координатами формулами:

$$\left. \begin{aligned}
 x - x_0 &= ar^n \sin^{\alpha} \theta \cos^{\beta} \varphi, \\
 y - y_0 &= br^n \sin^{\alpha} \theta \sin^{\beta} \varphi, \\
 z - z_0 &= cr^n \cos^{\alpha} \theta, \\
 (0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi, \text{ или } -\pi < \varphi \leq \pi),
 \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

где $x_0, y_0, z_0, a, b, c, n, \alpha, \beta$ – некоторые числа, выбираемые в каждом конкретном случае из соображений удобства.

Якобиан перехода к обобщенным сферическим координатам равен

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = abc n \alpha \beta r^{3n-1} \sin^{2\alpha-1} \theta \cos^{\alpha-1} \theta \sin^{\beta-1} \varphi \cos^{\beta-1} \varphi. \quad (2.19)$$

Пример 2.11. Найти объем эллипсоида: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

Решение. Во-первых, напомним, что эту задачу мы уже решили (см. пример 2.6). Во-вторых, решение, которое мы здесь предложим, покажет, что такое выбрать для данной конкретной задачи адаптивный способ представления заложенной в ней информации.

Итак, пусть

$$x = ar \sin \theta \cos \varphi; \quad y = ar \sin \theta \sin \varphi; \quad z = cr \cos \theta. \quad (2.20)$$

Тогда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ переходит в $r^2 \leq 1$ или $0 \leq r \leq 1$. Якобиан преобразования (2.20) равен, очевидно, $abc r^2 \sin \theta$. И далее все достаточно просто:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_T 1 \cdot dV = abc \iiint_{\tau} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \sin \theta dr = \\ &= 2\pi abc \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^1 r^2 dr = -2\pi abc [\cos \theta]_0^{\pi} \frac{r^3}{3} \Big|_0^1 = \\ &= -2\pi(-1-1) \cdot \frac{1}{3} abc = \frac{4}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

Пример 2.12. Найти объем тела, ограниченного поверхностью

$$\sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{y}{3}} + \sqrt{\frac{z}{15}} = 1. \quad (2.21)$$

Решение

Прежде всего изучим линию (след), по которой данная поверхность пересекается с координатной плоскостью $z = 0$. Подставим это значение z в уравнение (2.21). Тогда уравнение интересующей нас линии есть

$$\sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{y}{3}} = 1. \quad (2.22)$$

Понятно, что в уравнении (2.21) все переменные x , y , z неотрицательны (см. определение арифметического квадратного корня). Значит, кривая (2.22) лежит в первой четверти (и, разумеется, все наше тело находится в первом октанте).

Найдем точки пересечения кривой (2.22) с осями координат.

Пусть $x = 0$. Тогда $\sqrt{\frac{y}{3}} = 1 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A(0;3)$.

Пусть $y = 0$. Тогда $\sqrt{\frac{x}{2}} = 1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow B(2;0)$.

А теперь, чтобы получить пару точек, лежащих на линии (2.22), найдем решения уравнения (2.22) при $x \in \left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}$:

$$\begin{aligned}
 1) \quad x = \frac{1}{2} &\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{y}{3}} = 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{y}{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{4}; \\
 2) \quad x = 1 &\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{y}{3}} = 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{y}{3}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1 - \frac{1,414}{2} = \\
 &= 1 - 0,707 \approx 0,3 \Rightarrow y = 3 \cdot 0,3^2 = 3 \cdot 0,09 = 0,27.
 \end{aligned}$$

Информации у нас вполне достаточно, чтобы построить эскиз графика уравнения (2.22) (рис. 2.19). Теперь уже нетрудно представить и всю нашу «криволинейную» треугольную пирамиду (рис. 2.20).

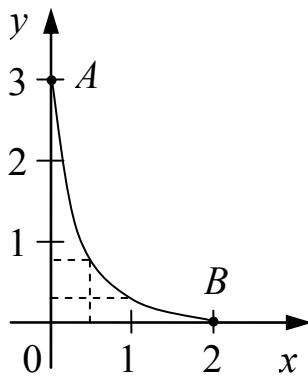


Рис. 2.19

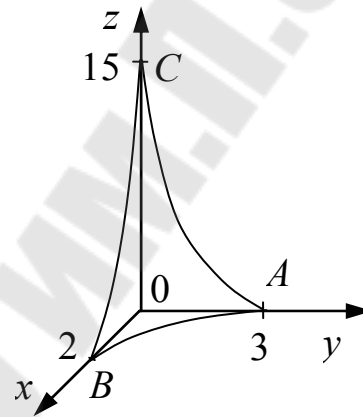


Рис. 2.20

Для вычисления ее объема удобно перейти к обобщенным сферическим координатам по формулам:

$$\begin{cases} x = 2r^2 \sin^4 \theta \cos^4 \varphi, \\ y = 3r^2 \sin^4 \theta \sin^4 \varphi, \\ z = 15r^2 \cos^4 \theta. \end{cases} \quad (2.23)$$

Уравнение поверхности (2.21) в этих координатах примет вид:

$$\begin{aligned}
 1 &= \sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{y}{3}} + \sqrt{\frac{z}{15}} = \sqrt{r^2 \sin^4 \theta \cos^4 \varphi} + \sqrt{r^2 \sin^4 \theta \sin^4 \varphi} + \sqrt{r^2 \cos^4 \theta} = \\
 &= r(\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta) = r(\sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \\
 &\quad + \cos^2 \theta) = r(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = r \Rightarrow r = 1.
 \end{aligned}$$

(Достаточно простой вид, не так ли?).

В пределах тела T переменная φ изменяется, очевидно, от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Более того, при каждом значении $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ переменная θ также изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Остается только учесть, что на каждом луче $\varphi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ переменная r изменяется от 0 (значение r в начале координат) до 1 (значение r на поверхности (2.21)).

Итак, прообразом тела T при отображении (2.23) является прямоугольный параллелепипед в пространстве (r, θ, φ) : $\{\tau = (r, \theta, \varphi) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$. Якобиан J отображения (2.23) равен (см. (2.19)) $J = 2880r^5 \sin^7 \theta \cos^3 \theta \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi$.

В самом деле, сравнивая соотношения (2.23) с формулами (2.18), устанавливаем: $a = 2$; $b = 3$; $c = 15$; $n = 2$, $\alpha = \beta = 4$, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, и остается подставить эти значения параметров в формулы (2.19).

Используя формулу $V(T) = \iiint_T 1 \cdot dV$ и переходя к криволинейным координатам, получаем

$$\begin{aligned} V(T) &= \iiint_{\tau} |J| dr d\theta d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 2880r^5 \sin^7 \theta \cos^3 \theta \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi dr = \\ &= 2880 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 \theta \cos^3 \theta d\theta \int_0^1 r^5 dr = \\ &= 2880 \cdot \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi (1 - \sin^2 \varphi) d(\sin \varphi) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 \theta (1 - \sin^2 \theta) d(\sin \theta) = \\ &= 480 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 \varphi - \sin^5 \varphi) d(\sin \varphi) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^7 \theta - \sin^9 \theta) d(\sin \theta) = \\ &= 480 \left[\frac{\sin^4 \varphi}{4} - \frac{\sin^6 \varphi}{6} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{\sin^8 \theta}{8} - \frac{\sin^{10} \theta}{10} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= 480 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right) = 480 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{40} = 1. \end{aligned}$$

ВНИМАНИЕ – ЗАДАНИЕ

Доказать, что объем тела, ограниченного поверхностью $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1$ ($a, b, c > 0$), может быть вычислен по формуле $V = \frac{abc}{90}$.

Замечание 2.8 (методологического характера)

На протяжении всего изложения мы не раз пользовались методом замены переменных для вычисления тех или иных интегралов. Идея этого метода является частным случаем следующей общей концепции: если для некоторой задачи, решение которой изначально не известно, удастся найти такой способ представления заключенной в ней информации, при котором вновь полученная задача проще исходной (а если повезет, то – даже известная), то мы на верном пути.

ГЛАВА 3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.1. Криволинейный интеграл первого рода: определение, свойства и вычисление

К понятию криволинейного интеграла первого рода приводит механическая задача о вычислении массы пространственной кривой AB по ее линейной плотности $f(M)$, заданной во всех точках $M(x; y; z) \in AB$. Для решения этой задачи разобьем кривую AB произвольно точками $M_i(x_i; y_i; z_i)$ на n частичных дуг $M_i M_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). На каждой из дуг $M_i M_{i+1}$ выберем произвольно точку $M'_i(x'_i; y'_i; z'_i)$ (рис. 3.1). Тогда, приближенно считая, что плотность во всех точках дуги $M_i M_{i+1}$ равна $f(M'_i)$ и обозначая длину дуги $M_i M_{i+1}$ через Δl_i , для массы Δm_i этой дуги приближенно будем иметь

$$\Delta m_i \approx f(M'_i) \Delta l_i.$$

Суммируя по всем элементарным дугам, находим для массы всей искомой кривой AB выражение

$$m \approx \sum_{i=1}^n f(M'_i) \Delta l_i. \quad (3.1)$$

При этом погрешность соотношения (3.1) будет стремиться к нулю, когда $\max \Delta l_i \rightarrow 0$. Следовательно, переходя в выражении (3.1)

к пределу при $\max \Delta l_i \rightarrow 0$, получим точное выражение для массы искомой кривой. Таким образом, абстрагируясь от физического содержания функции $f(M) = f(x, y, z)$, приходим к понятию криволинейного интеграла первого рода.

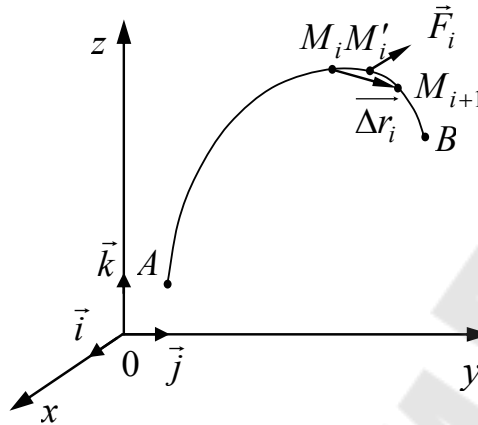


Рис. 3.1

Определение 3.1. Если существует предел интегральных сумм

$$\sum_{i=1}^n f(M'_i) \Delta l_i = \sum_{i=1}^n f(x'_i, y'_i, z'_i) \Delta l_i,$$

когда $\max \Delta l_i \rightarrow 0$, не зависящий как от способа разбиения кривой AB точками $M_i(x_i; y_i; z_i)$ на частичные дуги $M_i M_{i+1}$, так и от выбора точек $M'_i(x'_i; y'_i; z'_i)$ на каждой из них, то этот предел называют *криволинейным интегралом первого рода* от функции $f(M) = f(x, y, z)$ по кривой AB и обозначают символом

$$\int_{AB} f(M) dl = \int_{AB} f(x, y, z) dl.$$

Итак, по определению

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x'_i, y'_i, z'_i) \Delta l_i. \quad (3.2)$$

Замечание 3.1

Аналогично можно ввести криволинейный интеграл 1-го рода и по плоской кривой:

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x'_i, y'_i) \Delta l_i.$$

Замечание 3.2

Механический и геометрический смысл криволинейного интеграла первого рода: как следует из выражения (3.1) криволинейный интеграл первого рода (3.2) дает массу кривой AB , линейная плотность вдоль которой равна $f(x, y, z)$. В частности, при $f(x, y, z) \equiv 1$ (или в плоском случае при $f(x, y) \equiv 1$) криволинейный интеграл первого рода применяют для нахождения длины l кривой AB :

$$l = \int_{AB} dl.$$

Свойства криволинейного интеграла первого рода

1°. *Свойство линейности.* Если для каждой из функций $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ существуют криволинейные интегралы первого рода по кривой AB , и если C_1, C_2 – любые постоянные, то для функции $C_1 f_1(x, y, z) + C_2 f_2(x, y, z)$ также существует криволинейный интеграл первого рода по кривой AB , причем

$$\int_{AB} [C_1 f_1(x, y, z) + C_2 f_2(x, y, z)] dl = C_1 \int_{AB} f_1(x, y, z) dl + C_2 \int_{AB} f_2(x, y, z) dl. \quad (3.3)$$

2°. *Свойство аддитивности.* Если кривая AB составлена из двух кривых AC и CB , и если для функции $f(x, y, z)$ существует криволинейный интеграл первого рода по кривой AB , то для этой функции существуют и криволинейные интегралы первого рода по каждой из этих кривых AC и CB , причем

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl = \int_{AC} f(x, y, z) dl + \int_{CB} f(x, y, z) dl. \quad (3.4)$$

3°. При изменении направления интегрирования криволинейный интеграл первого рода не изменяет своего значения, т. е.

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl = \int_{BA} f(x, y, z) dl. \quad (3.5)$$

4°. *Оценка модуля интеграла.* Если существует криволинейный интеграл первого рода от функции $f(x, y, z)$ по кривой AB , то существует и криволинейный интеграл первого рода от функции $|f(x, y, z)|$ по кривой AB , причем

$$\left| \int_{AB} f(x, y, z) dl \right| \leq \int_{AB} |f(x, y, z)| dl. \quad (3.6)$$

5°. *Формула среднего.* Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна вдоль кривой AB , то существует такая точка $M_0(x_0; y_0; z_0) \in AB$, что

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl = f(x_0, y_0, z_0) \cdot l, \quad (3.7)$$

где l – длина кривой AB .

Вычисление криволинейного интеграла первого рода

В зависимости от способа задания кривой AB вычисление криволинейного интеграла первого рода сводится к вычислению соответствующего определенного интеграла.

1. Если плоская кривая AB задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), тогда $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ и, следовательно,

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (3.8)$$

2. Если плоская кривая AB задана уравнением в полярных координатах $(\rho; \varphi)$ так, что $\rho = \rho(\varphi)$ ($\alpha \leq \varphi \leq \beta$), тогда, принимая во внимание, что $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, находим $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi$. Следовательно,

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho(\varphi) \cos \varphi, \rho(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (3.9)$$

Замечание 3.3

Если плоская кривая AB лежит в плоскости Oxy и задана уравнением $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, то кривую AB можно параметризовать, полагая $x = x$, $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$. Тогда вместо (3.8) будем иметь

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (3.10)$$

Аналогично, если кривая AB задана уравнением $x = x(y)$, $c \leq y \leq d$, то полагаем $y = y$, $x = x(y)$, $c \leq y \leq d$. Тогда (3.8) принимает вид

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy. \quad (3.11)$$

Замечание 3.4

Для вычисления криволинейного интеграла первого рода по пространственной кривой AB необходимо задать данную кривую параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$).

Тогда $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$ и, следовательно,

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt. \quad (3.12)$$

Пример 3.1. Вычислить $\int_{AB} \sqrt{y} dl$, если AB – первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$ (рис. 3.2).

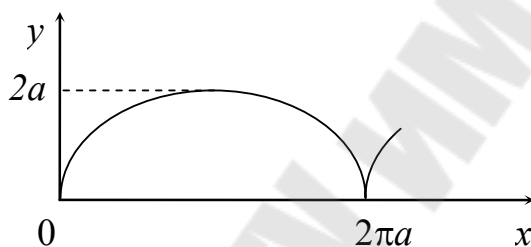


Рис. 3.2

Решение

Поскольку кривая AB задана параметрически, то согласно (3.8) находим:

$$\begin{aligned} x'(t) &= a(1 - \cos t), \quad y'(t) = a \sin t, \\ \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} &= \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} = \\ &= a\sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} = a\sqrt{2(1 - \cos t)}. \end{aligned}$$

Для первой арки циклоиды $0 \leq t \leq 2\pi$ (рис. 3.2). Тогда, в соответствии с (3.8), будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_{AB} \sqrt{y} dl &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a(1 - \cos t)} a \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = \sqrt{2} a^{3/2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) dt = \\ &= \sqrt{2} a^{3/2} (t - \sin t) \Big|_0^{2\pi} = \pi(2a)^{3/2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\pi(2a)^{3/2}$.

Пример 3.2. Вычислить $\int_{AB} \sqrt{x^2 + y^2} dl$, если AB – кардиоида $\rho = a(1 + \cos \varphi)$, $a > 0$ (рис. 3.3).

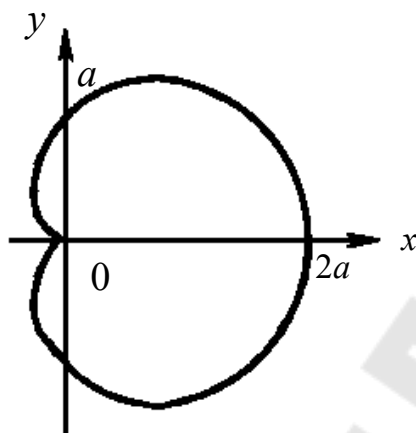


Рис. 3.3

Решение

Поскольку кривая задана уравнением в полярных координатах, причем искомой кривой отвечает значение угла φ от $\alpha = 0$ до $\beta = 2\pi$ (рис. 3.3), то воспользуемся формулой (3.9). Для этого находим:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \rho = a(1 + \cos \varphi), \quad \rho' = -a \sin \varphi,$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} &= \sqrt{a^2(1 + \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} = a\sqrt{1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \\ &= a\sqrt{2(1 + \cos \varphi)}. \end{aligned}$$

Тогда, согласно (3.9), будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_{AB} \sqrt{x^2 + y^2} dl &= \int_0^{2\pi} a(1 + \cos \varphi) a\sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi = \sqrt{2}a^2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos \varphi)^{3/2} d\varphi = \\ &= \sqrt{2}a^2 \int_0^{2\pi} \left(2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}\right)^{3/2} d\varphi = 4a^2 \int_0^{2\pi} \left|\cos \frac{\varphi}{2}\right|^3 d\varphi = \\ &= 4a^2 \left(\int_0^{\pi} \cos^3 \frac{\varphi}{2} d\varphi - \int_{\pi}^{2\pi} \cos^3 \frac{\varphi}{2} d\varphi \right). \end{aligned}$$

В последнем интеграле сделаем замену переменной: $t = \sin \frac{\varphi}{2}$,
 $dt = \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi$; $\varphi = 0 : t = \sin 0 = 0$; $\varphi = \pi : t = \sin \frac{\pi}{2} = 1$;
 $\varphi = 2\pi : t = \sin \pi = 0$; $\cos^2 \frac{\varphi}{2} = 1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1 - t^2$. Тогда получим:

$$\int_{AB} \sqrt{x^2 + y^2} dl = 4a^2 \left(2 \int_0^1 (1-t^2) dt - 2 \int_1^0 (1-t^2) dt \right) = 16a^2 \int_0^1 (1-t^2) dt =$$

$$= 16a^2 \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 16a^2 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{32}{3} a^2.$$

Ответ: $\frac{32}{3} a^2$.

ВНИМАНИЕ – ЗАДАНИЕ

Осуществить вычисление вторым способом, считая что $\varphi \in [-\pi; \pi]$ и используя симметрию относительно оси Ox .

Пример 3.3. Вычислить $\int_{AB} \sqrt{1+y^4} dl$, где AB – дуга кривой $x = \frac{1}{3} y^3$ между точками $A(0;0)$ и $B(1/3;1)$.

Решение

Для вычисления искомого интеграла воспользуемся формулой (3.11). Для этого находим:

$$\sqrt{1+(x'(y))^2} = \sqrt{1+(y^2)^2} = \sqrt{1+y^4}, \quad c=0, \quad d=1.$$

Тогда в соответствии с (3.11) будем иметь:

$$\int_{AB} \sqrt{1+y^4} dl = \int_0^1 \sqrt{1+y^4} \sqrt{1+y^4} dy = \int_0^1 (1+y^4) dy = \left(y + \frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}.$$

Ответ: $\frac{6}{5}$.

Замечание 3.5

В некоторых случаях бывает удобно, а порой и необходимо, перейти от одного способа задания кривой AB к другому, например, от задания кривой в декартовой системе координат к параметрическому или к уравнению кривой в полярной системе координат.

Пример 3.4. Вычислить $\int_{AB} \sqrt{x^2 + y^2} dl$, если AB – лемниската Бернулли $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $a > 0$ (рис. 3.4).

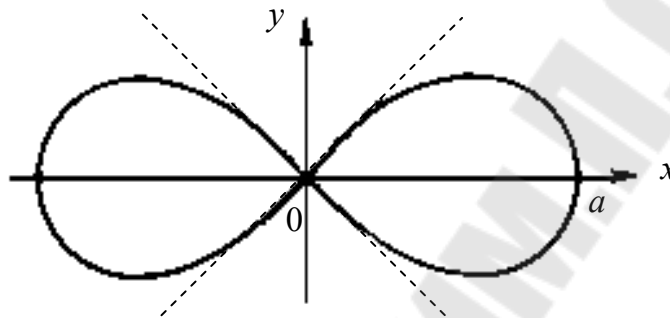


Рис. 3.4

Решение

В полярной системе координат $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ и, следовательно, уравнение лемнискаты принимает вид:

$$(\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi)^2 = a^2(\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \rho^4 = a^2 \rho^2 \cos 2\varphi \Rightarrow \rho^2 = a^2 \cos 2\varphi \Rightarrow \rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, причем из условия $\cos 2\varphi \geq 0$ следует, что

$$2\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right] \text{ (рис. 3.4).}$$

Поэтому применим формулу (3.9). Тогда находим:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} = \rho = a\sqrt{\cos 2\varphi};$$

$$\rho' = a \frac{1}{2} (\cos 2\varphi)^{-1/2} (-\sin 2\varphi) \cdot 2 = \frac{-a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}},$$

$$\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \sqrt{a^2 \cos 2\varphi + \frac{a^2 \sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}} = a \sqrt{\frac{\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Таким образом, получим

$$\begin{aligned} \int_{AB} \sqrt{x^2 + y^2} dl &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi} \cdot \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi + \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi} \cdot \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = \\ &= a^2 \cdot 2 \int_0^{\pi/4} d\varphi + a^2 \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} d\varphi = 2a^2\varphi \Big|_0^{\pi/4} + a^2\varphi \Big|_{3\pi/4}^{5\pi/4} = \frac{\pi a^2}{2} + a^2 \left(\frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} \right) = \\ &= \frac{\pi a^2}{2} + \frac{\pi a^2}{2} = \pi a^2. \end{aligned}$$

Ответ: πa^2 .

ВНИМАНИЕ – ЗАДАНИЕ

Учитывая симметрию как самой лемнискаты, так и подынтегральной функции относительно обеих осей координат, осуществить вычисление вторым способом: $\int_{AB} \sqrt{x^2 + y^2} dl = 4 \int_{A'B'} \sqrt{x^2 + y^2} dl$, где $A'B'$ – часть лемнискаты, лежащая в первой четверти.

Пример 3.5. Вычислить $\int_{AB} (4x + 3y + 2z + 2) dl$, если AB – отрезок прямой между точками $A(-3;4;5)$ и $B(-1;2;6)$.

Решение

Запишем уравнение прямой AB в параметрическом виде

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} = t, \text{ откуда получим:}$$

$$x = -3 + 2t, \quad y = 4 - 2t, \quad z = 5 + t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Находим

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3.$$

Тогда, согласно формуле (3.12), будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_{AB} (4x + 3y + 2z + 2)dl &= \int_0^1 [4(-3 + 2t) + 3(4 - 2t) + 2(5 + t) + 2]3dt = \\ &= 3 \int_0^1 (-12 + 8t + 12 - 6t + 10 + 2t + 2)dt = 3 \int_0^1 (4t + 12)dt = 3(2t^2 + 12t) \Big|_0^1 = \\ &= 3(2 + 12) = 42. \end{aligned}$$

Ответ: 42.

3.2. Криволинейный интеграл второго рода: определение, свойства и вычисление

К понятию криволинейного интеграла второго рода приводит задача о вычислении работы A силы $\vec{F} = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}$, заданной в базисе \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} и действующей на материальную точку, движущуюся вдоль пространственной линии AB от точки A к точке B . Для вычисления работы A силы \vec{F} разобьем линию AB на n произвольных частей точками $M_i(x_i; y_i; z_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) в направлении от точки A к точке B (рис. 3.1). Обозначим через $\overrightarrow{\Delta r_i}$ вектор $\overrightarrow{M_i M_{i+1}} = \Delta x_i \cdot \vec{i} + \Delta y_i \cdot \vec{j} + \Delta z_i \cdot \vec{k}$, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. На каждой из частичных дуг $M_i M_{i+1}$ выберем произвольную точку $M'_i(x'_i; y'_i; z'_i)$. Тогда скалярное произведение $\vec{F}_i \cdot \overrightarrow{\Delta r_i} = X(x'_i, y'_i, z'_i)\Delta x_i + Y(x'_i, y'_i, z'_i)\Delta y_i + Z(x'_i, y'_i, z'_i)\Delta z_i$ будет представлять собой приближенное выражение работы ΔA_i силы \vec{F} вдоль дуги $M_i M_{i+1}$:

$$\Delta A_i \approx \vec{F}_i \cdot \overrightarrow{\Delta r_i} = X(x'_i, y'_i, z'_i)\Delta x_i + Y(x'_i, y'_i, z'_i)\Delta y_i + Z(x'_i, y'_i, z'_i)\Delta z_i.$$

Следовательно, приближенное значение работы A силы \vec{F} на всей кривой AB будет

$$\begin{aligned} A &\approx \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \overrightarrow{\Delta r_i} = \\ &= \sum_{i=1}^n [X(x'_i, y'_i, z'_i)\Delta x_i + Y(x'_i, y'_i, z'_i)\Delta y_i + Z(x'_i, y'_i, z'_i)\Delta z_i]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

При этом погрешность выражения (3.13) будет стремиться к нулю, когда $\max |\overline{\Delta r}_i| = \max \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2} \rightarrow 0$. Значит, переходя в выражении (3.13) к пределу при $\max |\overline{\Delta r}_i| \rightarrow 0$, получим точное выражение для работы A силы \vec{F} вдоль линии AB . Таким образом, абстрагируясь от физического содержания векторной функции \vec{F} , приходим к понятию криволинейного интеграла второго рода.

Определение 3.2. Если существует предел интегральных сумм

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \overline{\Delta r}_i = \sum_{i=1}^n [X(x'_i, y'_i, z'_i)\Delta x_i + Y(x'_i, y'_i, z'_i)\Delta y_i + Z(x'_i, y'_i, z'_i)\Delta z_i],$$

когда $\max |\overline{\Delta r}_i| \rightarrow 0$, не зависящий как от способа разбиения кривой AB точками $M_i(x_i; y_i; z_i)$ на частичные дуги $M_i M_{i+1}$, так и от выбора точек $M'_i(x'_i; y'_i; z'_i)$ на каждой из них, то этот предел называют *криволинейным интегралом второго рода* от векторной функции $\vec{F} = \{X(x, y, z); Y(x, y, z); Z(x, y, z)\}$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ вдоль линии AB и обозначают символом

$$\int_{AB} \vec{F} \cdot \overline{dr} = \int_{AB} X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz,$$

где $\overline{dr} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$.

Итак, по определению

$$\begin{aligned} \int_{AB} \vec{F} \cdot \overline{dr} &= \int_{AB} X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz = \\ &= \lim_{\max |\overline{\Delta r}_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [X(x'_i, y'_i, z'_i)\Delta x_i + Y(x'_i, y'_i, z'_i)\Delta y_i + Z(x'_i, y'_i, z'_i)\Delta z_i]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Замечание 3.6

Физический смысл криволинейного интеграла второго рода: из выражения (3.13) следует, что криволинейный интеграл второго рода (3.14) определяет работу A силового поля \vec{F} вдоль линии AB и в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ может быть представлен в виде:

$$A = \int_{AB} \vec{F} \cdot \overline{dr} = \int_{AB} X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz. \quad (3.15)$$

Замечание 3.7

Если AB – плоская кривая, например, лежащая в плоскости Oxy , то в формулах (3.13)–(3.15) необходимо положить $\Delta z_i = 0$, $dz = 0$.

Свойства криволинейного интеграла второго рода

1°. *Свойство линейности.* Если для каждой из векторных функций \vec{F}_1 и \vec{F}_2 существуют криволинейные интегралы второго рода по кривой AB и если C_1 и C_2 – произвольные постоянные, то для функции $C_1\vec{F}_1 + C_2\vec{F}_2$ также существует криволинейный интеграл второго рода по кривой AB , причем

$$\int_{AB} (C_1\vec{F}_1 + C_2\vec{F}_2) \cdot \vec{dr} = C_1 \int_{AB} \vec{F}_1 \cdot \vec{dr} + C_2 \int_{AB} \vec{F}_2 \cdot \vec{dr}. \quad (3.16)$$

2°. *Свойство аддитивности.* Если кривая AB составлена из двух кривых AC и CB , и если для векторной функции \vec{F} существует криволинейный интеграл второго рода по кривой AB , то для этой функции существуют и криволинейные интегралы второго рода по каждой из кривых AC и CB , причем

$$\int_{AB} \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_{AC} \vec{F} \cdot \vec{dr} + \int_{CB} \vec{F} \cdot \vec{dr}. \quad (3.17)$$

3°. Криволинейный интеграл второго рода меняет свой знак на обратный при изменении направления пути интегрирования, т. е.

$$\int_{AB} \vec{F} \cdot \vec{dr} = - \int_{BA} \vec{F} \cdot \vec{dr}. \quad (3.18)$$

Замечание 3.8

Поскольку криволинейный интеграл второго рода зависит от направления пути интегрирования (свойство 3°), то в случае, когда $L \equiv AB$ – замкнутая кривая (т. е. в случае, когда точка B совпадает с точкой A), за положительное направление обхода замкнутого контура L выбирают то направление, при котором область, лежащая внутри этого контура, остается по левую сторону по отношению к точке, совершающей обход. Такое движение условно называют «движением против часовой стрелки», а интеграл по замкнутому контуру L называют циркуляцией векторного поля и обозначают $\oint_L \vec{F} \cdot \vec{dr}$.

Вычисление криволинейного интеграла второго рода

В зависимости от способа задания кривой AB вычисление криволинейного интеграла второго рода сводится к вычислению соответствующего определенного интеграла.

1. Если AB – пространственная кривая, то записывают уравнение этой кривой в параметрическом виде: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, причем точкам A и B отвечают значения параметра $t = \alpha$ и $t = \beta$, соответственно (выполнение условия $\alpha < \beta$ при этом не обязательно). Тем самым вычисление криволинейного интеграла второго рода (3.14) сводится к вычислению определенного интеграла:

$$\begin{aligned} & \int_{AB} X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz = \\ & = \int_{\alpha}^{\beta} [X(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \\ & \quad + Z(x(t), y(t), z(t))z'(t)]dt . \end{aligned} \quad (3.19)$$

2. Если плоская кривая AB задана уравнением в полярных координатах $(\rho; \varphi)$ так, что $\rho = \rho(\varphi)$, причем в точке A угол $\varphi = \alpha$, а в точке B угол $\varphi = \beta$, то, учитывая, что $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, находим:

$$dx = (\rho(\varphi) \cos \varphi)' d\varphi = (\rho'(\varphi) \cos \varphi - \rho(\varphi) \sin \varphi) d\varphi,$$

$$dy = (\rho(\varphi) \sin \varphi)' d\varphi = (\rho'(\varphi) \sin \varphi + \rho(\varphi) \cos \varphi) d\varphi.$$

Следовательно, принимая во внимание замечание 3.7, вычисление криволинейного интеграла (3.14) сводится к вычислению определенного интеграла

$$\begin{aligned} & \int_{AB} X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \\ & = \int_{\alpha}^{\beta} \{X(\rho(\varphi) \cos \varphi, \rho(\varphi) \sin \varphi)[\rho'(\varphi) \cos \varphi - \rho(\varphi) \sin \varphi] + \\ & \quad + Y(\rho(\varphi) \cos \varphi, \rho(\varphi) \sin \varphi)[\rho'(\varphi) \sin \varphi + \rho(\varphi) \cos \varphi]\} d\varphi . \end{aligned} \quad (3.20)$$

Замечание 3.9

Если плоская кривая AB лежит в плоскости Oxy и задана уравнением $y = y(x)$ или уравнением $x = x(y)$, причем $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, то кривую AB можно параметризовать, полагая $x = x$, $y = y(x)$ или, полагая $y = y$, $x = x(y)$. Тем самым, криволинейный интеграл второго рода (3.14), учитывая замечание 3.7, принимает вид:

$$\int_{AB} X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \int_{x_A}^{x_B} [X(x, y(x)) + Y(x, y(x))y'(x)]dx \quad (3.21)$$

или

$$\int_{AB} X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \int_{y_A}^{y_B} [X(x(y), y)x'(y) + Y(x(y), y)]dy. \quad (3.22)$$

Пример 3.6. Вычислить $\int_{AB} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$ вдоль отрезка прямой, идущего от точки $A(1; -2; 2)$ до точки $B(0; 0; 0)$.

Решение

Запишем уравнение прямой, проходящей через две данные точки A и B :

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{2}.$$

Отсюда, полагая все эти отношения равными параметру t , получим уравнения искомой прямой в параметрическом виде: $x = t$, $y = -2t$, $z = 2t$, откуда находим $x' = 1$, $y' = -2$, $z' = 2$. При этом точке A соответствует, очевидно, значение параметра $t = 1$, а в точке B — значение $t = 0$. Тогда, используя формулу (3.19), будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_{AB} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz &= \int_1^0 (4t^2 \cdot 1 + 4t^2 \cdot (-2) + t^2 \cdot 2) dt = -\int_0^1 (-2t^2) dt = \\ &= 2 \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Пример 3.7. Вычислить $\int_{AB} (2y - x)dx + (x + y^2)dy$, где AB – дуга параболы $x = 2y - y^2$ от точки $A(1;1)$ до точки $B(-3;3)$ (рис. 3.5).

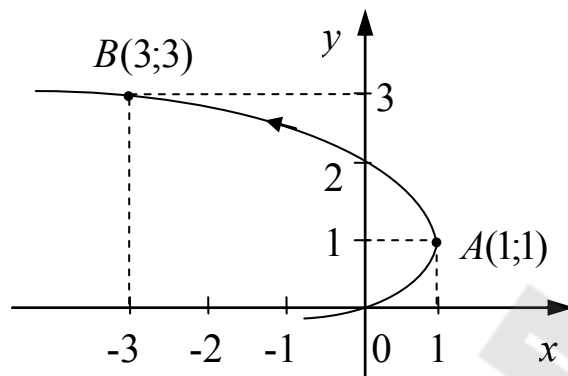


Рис. 3.5

Решение

Принимая во внимание замечание 3.9 и формулу (3.22), находим

$$\begin{aligned} x' &= 2 - 2y, \quad y_A = 1, \quad y_B = 3; \quad \int_{AB} (2y - x)dx + (x + y^2)dy = \\ &= \int_1^3 [(2y - 2y + y^2)(2 - 2y) + (2y - y^2 + y^2)]dy = \int_1^3 [2y^2(1 - y) + 2y]dy = \\ &= \int_1^3 (2y^2 - 2y^3 + 2y)dy = \left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{y^4}{2} + y^2 \right) \Big|_1^3 = 18 - \frac{81}{2} + 9 - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 1 \right) = \\ &= 27 - \frac{81}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1 = 26 - 40 - \frac{2}{3} = -14 - \frac{2}{3} = -\frac{44}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{44}{3}$.

Пример 3.8. Вычислить $\oint_L ydx - xdy$, где L – окружность $x^2 + y^2 = y$ (обход в положительном направлении, рис. 3.6).

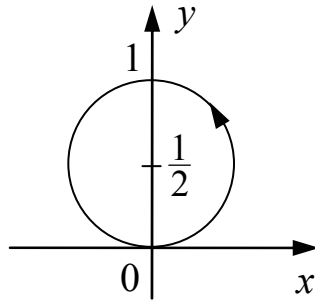


Рис. 3.6

Решение

Воспользуемся замечанием 3.5 и перейдем к полярной системе координат $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Тогда уравнение окружности $x^2 + y^2 = y$ принимает вид:

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho \sin \varphi \Rightarrow \rho^2 = \rho \sin \varphi \Rightarrow \rho = \sin \varphi.$$

При этом из условия $\sin \varphi \geq 0$ следует, что $0 \leq \varphi \leq \pi$. Для вычисления искомого интеграла воспользуемся формулой (3.20):

$$\begin{aligned} \oint_L y dx - x dy &= \int_0^\pi [\rho(\varphi) \sin \varphi (\rho'(\varphi) \cos \varphi - \rho(\varphi) \sin \varphi) - \\ &\quad - \rho(\varphi) \cos \varphi (\rho'(\varphi) \sin \varphi + \rho(\varphi) \cos \varphi)] d\varphi = \\ &= \int_0^\pi [\sin^2 \varphi (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - \sin \varphi \cdot \cos \varphi (\cos \varphi \cdot \sin \varphi + \sin \varphi \cdot \cos \varphi)] d\varphi = \\ &= \int_0^\pi \left[\frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi) \cdot \cos 2\varphi - \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi \right] d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos 2\varphi - \cos^2 2\varphi - \sin^2 2\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos 2\varphi - 1) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 2\varphi}{2} - \varphi \right) \Big|_0^\pi = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{2}$.

Пример 3.9. Вычислить $\oint_L ydx + dy$, где L – эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

обходимый в положительном направлении.

Решение

Также воспользуемся замечанием 3.5 и запишем уравнение эллипса в параметрическом виде:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Для вычисления искомого интеграла воспользуемся формулой (3.19), в которой, согласно замечанию 3.7, $dz = z'(t)dt = 0$. Тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} \oint_L ydx + dy &= \int_0^{2\pi} [b \sin t \cdot (-a \sin t) + b \cos t] dt = \int_0^{2\pi} (-ab \sin^2 t + b \cos t) dt = \\ &= \frac{-ab}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt + b \sin t \Big|_0^{2\pi} = -\frac{ab}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} + \\ &+ b(\sin 2\pi - \sin 0) = \frac{-ab}{2} \cdot 2\pi = -\pi ab. \end{aligned}$$

Ответ: $-\pi ab$.

ГЛАВА 4. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

4.1. Понятие поверхности

Напомним, что под поверхностью σ понимают отображение f плоской области D на множество σ трехмерного евклидова пространства, причем это отображение представляет собой взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между точками этих множеств. Таким образом, поверхность σ представляет собой некоторое множество точек M пространства с координатами $(x; y; z)$. Тем самым вектор $\vec{r} = \vec{r}(M) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, идущий из начала координат в точку $M(x; y; z) \in \sigma$, задает поверхность σ и называется радиус-вектором поверхности σ (рис. 4.1). Напомним также, что касательная плоскость в точке M определяется как плоскость, для которой угол между этой плоскостью и секущей MM' (M' – произвольная точка поверхности) стремится к нулю при стремлении точки M' к точке M .

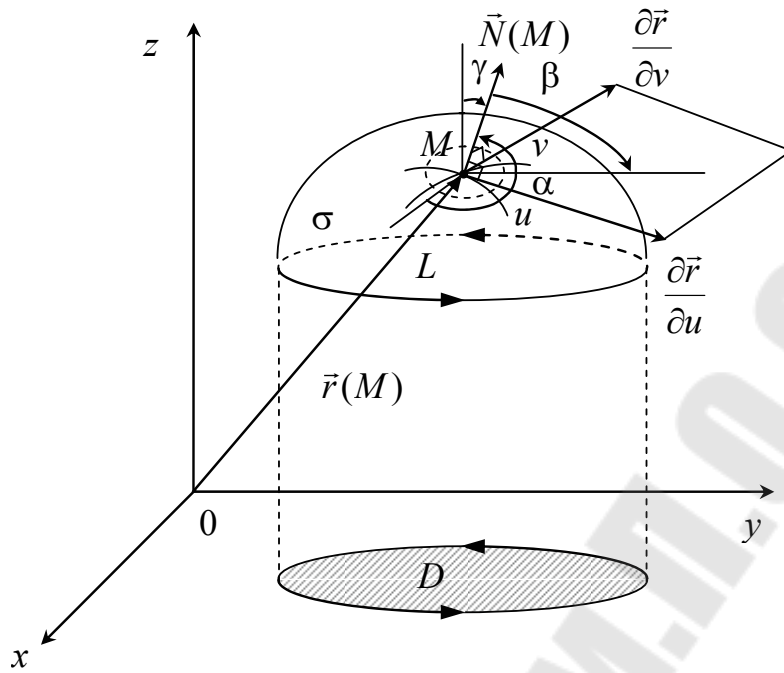


Рис. 4.1

Определение 4.1. Поверхность σ называется гладкой, если в каждой точке поверхности σ существует единственная касательная плоскость, положение которой непрерывно изменяется вместе с точкой касания.

Определение 4.2. Вектором нормали к поверхности σ в точке M называют любой ненулевой вектор $\vec{N}(M)$, перпендикулярный к касательной плоскости поверхности σ в точке M .

Замечание 4.1

Из определения касательной плоскости к поверхности σ следует, что касательные прямые в точке M к любым гладким линиям u и v , расположенными на поверхности σ и проходящими через точку M , лежат в касательной плоскости к поверхности σ в точке M . Тогда числа (u, v) будут являться криволинейными координатами точки M (см. раздел 1.8). Следовательно, координаты x, y, z точки M являются функциями переменных u и v , а значит вектор $\vec{r}(M)$ также будет являться функцией переменных u и v : $\vec{r}(M) = \vec{r}(u, v)$. Но поскольку векторы $\partial\vec{r}/\partial u$ и $\partial\vec{r}/\partial v$ являются касательными к линиям u и v , проходящими через точку M , то эти векторы также лежат в касательной плоскости к поверхности σ в точке M (рис. 4.1), причем в качестве вектора нормали к касательной плоскости можно взять вектор

$$\vec{N}(M) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}. \quad (4.1)$$

Кроме того, по условию поверхность σ является гладкой, а следовательно, в каждой точке гладкой поверхности существует непрерывное векторное поле нормалей.

Определение 4.3. Поверхности, на которых в целом существует непрерывное векторное поле нормалей, называют двусторонними; поверхности, на которых в целом такого поля не существует, называют односторонними.

Плоскость, сфера, эллипсоид, конус – двусторонние поверхности, лист Мебиуса – односторонняя поверхность (рис. 4.2).

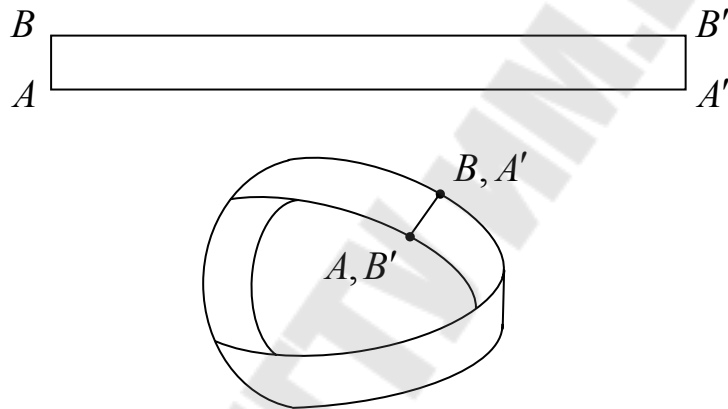


Рис. 4.2

Определение 4.4. Незамкнутая гладкая двусторонняя поверхность σ , ограниченная простым контуром L (рис. 4.1), называется положительно ориентированной, если обход по контуру L видется происходящим против часовой стрелки наблюдателю, смотрящему из конца вектора нормали $\vec{N}(M)$. При этом сторона поверхности, отвечающая выбранному вектору нормали $\vec{N}(M)$, называется положительной и обозначается символом σ^+ . В противном случае – отрицательно ориентированной, а сторона поверхности – отрицательной и обозначается символом σ^- .

В случае замкнутой гладкой поверхности σ , ограничивающей некоторое тело, за положительную сторону поверхности выбирают ту, которая отвечает внешнему вектору нормали, а за отрицательную – противоположную ей.

4.2. Поверхностный интеграл первого рода: определение, свойства и вычисление

Поверхностный интеграл первого рода представляет собой такое же естественное обобщение двойного интеграла, как и криволинейный интеграл первого рода является обобщением по отношению к обычному определенному интегралу. При этом к понятию поверхностного интеграла первого рода приводит задача о вычислении массы поверхности σ по ее поверхностной плотности $f(M)$, заданной во всех точках $M(x; y; z) \in \sigma$.

Пусть в точках $M(x; y; z)$ некоторой двусторонней гладкой или кусочно-гладкой поверхности σ , ограниченной кусочно-гладким контуром, определена функция $f(M) = f(x, y, z)$. Разобьем поверхность σ кусочно-гладкими кривыми на n частей $\Delta\sigma_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). В каждой из частей $\Delta\sigma_i$ выберем произвольную точку $M(x'_i; y'_i; z'_i)$. Тогда приближенно считая, что плотность во всех точках области $\Delta\sigma_i$ равна $f(M'_i)$ и обозначая площадь области $\Delta\sigma_i$ через $\Delta\sigma_i$, для массы m искомой поверхности σ будем иметь приближенное выражение

$$m \approx \sum_{i=1}^n f(M'_i) \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^n f(x'_i, y'_i, z'_i) \Delta\sigma_i. \quad (4.2)$$

При этом погрешность приближения (4.2) будет стремиться к нулю, когда максимальный диаметр областей $\Delta\sigma_i$ стремится к нулю ($\max \text{diam } \Delta\sigma_i \rightarrow 0$). Следовательно, переходя в выражении (4.2) к пределу при $\max \text{diam } \Delta\sigma_i \rightarrow 0$, получим точное выражение для массы искомой поверхности. Итак, абстрагируясь от физического содержания функции $f(M) = f(x, y, z)$, приходим к понятию поверхностного интеграла первого рода.

Определение 4.5. Если существует предел интегральных сумм

$$\sum_{i=1}^n f(M'_i) \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^n f(x'_i, y'_i, z'_i) \Delta\sigma_i,$$

когда $\max \text{diam } \Delta\sigma_i \rightarrow 0$, не зависящий как от способа разбиения поверхности σ кусочно-гладкими кривыми на части $\Delta\sigma_i$, так и от выбора точек $M'_i(x'_i; y'_i; z'_i)$ в каждой из них, то этот предел называют *поверхностным интегралом первого рода* от функции $f(M) = f(x, y, z)$ по поверхности σ и обозначают символом

$$\iint_{\sigma} f(M) d\sigma = \iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma.$$

Итак, по определению

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\max \text{diam } \Delta\sigma_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x'_i, y'_i, z'_i) \Delta\sigma_i. \quad (4.3)$$

Замечание 4.2

Механический и геометрический смысл поверхностного интеграла первого рода: как следует из выражения (4.2) поверхностный интеграл первого рода (4.3) дает массу поверхности σ , поверхностная плотность которой равна $f(x, y, z)$. В частности, при $f(x, y, z) \equiv 1$ поверхностный интеграл первого рода используют для вычисления площади области σ :

$$S_{\sigma} = \iint_{\sigma} d\sigma.$$

Замечание 4.3

Из вида суммы в (4.3) очевидно, что поверхностный интеграл первого рода не зависит от выбора стороны поверхности интегрирования.

Свойства поверхностного интеграла первого рода

1°. *Свойство линейности.* Если для каждой из функций $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ существуют поверхностные интегралы первого рода по поверхности σ и если C_1, C_2 – любые постоянные, то для функции $C_1 f_1(x, y, z) + C_2 f_2(x, y, z)$ также существует поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , причем

$$\begin{aligned} & \iint_{\sigma} [C_1 f_1(x, y, z) + C_2 f_2(x, y, z)] d\sigma = \\ & = C_1 \iint_{\sigma} f_1(x, y, z) d\sigma + C_2 \iint_{\sigma} f_2(x, y, z) d\sigma. \end{aligned} \quad (4.4)$$

2°. *Свойство аддитивности.* Если поверхность σ составлена из двух поверхностей σ_1 и σ_2 , и если для функции $f(x, y, z)$ существует поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , то для этой функции существуют и поверхностные интегралы первого рода по каждой из поверхностей σ_1 и σ_2 , причем

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{\sigma_1} f(x, y, z) d\sigma + \iint_{\sigma_2} f(x, y, z) d\sigma. \quad (4.5)$$

3°. *Формула среднего.* Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна на поверхности σ , то существует такая точка $M_0(x_0; y_0; z_0) \in \sigma$, что

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = f(x_0, y_0, z_0) \cdot \sigma, \quad (4.6)$$

где σ – площадь поверхности σ .

4°. *Оценка модуля интеграла.* Если существует поверхностный интеграл первого рода от функции $f(x, y, z)$ по поверхности σ , то существует и поверхностный интеграл первого рода от функции $|f(x, y, z)|$ по поверхности σ , причем

$$\left| \iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma \right| \leq \iint_{\sigma} |f(x, y, z)| d\sigma. \quad (4.7)$$

Вычисление поверхностного интеграла первого рода

Вычисление поверхностного интеграла первого рода основано на сведении его к двойному интегралу. Пусть поверхность σ можно задать параметрически посредством радиус-вектора

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$$

в ограниченной замкнутой области D плоскости $(u; v)$. Тогда элемент площади $d\sigma$ в криволинейной системе координат $(u; v)$ дается выражением:

$$d\sigma = |\vec{N}(M)| dudv, \quad (4.8)$$

где

$$\vec{N}(M) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}. \quad (4.9)$$

Если при этом функция $f(x, y, z)$ непрерывна на поверхности σ , то поверхностный интеграл первого рода (4.3) существует и может быть сведен к двойному интегралу по формуле

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv. \quad (4.10)$$

При вычислении поверхностного интеграла первого рода (4.3) поверхность σ часто задается явно. В этом случае вместо общей формулы (4.10) его вычисление удобно проводить по одной из следующих формул.

1. Если поверхность σ задана явно непрерывно дифференцируемой функцией $z = z(x, y)$, $(x; y) \in D_{xy}$, где D_{xy} – проекция поверхности σ на плоскость Oxy , то поверхность σ параметризуют, полагая $u = x$, $v = y$. Тогда вместо (4.10) получим

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy. \quad (4.11)$$

2. Если поверхность σ задана явно непрерывно дифференцируемой функцией $y = y(x, z)$, $(x; z) \in D_{xz}$, где D_{xz} – проекция поверхности σ на плоскость Oxz , то поверхность σ параметризуют, полагая $u = x$, $v = z$. Тогда вместо (4.10) будем иметь

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} dx dz. \quad (4.12)$$

3. Если поверхность σ задана явно непрерывно дифференцируемой функцией $x = x(y, z)$, $(y; z) \in D_{yz}$, где D_{yz} – проекция поверхности σ на плоскость Oyz , то поверхность σ параметризуют, полагая $u = z$, $v = y$. Тогда формула (4.10) принимает вид

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} dy dz. \quad (4.13)$$

Замечание 4.4

Если поверхность σ задана в неявном виде уравнением

$$\Phi(x, y, z) = 0, \quad (4.14)$$

которое можно разрешить однозначно относительно одной из переменных, то при вычислении поверхностного интеграла первого рода

(4.3) используют одну из формул (4.11)–(4.13). Если же поверхность σ неоднозначно проектируется на координатные плоскости, то ее необходимо разбить на части, однозначно проектирующиеся на одну из координатных плоскостей.

Пример 4.1. Вычислить $\iint_{\sigma} x^2 y^2 d\sigma$, где σ – часть поверхности конуса $x = \sqrt{y^2 + z^2}$, отсеченная плоскостью $x = a$ ($a > 0$).

Решение

Поверхность σ (рис. 4.3) однозначно проектируется на плоскость Oyz в круг $D_{yz} = \{(y; z) \mid y^2 + z^2 \leq a^2\}$.

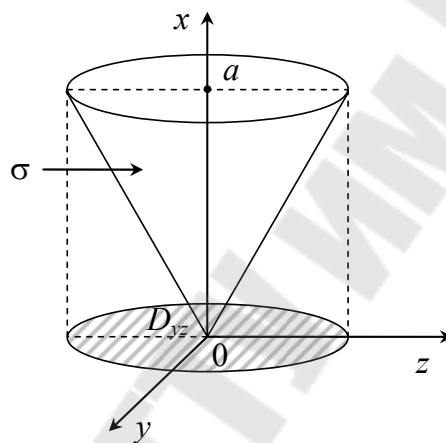


Рис. 4.3

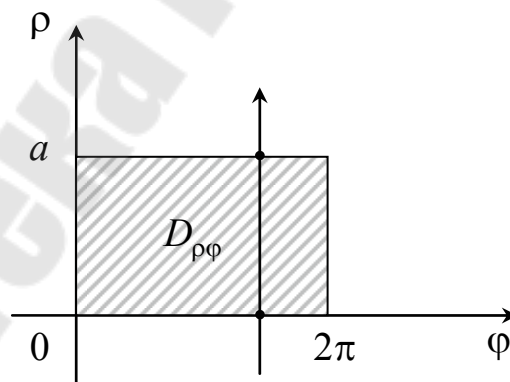


Рис. 4.4

Следовательно, мы будем пользоваться формулой (4.13). Для этого находим:

$$x'_y = \left(\sqrt{y^2 + z^2} \right)'_y = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \quad x'_z = \left(\sqrt{y^2 + z^2} \right)'_z = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

Тогда в соответствии с формулой (4.13) получим:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} x^2 y^2 d\sigma &= \iint_{D_{yz}} (y^2 + z^2) y^2 \sqrt{1 + \frac{y^2}{y^2 + z^2} + \frac{z^2}{y^2 + z^2}} dydz = \\ &= \sqrt{2} \iint_{D_{yz}} y^2 (y^2 + z^2) dydz. \end{aligned}$$

Для вычисления полученного двойного интеграла перейдем к полярным координатам $(\rho; \varphi)$, связанными с декартовыми координатами $(x; y)$ этой же точки соотношениями: $y = \rho \cos \varphi$, $z = \rho \sin \varphi$. Тогда область $D_{yz} = \{(y; z) \mid y^2 + z^2 \leq a^2\}$ будет образом области $D_{\rho\varphi} : \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi \leq a^2$ или $\rho^2 \leq a^2$, откуда $D_{\rho\varphi} = \{(\rho; \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ (рис. 4.4). Теперь примем во внимание, что якобиан отображения $D_{\rho\varphi} \rightarrow D_{yz}$ равен ρ . Тем самым искомый поверхностный интеграл сводится к двойному интегралу по области $D_{\rho\varphi}$ (рис. 4.4) и легко вычисляется через повторный интеграл:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} x^2 y^2 d\sigma &= \sqrt{2} \iint_{D_{\rho\varphi}} \rho^2 \cos^2 \varphi \cdot \rho^2 \cdot \rho d\rho d\varphi = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2 \varphi \int_0^a \rho^5 d\rho = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi (1 + \cos 2\varphi) \frac{\rho^6}{6} \Big|_0^a = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \frac{a^6}{6} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} a^6. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\pi\sqrt{2}}{6} a^6$.

Замечание 4.5

1. Пусть f – функция с областью определения D и областью значений E , т. е. $f : D \rightarrow E$. Тогда множество E иногда называют образом множества D , а множество D – прообразом множества E при отображении f .

2. Подчеркнем очевидный факт: координаты y , z и область D_{yz} нам известны изначально (т. е. первичны), координаты же ρ , φ и область $D_{\rho\varphi}$ по ним отыскиваются (а значит, они – вторичны).

Пример 4.2. Вычислить $\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma$, где σ – поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Решение

В соответствии с замечанием 4.4 из уравнения сферы находим $z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, где знак «+» определяет верхнюю (σ_1), а знак «-» – нижнюю (σ_2) половины сферы σ . Тем самым искомый поверхностный интеграл, учитывая замечание 4.3 и свойство 2° для поверхностного интеграла первого рода, преобразуется к виду:

$$\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma = \iint_{\sigma_1} (x^2 + y^2) d\sigma + \iint_{\sigma_2} (x^2 + y^2) d\sigma = 2 \iint_{\sigma_1} (x^2 + y^2) d\sigma.$$

Поскольку верхняя половина сферы σ_1 задана однозначной функцией $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, а ее проекцией на плоскость Oxy является круг $D_{xy} = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$, то для вычисления поверхностного интеграла в последнем выражении по поверхности σ_1 воспользуемся формулой (4.11). Для этого находим:

$$z'_x = \left(\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right)'_x = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

$$z'_y = \left(\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right)'_y = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Тогда в соответствии с формулой (4.11) получим:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma &= 2 \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \\ &= 2R \iint_{D_{xy}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy. \end{aligned}$$

Для вычисления полученного двойного интеграла перейдем к полярным координатам $(\rho; \varphi)$ по формулам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Тогда область $D_{xy} = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ будет образом области $D_{\rho\varphi}$: $\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi \leq R^2$ или $\rho^2 \leq R^2$, откуда $D_{\rho\varphi} = \{(\rho; \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq R,$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$ }. Наконец, принимая во внимание, что якобиан отображения $D_{\rho\varphi} \rightarrow D_{xy}$ равен ρ , сводим искомый поверхностный интеграл к двойному интегралу по области $D_{\rho\varphi}$, который легко вычисляется через повторный интеграл:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma &= 2R \iint_{D_{\rho\varphi}} \frac{\rho^2}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \rho d\rho d\varphi = 2R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\rho^2 \rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = \\ &= 2R\varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^R \frac{\rho^2 d(\rho^2)}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = \left. \begin{aligned} &t = R^2 - \rho^2, \quad dt = -d(\rho^2), \\ &\rho = 0 : t = R^2; \quad \rho = R : t = 0. \end{aligned} \right\} = \\ &= 2\pi R \int_{R^2}^0 \frac{(R^2 - t)(-dt)}{\sqrt{t}} = 2\pi R \int_0^{R^2} \left(\frac{R^2}{\sqrt{t}} - \sqrt{t} \right) dt = 2\pi R \left(2R^2 \sqrt{t} - \frac{2}{3} t^{3/2} \right) \Big|_0^{R^2} = \\ &= 4\pi R \left(R^3 - \frac{1}{3} R^3 \right) = \frac{8}{3} \pi R^4. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{8}{3} \pi R^4$.

4.3. Поверхностный интеграл второго рода: определение, свойства и вычисление

Поверхностный интеграл второго рода вводится так же, как и криволинейный интеграл второго рода. Для этого рассмотрим двустороннюю гладкую или кусочно-гладкую поверхность σ , в каждой точке $M(x; y; z)$ которой определены векторное поле $\vec{F} = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}$ и единичный вектор нормали

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}(M)}{|\vec{N}(M)|} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma), \quad (4.15)$$

где α, β, γ – углы, которые единичный вектор нормали \vec{n} к выбранной стороне поверхности σ в произвольной точке $M(x; y; z)$ образует с осями координат $0x, 0y, 0z$, соответственно (рис. 4.1).

Отметим, что если поверхность σ задана в неявном виде уравнением (4.14), то направляющие косинусы единичного вектора нормали этой поверхности определяются формулами:

$$\cos \alpha = \pm \frac{\partial \Phi / \partial x}{|\text{grad } \Phi|}, \quad \cos \beta = \pm \frac{\partial \Phi / \partial y}{|\text{grad } \Phi|}, \quad \cos \gamma = \pm \frac{\partial \Phi / \partial z}{|\text{grad } \Phi|}, \quad (4.16)$$

где $\text{grad } \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{k}$.

Здесь знак \pm должен быть согласован с выбранной стороной поверхности.

Как и в случае поверхностного интеграла первого рода разобьем поверхность σ кусочно-гладкими кривыми на n частей $\Delta \sigma_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). В каждой из частей $\Delta \sigma_i$ выберем произвольную точку $M'_i(x'_i; y'_i; z'_i)$. Введем обозначения $\Delta \sigma_i$ – площадь области $\Delta \sigma_i$, $\vec{F}(M'_i)$ – значение векторной функции \vec{F} в точке M'_i , $\vec{n}(M'_i)$ – значение вектора нормали области $\Delta \sigma_i$ в точке M'_i и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}(M'_i) \cdot \vec{n}(M'_i) \Delta \sigma_i.$$

Определение 4.6. Если существует предел интегральных сумм

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}(M'_i) \cdot \vec{n}(M'_i) \Delta \sigma_i,$$

когда $\max \text{diam } \Delta \sigma_i \rightarrow 0$, не зависящий как от способа разбиения поверхности σ кусочно-гладкими кривыми на части $\Delta \sigma_i$, так и от выбора точек $M'_i(x'_i; y'_i; z'_i)$ в каждой из них, то этот предел называют *поверхностным интегралом второго рода* от векторной функции \vec{F} по ориентируемой поверхности σ , определяемой единичным вектором нормали \vec{n} , и обозначают

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Итак, по определению

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iint_{\sigma} [X(x, y, z) \cos \alpha + Y(x, y, z) \cos \beta + Z(x, y, z) \cos \gamma] d\sigma = \\ &= \lim_{\max \text{diam } \Delta \sigma_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{F}(M'_i) \cdot \vec{n}(M'_i) \Delta \sigma_i. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Замечание 4.6

Физический смысл поверхностного интеграла второго рода: если под вектором \vec{F} подразумевать вектор скорости течения жидкости в данной точке, то поверхностный интеграл второго рода (4.17) дает общее количество жидкости, протекающей в единицу времени через поверхность σ в направлении вектора \vec{n} , и называется потоком Π векторного поля \vec{F} через поверхность σ . Используется запись:

$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Свойства поверхностного интеграла второго рода

1°. *Свойство линейности.* Если для каждой из векторных функций \vec{F}_1 и \vec{F}_2 существуют поверхностные интегралы второго рода по поверхности σ , и если C_1, C_2 – произвольные постоянные, то для функции $C_1\vec{F}_1 + C_2\vec{F}_2$ также существует поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , причем

$$\iint_{\sigma} (C_1\vec{F}_1 + C_2\vec{F}_2) \cdot \vec{n} d\sigma = C_1 \iint_{\sigma} \vec{F}_1 \cdot \vec{n} d\sigma + C_2 \iint_{\sigma} \vec{F}_2 \cdot \vec{n} d\sigma. \quad (4.18)$$

2°. *Свойство аддитивности.* Если поверхность σ составлена из двух поверхностей σ_1 и σ_2 , и если для функции \vec{F} существует поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , то для этой функции существуют и поверхностные интегралы второго рода по каждой из поверхностей σ_1 и σ_2 , причем

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma_1} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma + \iint_{\sigma_2} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma. \quad (4.19)$$

3°. Поверхностный интеграл второго рода меняет свой знак на обратный при изменении стороны поверхности, т. е.

$$\iint_{\sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = - \iint_{\sigma^-} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma. \quad (4.20)$$

Замечание 4.7

В случае замкнутой гладкой поверхности σ поверхностный интеграл второго рода обозначают символом

$$\oiint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Вычисление поверхностного интеграла второго рода

Вычисление поверхностного интеграла второго рода основано на сведении его к двойному интегралу. Так, если поверхность σ задана параметрически посредством радиус-вектора $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = (x(u, v); y(u, v); z(u, v))$ в ограниченной замкнутой области D плоскости $(u; v)$, то принимая во внимание соотношения (4.1) и (4.8), поверхностный интеграл второго рода (4.17) сводится к двойному интегралу по области D :

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_D \vec{F} \cdot \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} |\vec{N}| dudv = \iint_D \vec{F} \cdot \vec{N} \Big|_{\substack{x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v)}} dudv. \quad (4.21)$$

В том случае, если поверхность σ задается явно, то вычисление поверхностного интеграла второго рода (4.17) удобно проводить по одной из следующих формул.

1. Если поверхность σ задана явно непрерывно дифференцируемой функцией $z = z(x, y)$, $(x; y) \in D_{xy}$, где D_{xy} – проекция поверхности σ на плоскость Oxy , то поверхность σ параметризуют, полагая $u = x$, $v = y$. Тогда вместо (4.21) получим

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \pm \iint_{D_{xy}} \vec{F} \cdot \vec{N} \Big|_{z=z(x,y)} dx dy, \quad (4.22)$$

где знак плюс (минус) берется тогда, когда интегрирование в левой части (4.22) ведется по стороне поверхности σ , для которой $\cos \gamma > 0$ ($\cos \gamma < 0$); $\vec{N} = (-z'_x; -z'_y; 1)$ есть вектор нормали к поверхности σ , а запись $\vec{F} \cdot \vec{N} \Big|_{z=z(x,y)}$ означает, что в этом скалярном произведении переменную z необходимо заменить на функцию $z(x, y)$.

2. Если поверхность σ задана явно непрерывно дифференцируемой функцией $y = y(x, z)$, $(x; z) \in D_{xz}$, где D_{xz} – проекция поверхности σ на плоскость Oxz , то поверхность σ параметризуют, полагая $u = z$, $v = x$. Тогда вместо (4.21) будем иметь

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \pm \iint_{D_{xz}} \vec{F} \cdot \vec{N} \Big|_{y=y(x,z)} dx dz, \quad (4.23)$$

где знак плюс (минус) берется тогда, когда интегрирование в левой части (4.23) ведется по стороне поверхности σ , для которой $\cos\beta > 0$ ($\cos\beta < 0$); $\vec{N} = (-y'_x; 1; -y'_z)$ есть вектор нормали к данной поверхности, а запись $\vec{F} \cdot \vec{N} \Big|_{y=y(x,z)}$ означает, что в этом скалярном произведении переменную y необходимо заменить на функцию $y(x, z)$.

3. Если поверхность σ задана явно непрерывно дифференцируемой функцией $x = x(y, z)$, $(y; z) \in D_{yz}$, где D_{yz} – проекция поверхности σ на плоскость Oyz , то поверхность σ параметризуют, полагая $u = y$, $v = z$. Тогда вместо (4.21) будем иметь:

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \pm \iint_{D_{yz}} \vec{F} \cdot \vec{N} \Big|_{x=x(y,z)} dydz, \quad (4.24)$$

где знак плюс берется при $\cos\alpha > 0$, знак минус – при $\cos\alpha < 0$; $\vec{N} = (1; -x'_y; -x'_z)$ – вектор нормали к данной поверхности, а запись $\vec{F} \cdot \vec{N} \Big|_{x=x(y,z)}$ означает как и ранее, что здесь теперь переменную x необходимо заменить на функцию $x(y, z)$.

Замечание 4.8

Если поверхность σ задана уравнением (4.14), которое можно разрешить однозначно относительно одной из переменных, то при вычислении поверхностного интеграла второго рода (4.17) удобно воспользоваться одной из формул (4.22)–(4.24), т. е. нет необходимости прибегать к проектированию на все три координатные плоскости. Если же незамкнутая поверхность σ неоднозначно проектируется на координатные плоскости, то ее необходимо разбить на части, которые однозначно проектируются на одну из координатных плоскостей.

Пример 4.3. Вычислить

$$\iint_{\sigma} [(3x + z) \cos\alpha + (3x + 3) \cos\beta + (y + z) \cos\gamma] d\sigma,$$

где σ – верхняя сторона части плоскости $6x + 3y + z = 6$, расположенная в первом октанте.

Решение

Векторное поле $\vec{F} = (3x + z; 3x + 3; y + z)$. Поскольку поверхность σ однозначно проектируется на плоскость Oxy , причем $D_{xy} : \{6x + 3y = 6, x = 0, y = 0\}$ (рис. 4.5), то, принимая во внимание

замечание 4.8, воспользуемся формулой (4.22). Для этого из уравнения плоскости σ находим $z = 6 - 6x - 3y$, откуда $z'_x = -6$, $z'_y = -3$. Следовательно, вектор нормали $\vec{N} = (-z'_x; -z'_y; 1) = (6; 3; 1)$, причем $\cos \gamma > 0$, т. к. σ – верхняя сторона части искомой плоскости. Тогда, применяя формулу (4.22), получим

$$\begin{aligned} & \iint_{\sigma} [(3x + z) \cos \alpha + (3x + 3) \cos \beta + (y + z) \cos \gamma] d\sigma = \\ & = \iint_{D_{xy}} [6(3x + z) + 3(3x + 3) + (y + z)]_{z=6-6x-3y} dx dy = \\ & = \iint_{D_{xy}} [6(3x + 6 - 6x - 3y) + 9x + 9 + y + 6 - 6x - 3y] dx dy = \\ & = \iint_{D_{xy}} (-15x - 20y + 51) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} (-15x - 20y + 51) dy = \\ & = \int_0^1 dx (-15xy - 10y^2 + 51y) \Big|_0^{2-2x} = \int_0^1 dx [-15x(2 - 2x) - 10(2 - 2x)^2 + \\ & + 51(2 - 2x)] = \int_0^1 dx [-30x + 30x^2 - 40(1 - x)^2 + 102 - 102x] = \\ & = \int_0^1 dx [30x^2 - 132x + 102 - 40(x - 1)^2] = 10x^3 - 66x^2 + 102x - \\ & - \frac{40}{3}(x - 1)^3 \Big|_0^1 = 10 - 66 + 102 - \frac{40}{3} = 46 - \frac{40}{3} = \frac{98}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{98}{3}$.

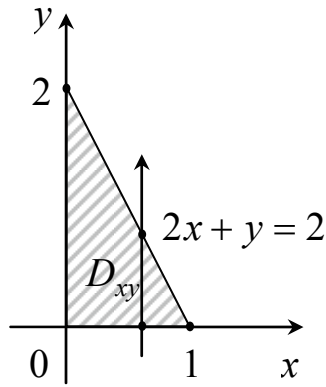


Рис. 4.5

Пример 4.4. Найти поток векторного поля $\vec{F} = (-x; 2y; -z)$ через поверхность σ , представляющую собой внешнюю сторону верхней части ($z \geq 0$) параболоида $y = x^2 + z^2$, отсеченную плоскостью $y = 4$.

Решение

Построим поверхность σ , для которой $\cos \beta < 0$, т. к. σ – внешняя сторона верхней части параболоида (рис. 4.6). Поскольку она однозначно проецируется на плоскость Oxz в область $D_{xz} = \{(x; z) \mid x^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$ (рис. 4.7), то воспользуемся формулой (4.23). Для этого из уравнения поверхности $y = x^2 + z^2$ находим $y'_x = 2x$, $y'_z = 2z$.

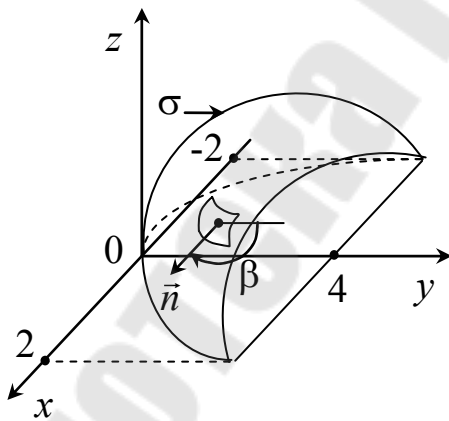


Рис. 4.6

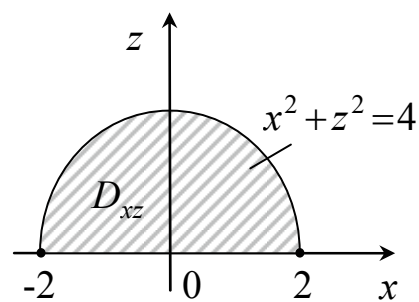


Рис. 4.7

Следовательно, вектор нормали $\vec{N} = (-y'_x; 1; -y'_z) = (-2x; 1; -2z)$. Тогда поток Π найдем по формуле (4.23):

$$\begin{aligned}
\Pi &= \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = - \iint_{D_{xz}} \vec{F} \cdot \vec{N} \Big|_{y=y(x,z)} dx dz = \\
&= - \iint_{D_{xz}} [-x(-2x) + 2y \cdot 1 - z(-2z)] \Big|_{y=x^2+z^2} dx dz = \\
&= -2 \iint_{D_{xz}} (x^2 + x^2 + z^2 + z^2) dx dz = -4 \iint_{D_{xz}} (x^2 + z^2) dx dz.
\end{aligned}$$

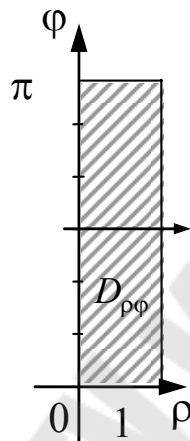


Рис. 4.8

Для вычисления полученного двойного интеграла сделаем замену переменных $x = 2\rho \cos \varphi$, $z = 2\rho \sin \varphi$. Тогда область $D_{xz} = \{(x; z) \mid x^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$ будет образом области $D_{\rho\varphi}$: $4\rho^2 \cos^2 \varphi + 4\rho^2 \sin^2 \varphi \leq 4$, $2\rho \sin \varphi \geq 0$ или $\rho^2 \leq 1$, $\sin \varphi \geq 0$, откуда $D_{\rho\varphi} = \{(\rho; \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$ (рис. 4.8). Наконец, принимая во внимание, что якобиан отображения $D_{\rho\varphi} \rightarrow D_{xz}$ равен 4ρ , искомый поток Π выразится через двойной интеграл по области $D_{\rho\varphi}$ (рис. 4.8), который легко вычисляется через повторный интеграл:

$$\begin{aligned}
\Pi &= -4 \iint_{D_{\rho\varphi}} (4\rho^2 \cos^2 \varphi + 4\rho^2 \sin^2 \varphi) 4\rho d\rho d\varphi = -64 \iint_{D_{\rho\varphi}} \rho^3 d\rho d\varphi = \\
&= -64 \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho = -64 \varphi \Big|_0^\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^1 = -16\pi.
\end{aligned}$$

Ответ: $\Pi = -16\pi$.

ГЛАВА 5. ТРИ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

5.1. Некоторые сведения из теории поля

Применение интегрального исчисления к задачам механики и математической физики очень часто удобнее проводить в векторной форме. Поэтому приведем некоторые основные понятия векторного анализа, которые позволяют дать физическую интерпретацию рассмотренных ранее интегральных образований и связывающих их формул интегрального исчисления.

Определение 5.1. Если в каждой точке $M(x; y; z)$ области V определена скалярная функция

$$u = u(M) = u(x, y, z),$$

то говорят, что в области V задано скалярное поле $u = u(x, y, z)$.

Примерами скалярных полей являются поле температуры или электрического потенциала.

Поверхности, определяемые уравнением $u(x, y, z) = C$, где $C = \text{const}$, называют поверхностями уровня. Если поле плоское, т. е. $u = u(x, y)$, то уравнение $u(x, y) = C = \text{const}$ определяет линии уровня. Примерами поверхностей (линий) уровня являются: изотермы – поверхности (линии) постоянной температуры, изохоры – поверхности (линии) постоянного объема, изобары – поверхности (линии) постоянного давления. При этом поверхности уровня между собой не пересекаются.

Определение 5.2. Если в каждой точке $M(x; y; z)$ области V определена векторная функция

$$\vec{F} = \vec{F}(M) = \vec{F}(\vec{r}) = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}, \quad (5.1)$$

где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ есть радиус-вектор точки $M(x; y; z)$, то говорят, что в области V задано векторное поле \vec{F} .

Примерами векторных полей могут служить силовое поле или поле скоростей.

Линия, направление которой в каждой точке $M(x; y; z)$ совпадает с направлением вектора $\vec{F} = \vec{F}(M)$, называется векторной линией. Поскольку направляющие косинусы касательной к кривой пропорциональны дифференциалам dx , dy , dz , то для векторной линии поля \vec{F} справедливы равенства

$$\frac{dx}{X(x, y, z)} = \frac{dy}{Y(x, y, z)} = \frac{dz}{Z(x, y, z)}. \quad (5.2)$$

При этом векторные линии между собой не пересекаются.

Поверхности, образованные векторными линиями, называются векторными поверхностями. Если в рассматриваемой области пространства взять какую-нибудь замкнутую линию, отличную от векторных линий, и через каждую ее точку провести векторную линию, то образованная ими трубкообразная векторная поверхность называется векторной трубкой.

Напомним, что градиентом скалярного поля $u = u(x, y, z)$ в точке $M(x; y; z)$ называют вектор

$$\text{grad } u = \vec{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \quad (5.3)$$

при условии, что все частные производные существуют и вычисляются в точке M .

Здесь $\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ есть оператор Гамильтона (читается

как «набла»). При этом направление градиента совпадает с направлением нормали к поверхности уровня $u(x, y, z) = C$, проходящей через данную точку.

Пример 5.1. Найти поле ньютоновского притяжения, создаваемого массой m .

Решение

Пусть масса m сосредоточена в точке O . Обозначим через \vec{r} радиус-вектор \overline{OM} , соединяющий точку O с произвольной точкой $M(x; y; z)$ пространства. Положим

$$u(M) = \frac{m}{r}, \quad r = |\vec{r}|.$$

При этом поверхностями уровня, очевидно, будут сферы радиуса r с центром в точке O , так что направление градиента будет противоположно направлению вектора \vec{r} . Тогда легко видеть, что напряжение \vec{F} поля ньютоновского притяжения в точке $M(x; y; z)$ будет

$$\vec{F} = \text{grad} \frac{m}{r} = -\frac{m}{r^3} \vec{r}.$$

Пример 5.2. Найти количество тепла, протекающего через элемент поверхности.

Решение

Рассмотрим поле температуры $u = u(x, y, z, t)$. Подсчитаем количество dQ тепла, протекающего через элемент поверхности $d\sigma$ в направлении единичного вектора ее внешней нормали \vec{n} за бесконечно малый промежуток времени dt . Тепло течет от более нагретых частей среды к менее нагретым, и притом тем быстрее, чем быстрее убывает температура, а также зависит от свойств среды. Тем самым можно считать, что элементарное количество тепла dQ пропорционально $d\sigma$, dt и $\frac{\partial u}{\partial n}$, т. е.

$$dQ = -k \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma dt = -k \operatorname{grad} u \cdot \vec{n} d\sigma dt,$$

где коэффициент пропорциональности $k > 0$ зависит от свойств среды – коэффициент внутренней теплопроводности среды.

Определение 5.3. *Дивергенцией* или *расходимостью* векторного поля (5.1) в точке $M(x; y; z)$ называется скаляр

$$\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \quad (5.4)$$

при условии, что все частные производные существуют.

Замечание 5.1

Физический смысл дивергенции: если под векторным полем \vec{F} подразумевать вектор скорости \vec{v} течения жидкости в данной точке, то $\operatorname{div} \vec{v}$ представляет собой плотность источников этого поля.

Определение 5.4. *Ротором* (или *вихрем*) векторного поля (5.1) в точке $M(x; y; z)$ называется вектор

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \vec{k} \end{aligned} \quad (5.5)$$

при условии, что все частные производные существуют.

Замечание 5.2

Физический смысл ротора: если под векторным полем \vec{F} подразумевать вектор скорости \vec{v} точек твердого тела, то ротор поля скорости \vec{v} дает с точностью до числового множителя мгновенную угловую скорость: $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}$.

Определение 5.5. Векторное поле \vec{F} называется *потенциальным* в области V , если в каждой точке $M(x; y; z) \in V$ существует такая скалярная функция $u(x, y, z)$, что справедливо представление

$$\vec{F} = \text{grad } u. \quad (5.6)$$

Функция $u(x, y, z)$ называется потенциалом поля \vec{F} . Из равенств (5.1) и (5.6) следуют три равенства:

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (5.7)$$

Это означает, что выражение $Xdx + Ydy + Zdz$ является полным дифференциалом от функции $u(x, y, z)$.

Определение 5.6. Векторное поле \vec{F} называется *безвихревым* в области V , если в каждой точке $M(x; y; z) \in V$

$$\text{rot } \vec{F} = 0. \quad (5.8)$$

Замечание 5.3

Для того, чтобы векторное поле \vec{F} в области V было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы во всей рассматриваемой области оно было безвихревым. В этом случае существует потенциал поля $u(x, y, z)$, который определяется из системы уравнений (5.7). Примерами потенциальных полей являются поле ньютоновского притяжения (гравитационное поле) и электростатическое поле.

Определение 5.7. Векторное поле \vec{F} называется *соленоидальным* в области V , если в каждой точке $M(x; y; z) \in V$ существует такая векторная функция \vec{A} , что справедливо представление

$$\vec{F} = \text{rot } \vec{A}. \quad (5.9)$$

Функция \vec{A} называется векторным потенциалом поля \vec{F} . Из равенств (5.1) и (5.9) следует три равенства:

$$X = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad Z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \quad (5.10)$$

Замечание 5.4

Для того, чтобы поле \vec{F} было соленоидальным в области V , необходимо и достаточно, чтобы во всей рассматриваемой области выполнялось равенство

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0. \quad (5.11)$$

Примером соленоидального поля является магнитное поле.

Заметим, что произвольное поле \vec{F} всегда может быть представлено в виде суммы потенциального поля \vec{A} и соленоидального поля \vec{B} :

$$\vec{F} = \vec{A} + \vec{B}, \quad (\operatorname{rot} \vec{A} = 0, \operatorname{div} \vec{B} = 0). \quad (5.12)$$

Пример 5.3. Проверить потенциальность и соленоидальность векторного поля $\vec{F} = (6x + 7yz)\vec{i} + (6y + 7xz)\vec{j} + (6z + 7xy)\vec{k}$. В случае потенциальности поля найти его потенциал.

Решение

По условию имеем: $X = 6x + 7yz$, $Y = 6y + 7xz$, $Z = 6z + 7xy$. Тогда, пользуясь определением ротора (5.5), находим:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = (6z + 7xy)'_y - (6y + 7xz)'_z = 7x - 7x = 0,$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = (6x + 7yz)'_z - (6z + 7xy)'_x = 7y - 7y = 0,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = (6y + 7xz)'_x - (6x + 7yz)'_y = 7z - 7z = 0.$$

Таким образом, условие потенциальности поля (5.8) выполнено. Следовательно, для данного поля \vec{F} существует потенциал поля $u(x, y, z)$, который определяется из системы уравнений (5.7):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x + 7yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6y + 7xz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 6z + 7xy. \quad (5.7')$$

Отсюда, интегрируя, например, первое уравнение, находим:

$$u = \int \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int (6x + 7yz) dx = 3x^2 + 7xyz + \varphi(y, z).$$

Далее, из второго уравнения системы (5.7') после подстановки в него найденного выражения для функции u , получим:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 7xz + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 6y + 7xz \text{ или } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 6y.$$

Теперь, проинтегрировав полученное уравнение, находим функцию φ :

$$\varphi = \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = \int 6y dy = 3y^2 + \psi(z).$$

Тогда потенциал u будет иметь вид

$$u = 3x^2 + 3y^2 + 7xyz + \psi(z).$$

Наконец, используя третье уравнение системы (5.7') и подставляя в него последнее выражение для поля u , будем иметь:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 7xy + \frac{\partial \psi}{\partial z} = 6z + 7xy \text{ или } \frac{\partial \psi}{\partial z} = 6z.$$

Отсюда, интегрируя, находим:

$$\psi = \int 6z dz = 3z^2 + C.$$

Итак, потенциал поля u определяется с точностью до произвольной постоянной C :

$$u = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 7xyz + C.$$

Теперь проверим условие (5.11) соленоидальности векторного поля. По определению дивергенции (5.4) имеем

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} (6x + 7yz) + \frac{\partial}{\partial y} (6y + 7xz) + \frac{\partial}{\partial z} (6z + 7xy) = 18 \neq 0.$$

Следовательно, данное поле \vec{F} не является соленоидальным.

Ответ: поле несолоноидальное, потенциальное и его потенциал равен $u = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 7xyz + C$.

5.2. Теоремы (формулы) Стокса и Грина

Пусть σ – кусочно-гладкая, двусторонняя поверхность, ограниченная кусочно-гладким контуром λ . Будем считать, что в области V ,

содержащей поверхность σ , задано векторное поле (5.1), непрерывное в этой области вместе со своими частными производными. Тогда имеет место теорема Стокса:

Циркуляция векторного поля \vec{F} вдоль замкнутого контура λ равна потоку ротора этого поля через поверхность σ , ограниченную этим контуром, т. е.

$$\oint_{\lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\sigma} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma \quad (5.13)$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} \oint_{\lambda} Xdx + Ydy + Zdz = \iint_{\sigma} & \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \cos \beta + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma. \end{aligned} \quad (5.14)$$

При этом направление обхода контура λ и сторона поверхности σ , определяемая единичным вектором нормали \vec{n} (4.15), должны быть согласованы (рис. 5.1), как это разъяснено в определении 4.4. Формулу (5.13) или (5.14) называют формулой Стокса.

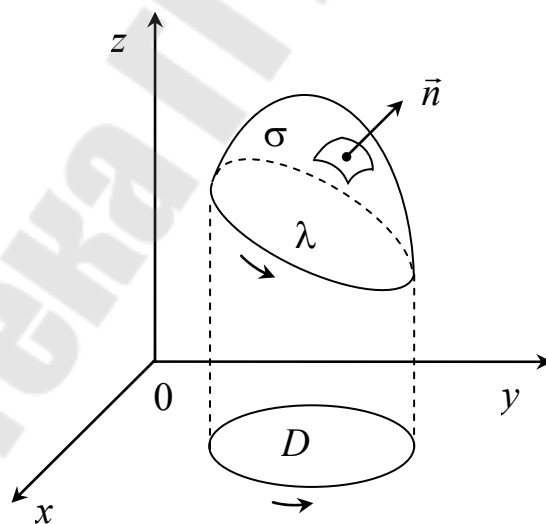


Рис. 5.1

Замечание 5.5

Если поверхность σ представляет собой часть плоскости, параллельной плоскости Oxy или совпадающей с ней (рис. 5.1), то

$dz = 0$, $\alpha = \beta = \pi/2$, $\gamma = 0$, и вместо формулы Стокса (5.14) мы получим формулу Грина

$$\oint_L Xdx + Ydy = \iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dxdy. \quad (5.15)$$

Замечание 5.6

Из формулы (5.13) следует, что если $\text{rot } \vec{F} = 0$, т. е. поле \vec{F} в соответствии с замечанием 5.3 является потенциальным, то криволинейный интеграл второго рода по любой замкнутой пространственной кривой λ равен 0:

$$\oint_{\lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (5.16)$$

Отсюда также следует, что для потенциального поля \vec{F} криволинейный интеграл второго рода не зависит от формы кривой интегрирования λ . Таким образом, условия (5.8) и (5.16) представляют собой дифференциальную и интегральную формы необходимого и достаточного условия потенциальности поля \vec{F} . При этом для такого поля существует потенциал u , который определяется из системы уравнений (5.7).

Пример 5.4. Показать, что циркуляция скорости потенциального течения идеальной жидкости по любому замкнутому контуру постоянна во времени (теорема Томсона).

Решение

Рассмотрим внутри идеальной линии замкнутую линию λ в произвольный момент времени t . Тогда циркуляция скорости $\vec{v} = d\vec{r} / dt$

$$J = \oint_{\lambda} \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

может быть продифференцирована по времени t по правилу Лейбница:

$$\frac{dJ}{dt} = \oint_{\lambda} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} + \oint_{\lambda} \vec{v} \cdot d\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \oint_{\lambda} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} + \oint_{\lambda} \vec{v} \cdot d\vec{v} = \oint_{\lambda} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r},$$

т. к. $\oint_{\lambda} \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} \oint_{\lambda} d(\vec{v}^2) = \frac{1}{2} \vec{v}^2 \Big|_{\lambda} = 0.$

Поскольку течение рассматриваемой жидкости является потенциальным, а, значит, $\text{rot } \vec{v} = 0$, то по теореме Стокса (5.13)

$$\frac{dJ}{dt} = \oint_{\lambda} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \iint_{\sigma} \text{rot} \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right) \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma} \frac{d}{dt} (\text{rot } \vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma = 0,$$

т. е. $J = \text{const}$.

Отсюда, как простое следствие, получается утверждение Лагранжа: *если рассматриваемая масса жидкости не имеет вихрей в некий определенный момент времени, то она не может иметь вихрей в любой другой момент времени.*

5.3. Теорема (формула) Остроградского

Рассмотрим трехмерную область V , ограниченную кусочно-гладкой поверхностью σ ; через \vec{n} обозначим единичный вектор внешней нормали к поверхности σ . Пусть векторное поле \vec{F} (5.1) определено и непрерывно вместе со своими частными производными в области V , включая ее границу σ . Тогда имеет место теорема Остроградского:

Поток векторного поля \vec{F} через замкнутую поверхность σ в направлении единичного вектора ее внешней нормали \vec{n} равен тройному интегралу от дивергенции этого поля по объему V , ограниченного этой поверхностью, т. е.

$$\oiint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \text{div } \vec{F} dV \quad (5.17)$$

или в развернутом виде

$$\oiint_{\sigma} (X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma) d\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dV. \quad (5.18)$$

Формулу (5.17) или (5.18) называют формулой Остроградского (или Остроградского-Гаусса).

Замечание 5.7

Формуле Остроградского можно дать физическую интерпретацию. Если под вектором \vec{F} понимать вектор скорости жидкости, протекающей через область V , тогда поверхностный интеграл в формуле (5.17) дает количество жидкости, вытекающей из области V через поверхность σ в единицу времени (или втекающей в область V ,

если этот интеграл отрицателен). Тем самым это количество жидкости выражается через тройной интеграл от $\operatorname{div} \vec{F}$ по области V .

Замечание 5.8

Из формулы (5.17) следует, что если $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, т. е. поле \vec{F} в соответствии с замечанием 5.4 является соленоидальным, то поток этого поля по любой замкнутой поверхности σ равен нулю:

$$\oiint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = 0, \quad (5.19)$$

т. е. количество жидкости, вытекающей (или втекающей) через любую замкнутую поверхность σ , будет равно нулю (отсутствуют источники). Точнее говоря, количество жидкости, втекающей внутрь области, равно количеству жидкости, вытекающей из этой области.

Замечание 5.9

Формулы Стокса, Грина и Остроградского объединены одной идеей: они выражают интеграл, распространенный на некоторый геометрический образ, через интеграл, взятый по границе этого образа. При этом формула Грина относится к случаю двумерного пространства, формула Стокса – также к случаю двумерного, но неплоского пространства, а формула Остроградского – к случаю трехмерного пространства.

Отметим также, что формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

можно рассматривать, как некоторый аналог этих формул для одномерного пространства.

Пример 5.5. Вывести основное уравнение движения идеальной жидкости.

Решение

Будем считать, что на жидкость действуют как внешние, так и внутренние силы. Внешние силы будем считать пропорциональными массе, так что, если \vec{F} есть сила, действующая на единицу массы, то на элемент жидкости dV плотности ρ будет действовать сила $\vec{F}\rho dV$, а, следовательно, на весь выделенный объем V будет действовать сила $\iiint_V \vec{F}\rho dV$.

Поскольку жидкость является идеальной, то внутренние силы, действующие на выделенный из жидкости объем V со стороны остальной жидкости, представляют собой давление p , приходящееся на единицу площади, и направлено внутрь объема V по нормали \vec{n} к поверхности σ , ограничивающей этот объем. Значит, на элемент поверхности $\Delta\sigma$ действует сила $-\vec{n}pd\sigma$. Тогда на весь выделенный объем V будет действовать сила $-\iint_{\sigma}\vec{n}pd\sigma$, или, применяя формулу

Остроградского, получим

$$-\iint_{\sigma}\vec{n}pd\sigma = -\iiint_V \text{grad } pdV.$$

Если теперь $\frac{d\vec{v}}{dt}$ есть ускорение, отвечающее элементу dV жидкости, то $\iiint_V \frac{d\vec{v}}{dt} \rho dV$ есть ускорение выделенного объема V жидкости. Следовательно, по второму закону Ньютона получим уравнение движения

$$\iiint_V \frac{d\vec{v}}{dt} \rho dV = \iiint_V \vec{F} \rho dV - \iiint_V \text{grad } pdV,$$

откуда, в силу произвольности выбора объема V , окончательно имеем

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

Это и есть искомое уравнение движения идеальной жидкости в векторной форме.

Пример 5.6. Получить уравнение неразрывности жидкости при отсутствии источников.

Решение

Рассмотрим вновь движение жидкости при отсутствии источников. Количество жидкости Q , вытекающее из произвольного объема V в направлении вектора внешней нормали \vec{n} к поверхности σ , ограничивающей этот объем, и рассчитанное на единицу времени, дается, как следует из замечания 4.6, выражением

$$Q = \iint_{\sigma} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma,$$

которое с помощью формулы Остроградского преобразуется к виду

$$Q = \iiint_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV,$$

где ρ – плотность жидкости.

С другой стороны, изменение плотности ρ за промежуток dt на величину $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt$ означает, что масса ρdV элемента dV жидкости изменится на $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt dV$, а, следовательно, масса всего рассматриваемого объема V изменится на

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt.$$

Это количество жидкости должно за промежуток времени dt вытечь внутрь области V . Значит, изменив знак последнего выражения и разделив его на dt , получим количество жидкости Q , вытекающей из области V в единицу времени:

$$Q = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Поскольку оба выражения для Q должны быть равны, то, приравняв их, получим:

$$\iiint_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV,$$

откуда, в силу произвольности выбора объема V , окончательно имеем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

Это равенство и есть искомое уравнение неразрывности.

Пример 5.7. Вывести уравнение теплопроводности.

Решение

В качестве последнего примера применения формулы Остроградского рассмотрим процесс распространения тепла в пространстве при отсутствии источников тепла.

Используя результат примера 5.2, найдем, что количество тепла Q , протекающего через поверхность σ , ограничивающую произволь-

ный объем V пространства, в направлении единичного вектора ее внешней нормали \vec{n} за промежуток времени dt , дается выражением

$$Q = -\iint_{\sigma} k \operatorname{grad} u \cdot \vec{n} d\sigma dt,$$

которое с помощью формулы Остроградского преобразуется к виду

$$Q = -\iiint_V \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) dV dt.$$

Это тепло повлечет за собой изменение температуры u внутри области V за промежуток времени dt на величину $du = \frac{\partial u}{\partial t} dt$. Значит, количество тепла dQ , затраченное на это изменение температуры массы ρdV элемента dV области V на величину $\frac{\partial u}{\partial t} dt$, будет равно

$$dQ = c \frac{\partial u}{\partial t} dt \rho dV,$$

где c – теплоемкость вещества области V , а ρ – его плотность. Следовательно, общее количество тепла Q , затраченное на изменение температуры в области V за время dt , дается выражением

$$Q = \iiint_V c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV dt.$$

Поскольку оба выражения для Q должны быть равны, то, приравняв их, получим

$$-\iiint_V \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) dV dt = \iiint_V c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV dt,$$

откуда, в силу произвольности объема V , окончательно имеем искомое уравнение теплопроводности:

$$c \rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u).$$

В случае однородной среды (k – постоянное) оно принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u,$$

где $a^2 = -\frac{k}{c\rho}$ – коэффициент температуропроводности, а Δ – оператор Лапласа:

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

ГЛАВА 6. ОБЩИЙ ПОДХОД К ПОНЯТИЮ ИНТЕГРАЛА

6.1. Фигура, диаметр, мера

Фигурой называют любое множество точек. Например, это и линии в пространстве или на плоскости (в частности, это может быть отрезок оси), либо плоские области, либо поверхности в пространстве, либо некоторые пространственные тела.

Диаметром фигуры будем называть максимальное из расстояний между двумя точками этой фигуры. Например, для куба диаметр равен диагонали, для эллипса диаметр равен большой оси. Для круга и шара диаметр, определенный сейчас, совпадает с диаметром в обычном смысле слова. Мы будем считать, что все фигуры, с которыми мы работаем, имеют конечный диаметр (т. е. являются ограниченными).

Для различных типов фигур мы будем говорить об их мере. В случае линий под мерой будем понимать их длину. Для поверхностей (в частности, плоских фигур) под мерой будем понимать площадь. Наконец, в случае пространственных тел мерами будут служить объемы.

Примечание 6.1. В математике понятие меры играет очень важную роль. Ему даже посвящена отдельная математическая дисциплина под названием «Теория меры».

Понятно, что это понятие появилось как обобщение только что рассмотренных нами конкретных ситуаций.

6.2. Плотность массы

Рассматривая какую-либо фигуру, мы будем считать ее материальной, а значит, обладающей определенной массой. Так, отрезок $[a, b]$ мы будем считать очень тонким материальным стержнем, всеми размерами которого, кроме длины, мы пренебрегаем. Точно так же кривую Γ мы будем представлять в виде тонкого изогнутого матери-

ального стержня. Плоская область D и поверхность σ для нас это материальные пластинки (плоская и изогнутая), толщиной которых можно пренебречь.

Обычное определение плотности – количество массы в единице объема. Для дальнейшего нам потребуется следующая его конкретизация. Пусть P – некоторая точка тела T . Окружим точку P некоторой малой областью ΔV (рис. 6.1). Тогда средняя плотность тела в точке P есть $\rho_{\text{ср}} = \frac{\Delta m}{\Delta V}$, где Δm – масса элементарного объема ΔV .

А чтобы получить точное выражение для плотности тела в точке P нам придется в последнем равенстве перейти к пределу, устремив ΔV к нулю (т. е. стянуть элементарный объем в точку). Тогда

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}. \quad (6.1)$$

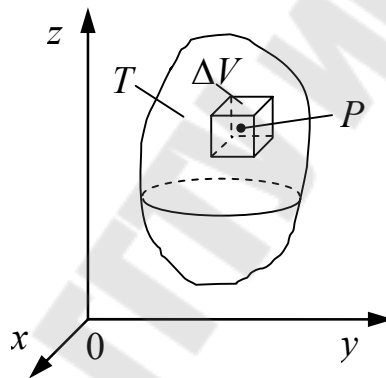


Рис. 6.1

В случае стержня определение плотности придется несколько модифицировать: мы будем говорить о линейной плотности как о количестве массы в единице длины:

$$\rho = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \rho_{\text{ср}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}, \quad (6.2)$$

где Δx – элементарная часть отрезка $[a, b]$, содержащая точку P , а Δm – ее масса (рис. 6.2).

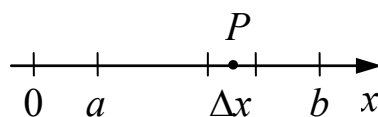


Рис. 6.2

Совершенно также определяется плотность в случае кривого стержня Γ в произвольной его точке P :

$$\rho = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta l}, \quad (6.3)$$

где Δl – элементарная часть кривой Γ , содержащая точку P ; Δm – ее масса (рис. 6.3).

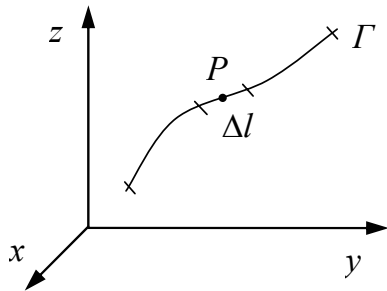


Рис. 6.3

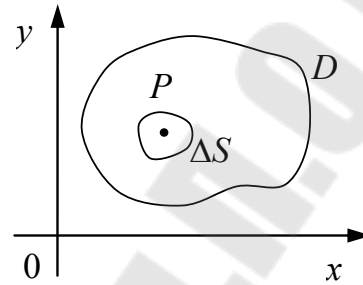


Рис. 6.4

Рассмотрим теперь случай плоской области (рис. 6.4). Пусть $P \in D$ и ΔS – некоторая элементарная часть области D , содержащая эту точку, а Δm – количество массы, приходящейся на площадку ΔS . Тогда поверхностная плотность ρ в точке P есть предел

$$\rho = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta S}. \quad (6.4)$$

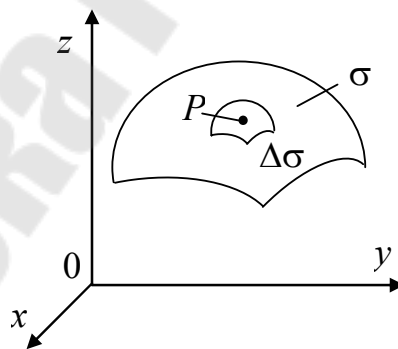


Рис. 6.5

Точно так же в случае изогнутой пластинки имеет место:

$$\rho = \lim_{\Delta \sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta \sigma}, \quad (6.5)$$

где $\Delta \sigma$ – площадь элементарной части поверхности σ , содержащей точку P и стягиваемая в эту точку, а Δm – масса этой части (рис. 6.5).

6.3. Задача о массе фигуры

Формулировка задачи. В каждой точке P фигуры Ω известна ее плотность $\rho = f(P)$. Найти массу фигуры.

Решение

Рассмотрим 5 ситуаций.

Ситуация 1

Фигура Ω есть отрезок $[a; b]$. Применим «принцип дробления», а именно: отрезок $[a; b]$ разобьем точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_{n-1} < b = x_n$ на n элементарных частей и будем считать («основное допущение»), что в пределах каждого из них плотность можно считать постоянной. Выберем внутри каждой элементарной части свою точку: $P_k \in [x_{k-1}, x_k]$, где $k = \overline{1, n}$ (рис. 6.6).

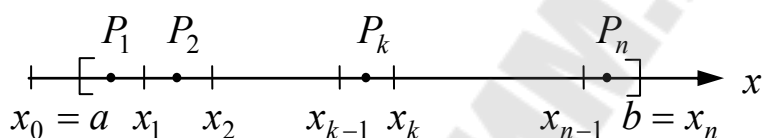


Рис. 6.6

Тогда можно считать, что плотность на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ равна $f(P_k)$. Согласно определению линейной плотности масса k -го элементарного отрезка приближенно равна:

$$\Delta m_k \approx f(P_k) \Delta x_k \quad (k = \overline{1, n}).$$

Для полной же массы стержня $[a, b]$ получаем:

$$M \approx \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta x_k. \quad (6.6)$$

Понятно, что данное приближенное равенство будет тем точнее, чем меньше будут взяты элементарные отрезки деления. Точное же равенство мы, очевидно, получим, если в равенстве (6.6) перейдем к пределу, устремив наибольшую из длин элементарных отрезков к нулю:

$$M \approx \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta x_k = \int_a^b f(P) dx, \quad (6.7)$$

где $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$.

Напомним, что $\int_a^b f(P)dx = \int_a^b f(x)dx$ есть обычный определенный интеграл (по отрезку $[a, b]$).

Примечание 6.2. Чтобы не вводить лишних обозначений, условимся при дроблении фигуры на части обозначать одинаковым образом как сами эти части, так и их меры.

Ситуация 2

Фигура Ω есть плоская область D . Разобьем произвольным образом пластинку D на n частей ΔS_k ($k = \overline{1, n}$). В каждой из полученных элементарных частей выберем произвольную точку (рис. 6.7): $P_k \in \Delta S_k$ ($k = \overline{1, n}$). Тогда плотность k -й части нам известна и равна $f(P_k)$ (разумеется, приближенно). Поэтому для массы пластинки D получаем приближенное равенство:

$$M \approx \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta S_k.$$

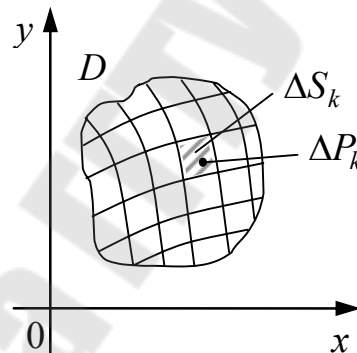


Рис. 6.7

Это равенство превратится в точное, если в нем перейти к пределу, устремив к нулю наибольший из диаметров λ элементарных частей: ΔS_k ($k = \overline{1, n}$):

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta S_k = \iint_D f(P) dS, \quad (6.8)$$

где $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \text{diam} \Delta S_k$.

Напомним, что $\iint_D f(P)dS = \iint_D f(x, y)dxdy$ есть двойной интеграл по области D .

Ситуация 3

Фигура Ω есть часть кривой Γ , заключенная между точками A и B (рис. 6.8). Разобьем кривую Γ на части Δl_k ($k = \overline{1, n}$), выберем на каждой части Δl_k по точке P_k и получим для массы приближенное равенство: $M \approx \sum_{k=1}^n f(P_k)\Delta l_k$. А затем и точное равенство:

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(P_k)\Delta l_k = \int_{\Gamma} f(P)dl, \quad (6.9)$$

где $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \text{diam} \Delta l_k$.

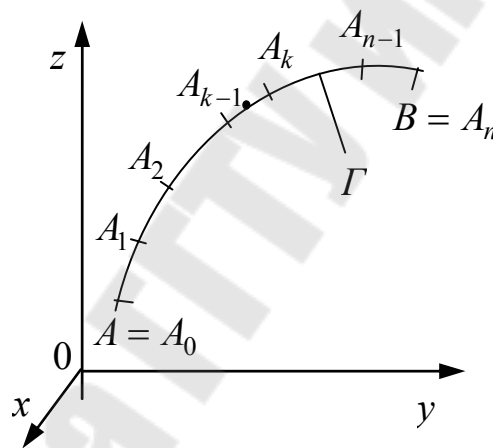


Рис. 6.8

Напомним, что $\int_{\Gamma} f(P)dl = \int_{\Gamma} f(x, y, z)dl$ есть криволинейный интеграл по длине дуги (или 1-го рода).

Ситуация 4

Фигура Ω есть поверхность σ (рис. 6.9). Тогда $M \approx \sum_{k=1}^n f(P_k)\Delta \sigma_k$, где $\Delta \sigma_k$ ($k = \overline{1, n}$) – элементарные части, на которые дробится поверхность σ (и их меры одновременно), $P_k \in \Delta \sigma_k$ – произвольные точки. Остальное как всегда:

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta \sigma_k = \iint_{\sigma} f(P) d\sigma, \quad (6.10)$$

где $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \text{diam} \Delta \sigma_k$.

Напомним, что $\iint_{\sigma} f(P) d\sigma = \iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma$ есть поверхностный интеграл по поверхности (или 1-го рода).

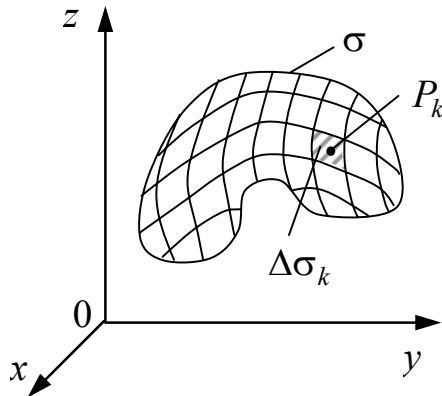


Рис. 6.9

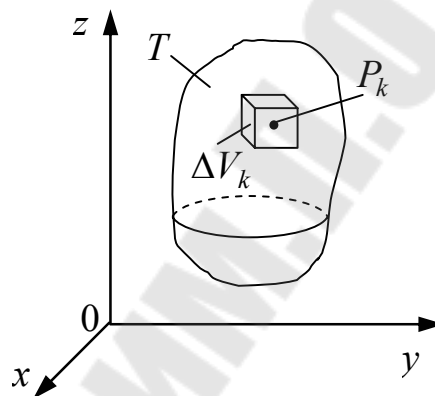


Рис. 6.10

Ситуация 5

Фигура Ω есть пространственная область (тело) T (рис. 6.10). Разобьем тело T на n частей ΔV_k (на рисунке они не показаны). В каждой из частей выберем произвольно по точке $P_k \in \Delta V_k$ ($k = \overline{1, n}$) и составим сумму: $M \approx \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta V_k$, а затем получим и точное равенство:

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta V_k = \iiint_T f(P) dV, \quad (6.11)$$

где $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \text{diam} \Delta V_k$.

Напомним, что $\iiint_T f(P) dV = \iiint_T f(x, y, z) dV$ – тройной интеграл по телу T .

6.4. Интегральная сумма и определенный интеграл по фигуре

Отвлечемся от физического смысла рассмотренной задачи о массе и вычленим те математические операции, которые привели к ее решению. Прежде всего напомним, что на фигуре Ω задана функция точки: $f(P)$. Для получения приближенных равенств для масс M в ситуациях 1–5 были проделаны следующие операции:

- 1) фигура произвольным образом дробилась на конечное число n частей;
- 2) в каждой из частей бралась произвольная точка P_k ($k = \overline{1, n}$);
- 3) вычислялись значения функции в выбранных точках: $f(P_k)$;
- 4) значение $f(P_k)$ умножалось на меру соответствующей части;
- 5) все полученные произведения складывались.

Полученная в результате перечисленных операций сумма носит название n -й интегральной суммы:

$$\sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta \omega_k .$$

При заданном числе n частей, на которые дробится фигура Ω , можно составить сколько угодно n -х интегральных сумм. Здесь имеется произвол двоякого порядка. Во-первых, можно по-разному дробить фигуру на n частей, а, во-вторых, в каждой из частей можно произвольным образом выбирать точку P_k .

Чтобы получить точное значение массы (равенства (6.7)–(6.11)), мы выполняли шестую операцию – брали предел n -й интегральной суммы, устремив к нулю размеры частей, на которые была раздроблена фигура (при этом число частей $n \rightarrow +\infty$).

Важно заметить, что предел не должен зависеть от способов составления интегральных сумм. Такой предел называется определенным интегралом по фигуре от функции $f(P)$ и обозначается так:

$$\int_{\Omega} f(P) d\omega .$$

Сформулируем сказанное выше следующим образом:

Определение 6.1. Определенным интегралом по фигуре Ω от заданной на ней функции $f(P)$ называется предел n -й интегральной суммы, когда стремится к нулю наибольший из диаметров элементарных частей деления, на которые дробилась фигура при составлении

интегральных сумм. При этом предел не должен зависеть от способов составления интегральных сумм.

Итак,

$$\int_{\Omega} f(P) d\omega = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta\omega_k, \quad (6.12)$$

где $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \text{diam } \Delta\omega_k$.

В приложениях интегрального исчисления к решению задач часто бывает удобным считать, что интеграл есть сумма бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых (элементов). При известной осторожности этот подход является весьма плодотворным и мы не раз уже его использовали.

Перед тем, как рассмотреть еще один пример, основанный на этой идее, приведем простейшую классификацию фигур, необходимую для дальнейшего:

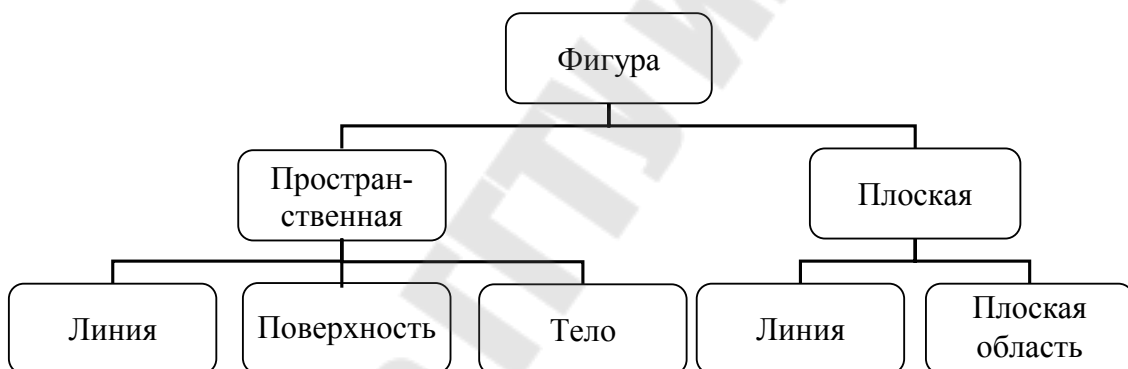


Рис. 6.11

Примечание 6.3. Фигура называется *плоской*, если все ее точки принадлежат некоторой плоскости и *пространственной* в противном случае.

Наш пример непосредственно связан с п. 3 комментария к примеру 2.7 из раздела 2.4. Для лучшего понимания происходящего остановимся на понятии момента инерции пространственной фигуры.

Определение 6.2

1. Моментом инерции материальной точки относительно оси Oz назовем произведение массы этой точки на квадрат ее расстояния до оси Oz .

2. Моментом инерции системы материальных точек относительно оси Oz назовем сумму моментов всех точек системы относительно этой оси.

3. Моментом инерции пространственной фигуры Ω относительно оси Oz будем считать интеграл

$$I_z = \int_{\Omega} (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)d\omega. \quad (6.13)$$

Комментарий. Откуда взялась формула (6.13)? Ответ прост (рис. 6.12).

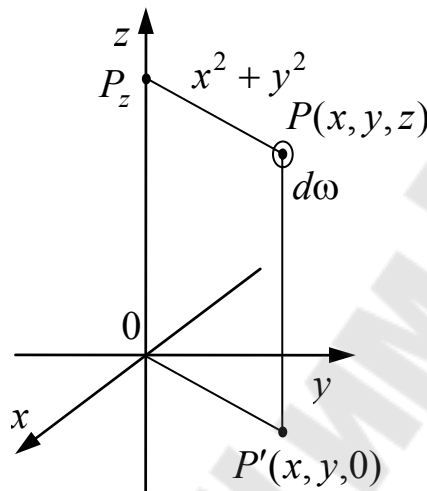


Рис. 6.12

Пусть $d\omega$ – некоторый бесконечно малый элемент фигуры Ω и $P(x, y, z)$ – принадлежащая ему точка, $P'(x, y, 0)$ – ее проекция на плоскость xOy , а $P_z(0, 0, z)$ – проекция точки P на ось Oz . Тогда масса элемента $d\omega$ равна (приближенно) $\rho(x, y, z)d\omega$, где $\rho = \rho(P)$ – плотность распределения массы по телу Ω . Расстояние от точки P до оси Oz , очевидно, совпадает с расстоянием между точками P и P_z , и по формуле расстояния между двумя точками получаем: $d = \sqrt{(0-x)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Поэтому элементарный момент инерции нашей фигуры относительно оси Oz есть: $dI_z = (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)d\omega$, а полный (суммарный) момент, очевидно, есть сумма всех элементарных моментов, т. е. интеграл (6.13).

И в заключение этого пункта приведем следующую схему (рис. 6.13).

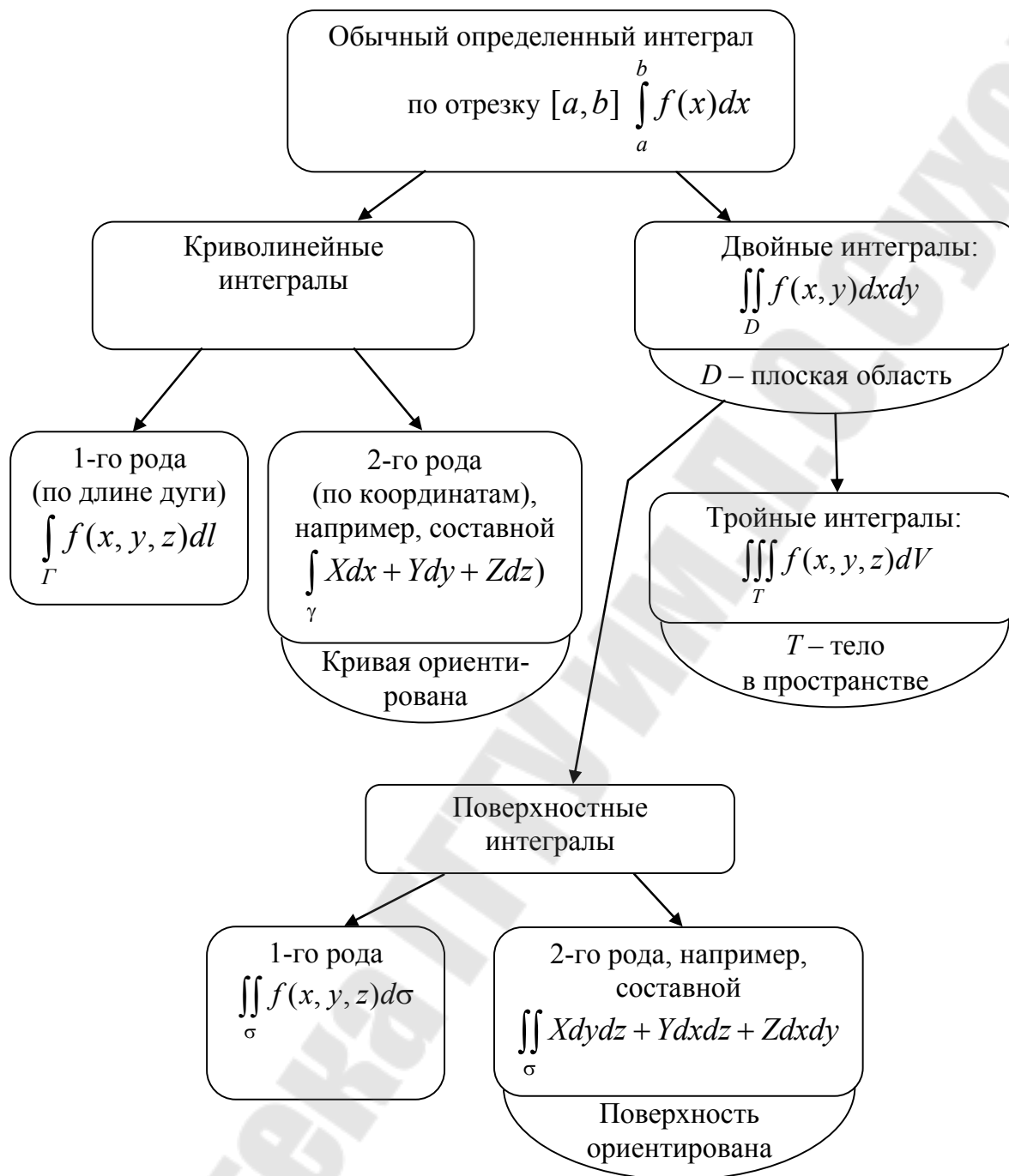


Рис. 6.13. Общая схема (7 типов интегралов)

ГЛАВА 7. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

7.1. Вычисление длин линий

Длина l линии Γ дается криволинейным интегралом:

$$l(\Gamma) = \int_{\Gamma} dl. \quad (7.1)$$

Напомним формулы для вычисления длины дуги в зависимости от способа задания кривой Γ (их пять):

$$1) y = \varphi(x), \quad a \leq x \leq b, \quad dl = \sqrt{1 + \varphi'^2(x)} dx; \quad (7.2)$$

$$2) x = \psi(y), \quad c \leq y \leq d, \quad dl = \sqrt{1 + \psi'^2(y)} dy; \quad (7.3)$$

3) плоская кривая Γ задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Тогда

$$dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt; \quad (7.4)$$

4) плоская кривая Γ задана полярным уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, тогда

$$dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi; \quad (7.5)$$

5) пространственная кривая Γ задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Тогда

$$dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} dt. \quad (7.6)$$

Комментарий. 1. В формуле (7.2) ведущая переменная x , а в формуле (7.3) – y .

2. Формула (7.5) легко выводится из формулы (7.4), если воспользоваться связью между декартовыми и полярными координатами:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ \rho = \rho(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \rho(\varphi) \cos \varphi \\ y = \rho(\varphi) \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow x_t'^2 + y_t'^2 = x_\varphi'^2 + y_\varphi'^2 =$$

$$= (\rho'(\varphi) \cos \varphi - \rho(\varphi) \sin \varphi)^2 + (\rho'(\varphi) \sin \varphi + \rho(\varphi) \cos \varphi)^2 = \rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi).$$

3. Подчеркнем одну важную особенность сведения криволинейного интеграла (первого рода) к обычному определенному: при вычислении криволинейного интеграла всегда нижний предел должен быть меньше верхнего.

Пример 7.1. Найти длину кривой $y = x^{\frac{3}{2}}$ при $x \in [0;4]$.

Решение

Поскольку $y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$, то $E(y) = [0; +\infty)$ и, значит, $y = x\sqrt{x}$. (Заодно отметим, что и условие $x \in [0;4]$ корректно). Чтобы представить нашу кривую получше, составим небольшую таблицу:

Таблица 7.1

x	0	$\frac{1}{4}$	1	4
$x\sqrt{x}$	0	$\frac{1}{8}$	1	8

Эскиз графика функции выглядит так (рис. 7.1).

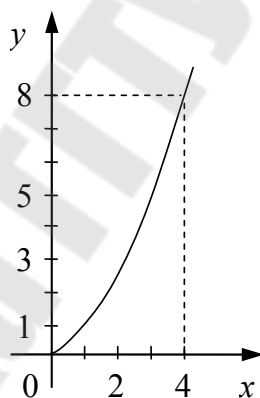


Рис. 7.1

С учетом формулы (7.2.) имеем:

$$\begin{aligned}
 l(\Gamma) &= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \int_0^4 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 + \frac{9}{4}x\right) = \\
 &= \frac{4}{9} \left. \frac{\left(1 + \frac{9}{4}x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^4 = \frac{8}{27} \left[(1+9)^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1).
 \end{aligned}$$

Примечание 7.1. Покажем откуда появилось подинтегральное выражение в нашем интеграле:

$$y = x^{\frac{3}{2}}; y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}; y'^2 = \frac{9}{4}x; 1 + y'^2 = 1 + \frac{9}{4}x.$$

Пример 7.2. Найти длину первого витка винтовой линии:
 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt.$

Решение

Поскольку нас интересует только первый виток, то $t \in [0; 2\pi]$.
 Теперь займемся вычислениями:

$$x'_t = -a \sin t, y'_t = a \cos t, z'_t = b,$$

$$x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t = a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2 = a^2 + b^2,$$

$$l(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Замечание 7.1

Полученный результат допускает красивую физико-геометрическую интерпретацию. Предположим, что прямой круговой цилиндр, радиус основания которого равен a и ось которого совпадает с осью Oz , вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью $\omega = 1$ (рис. 7.2). По боковой поверхности цилиндра параллельно оси Oz ползет человек со скоростью $z'_t = (bt)' = b$. В результате он будет участвовать в сложном движении: поступательном и вращательном одновременно. Траекторией движения маленького человечка и будет, очевидно, наша винтовая линия.

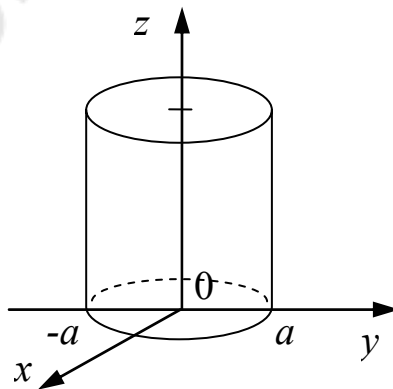


Рис. 7.2

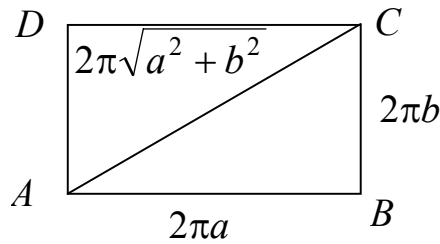


Рис. 7.3

Рассмотрим теперь плоскую развертку цилиндра. Понятно, что ею будет прямоугольник, размеры которого мы сейчас установим. Длина окружности основания цилиндра равна $2\pi a$ (ибо радиус этой окружности a). За время $t = 2\pi$ человек, ползущий по образующей цилиндра по закону $z = bt$, пройдет путь длиной $b \cdot 2\pi = 2\pi b$. Первый виток винтовой линии изобразится диагональю рассматриваемого прямоугольника, а значит (по теореме Пифагора) его длина $\sqrt{(2\pi a)^2 + (2\pi b)^2} = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$, что мы и получили с помощью интегрирования.

7.2. Вычисление площадей плоских фигур

1. Площадь S плоской (квадрируемой) области D в декартовых координатах (на плоскости (x, y)) выражается формулой:

$$S(D) = \iint_D dx dy. \quad (7.7)$$

Если $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ – криволинейная трапеция (рис. 7.4), то сводя двойной интеграл к повторному, приходим к известной формуле, выражающей площадь криволинейной трапеции с помощью определенного интеграла:

$$S(D) = \iint_D dx dy = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b dx [y]_0^{f(x)} = \int_a^b f(x) dx. \quad (7.8)$$

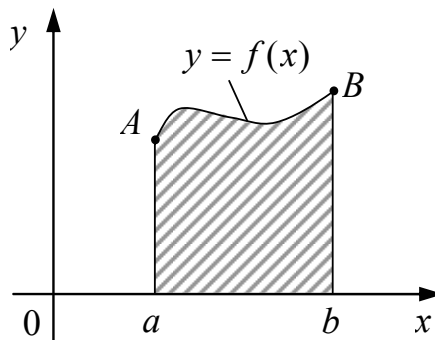


Рис. 7.4

2. Переходя в (7.7) к новым переменным по формулам

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v), \end{cases} \quad (7.9)$$

получим выражение площади области D в криволинейных координатах

$$S(D) = \iint_{\Delta} |J| \, dudv, \quad (7.10)$$

где $J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ – якобиан преобразования (7.9).

Величину $dS = dxdy$, представляющую собой площадь прямоугольника со сторонами dx , dy называют элементом площади в прямоугольных координатах x , y , а величину $dS = |J| \, dudv$ – элементом площади в криволинейных координатах u , v . Модуль якобиана $|J|$ представляет собой коэффициент растяжения площади в точке (u, v) при отображении области Δ плоскости (u, v) на область D плоскости (x, y) .

3. Если D – криволинейный сектор на плоскости (x, y) , ограниченный лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $\rho = \rho(\varphi)$, где ρ , φ – полярные координаты (рис. 7.5), то из равенства (7.10), учитывая, что $|J| = \rho$, а $\Delta = \{(\rho, \varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq \rho \leq \rho(\varphi)\}$, и сводя двойной интеграл к повторному, получим известное выражение площади криволинейного сектора через определенный интеграл:

$$S(D) = \iint_D dxdy = \iint_{\Delta} \rho d\rho d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} \rho d\rho = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^{\rho(\varphi)} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi. \quad (7.11)$$

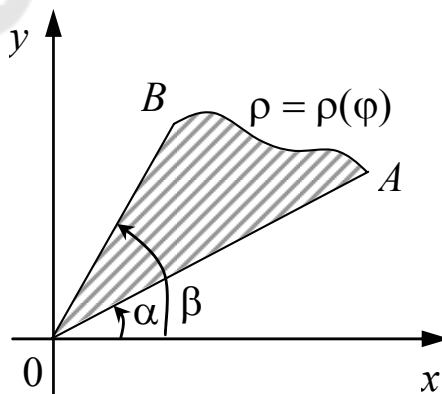


Рис. 7.5

Примечание 7.2. Если обобщить нашу ситуацию, усложнив область D следующим образом (рис. 7.6), то нетрудно таким же способом получить формулу:

$$S(D) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi)] d\varphi. \quad (7.12)$$

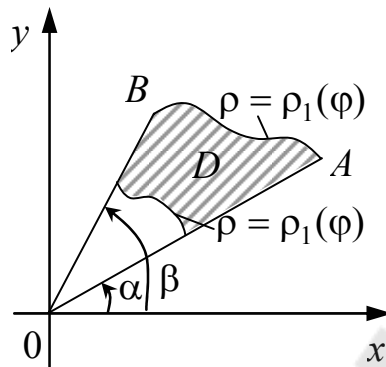


Рис. 7.6

(Сравнить со стандартной ситуацией 1.3).

Кстати, по-видимому, вместо того, чтобы формулы (7.11), (7.12) запоминать, проще запомнить их вывод!

Пример 7.3 (задача Архимеда)

Найти площадь параболического сегмента, размеры которого указаны на рис. 7.7.

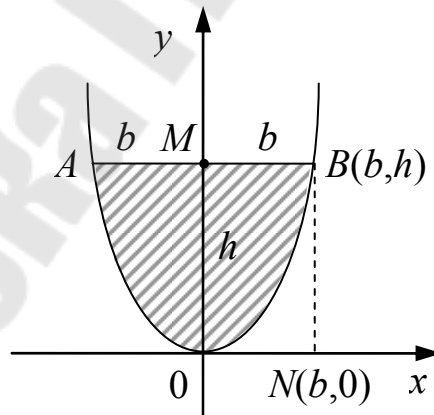


Рис. 7.7

Решение

Понятно, что для решения задачи нам потребуется уравнение параболы AOB . Поскольку она проходит через начало координат, то ее уравнение имеет вид: $y = ax^2$. Нам остается найти коэффициент a , исходя из условия задачи. Видим (рис. 7.7), что наша кривая прохо-

дит через точку $B(b, h)$. Отсюда $h = a \cdot b^2 \Rightarrow \left. \begin{matrix} a = \frac{h}{b^2} \\ y = ax^2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow y = \frac{hx^2}{b^2}$

и, учитывая симметрию параболы относительно оси Oy , мы готовы к решительному штурму:

$$\begin{aligned} S(D) &= \iint_D dx dy = 2 \int_0^b dx \int_{y=ax^2}^{y=h} dy = 2 \int_0^b dx [y]_{ax^2}^h = 2 \int_0^b (h - ax^2) dx = \\ &= 2 \left[hx - \frac{ax^3}{3} \right]_0^b = 2 \left(hb - \frac{ax^3}{3} \right) = \left| a = \frac{h}{b^2} \right| = 2 \left(hb - \frac{ab^3}{3b^2} \right) = 2 \cdot \frac{2}{3} hb = \frac{4}{3} hb. \end{aligned}$$

В свое время для решения этой задачи потребовался гений такого величайшего математика, как Архимед (287–212 до н. э.), потому что интегрального исчисления тогда еще не было.

Еще три примера на вычисление площади плоской области см. в разделе 1.9 (примеры 1.17, 1.19, 1.20).

4. Рассмотрим один специальный прием вычисления площади, основанный на формуле Грина:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} X dx + Y dy, \quad (7.13)$$

где функции $X = X(x, y)$ и $Y = Y(x, y)$ и их частные производные $\frac{\partial X}{\partial y}$

и $\frac{\partial Y}{\partial x}$ непрерывны в области D , а криволинейный интеграл берется по границе Γ области D в положительном направлении. (Напомним, что кружок на знаке интеграла в правой части равенства (7.13) означает замкнутость контура интегрирования).

Как известно, двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ при $f(x, y) \equiv 1$ дает площадь области интегрирования. Значит, если в формуле (7.13) подобрать функции X, Y так, чтобы $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \equiv 1$, то площадь области можно будет записать в виде

$$S(D) = \iint_D dx dy = \oint_{\Gamma} X dx + Y dy. \quad (7.14)$$

Рассмотрим две конкретные реализации этой идеи.

$$1^\circ. Y = x, \quad X = 0.$$

$$\text{Тогда } S(D) = \oint_{\Gamma} x dy.$$

$$2^\circ. Y = 0, \quad X = -y.$$

$$\text{Тогда } S(D) = -\oint_{\Gamma} y dx.$$

$$\text{Отсюда } 2S(D) = \oint_{\Gamma} x dy - y dx \text{ и}$$

$$S(D) = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx. \quad (7.15)$$

Примечание 7.3. Любую из полученных формул, естественно, можно использовать для вычисления площадей, но из них наибольшей популярностью пользуется формула (7.15), хотя бы потому, что она симметрична.

Пример 7.4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной петлей кривой $(x + y)^3 = axy$ ($a > 0$).

Решение

Однажды мы уже эту задачу решили с помощью обобщенных полярных координат (см. раздел 1.9, пример 1.19).

Сейчас мы решим эту задачу, опираясь на формулу (7.15). Для этого нам потребуется задать кривую $(x + y)^3 = axy$ параметрически. Полагая $y = tx$, получаем (см. пример 1.19).

$$x = \frac{at}{(1+t)^3},$$

$$y = \frac{at^2}{(1+t)^3}.$$

Ну, а теперь за вычисления!

$$\begin{aligned} 1. \quad dx &= \left[\frac{at}{(1+t)^3} \right]' dt = adt \frac{(1+t)^3 - t \cdot 3(1+t)^2}{(1+t)^6} = \\ &= adt \frac{1+t-3t}{(1+t)^4} = adt \frac{1-2t}{(1+t)^4}. \end{aligned}$$

$$2. \quad dy = \left[\frac{at^2}{(1+t)^3} \right]' dt = atdt \frac{2t(1+t)^3 - 3t^2(1+t)^2}{(1+t)^4} =$$

$$= atdt \frac{2(1+t) - 3t}{(1+t)^4} = atdt \frac{2-t}{(1+t)^4}.$$

$$3. \quad xdy - ydx = \left[\frac{(at)^2}{(1+t)^3} \cdot \frac{2-t}{(1+t)^4} - \frac{(at)^2(1-2t)}{(1+t)^3(1+t)^4} \right] dt =$$

$$= \left[\frac{a^2t^2}{(1+t)^7} (2-t-1+2t) \right] dt = \frac{a^2t^2}{(1+t)^7} (1+t) dt = \frac{a^2t^2 dt}{(1+t)^6}.$$

Итак, первый вычислительный блок завершен, и мы подошли к эвристическому моменту: в каких же пределах может изменяться параметр t ? Прежде всего напомним, что наша кривая симметрична относительно прямой $y = x$. Следовательно. Достаточно подсчитать площадь части ограниченной ей фигуры, которая заключена между лучами $y = 0$ и $y = x$ и результат удвоить. Для удобства скопируем рис. 1.37 с небольшим добавлением (рис. 7.8).

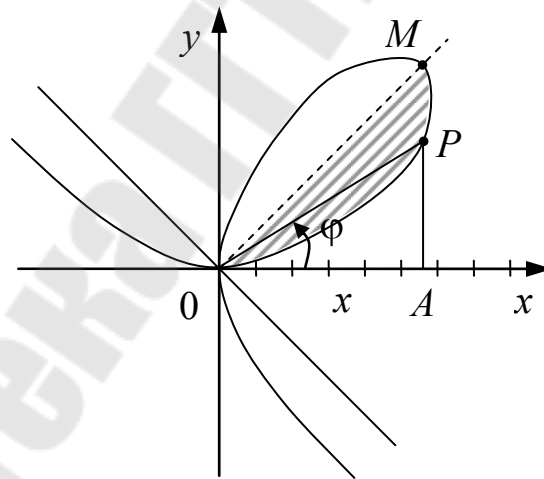


Рис. 7.8

Поскольку $t = \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi$ (из ΔAOP) и по ранее сказанному $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{4} \right]$, то границы для t понятны: $t \in [0;1]$ (ибо $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$).

Таким образом, мы можем приступить к завершающему вычислительному этапу:

$$S(D) = 2 \cdot \frac{a^2}{2} \int_0^1 \frac{t^2 dt}{(1+t)^6} = a^2 \int_0^1 \frac{t^2 dt}{(1+t)^6}.$$

Возникла небольшая техническая проблема: нам нужно вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 dt}{(1+t)^6} &= \left| \begin{array}{l} 1+t = u \\ t = u-1 \\ dt = du \end{array} \right| = \int \frac{(u-1)^2 du}{u^6} = \int (u^{-4} - 2u^{-5} + u^{-6}) du = \\ &= -\frac{1}{3u^3} + \frac{1}{2u^4} - \frac{1}{5u^5} + C = -\frac{1}{3(t+1)^3} + \frac{1}{2(t+1)^4} - \frac{1}{5(t+1)^5} + C. \end{aligned}$$

Имея этот «шаблон», легко завершаем вычисления, используя формулу Ньютона-Лейбница:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} S(D) &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2 \cdot 16} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{32} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{32}\right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{7}{3 \cdot 8} + \frac{31}{5 \cdot 32} - \frac{15}{2 \cdot 16} = \\ &= \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 32} (140 + 93 - 225) = \frac{8}{3 \cdot 5 \cdot 32} = \frac{1}{60} \Rightarrow S(D) = \frac{a^2}{60}. \end{aligned}$$

7.3. Вычисление площадей поверхностей

1. Пусть поверхность σ задана уравнением $z = z(x, y)$ и D – проекция σ на плоскость xOy (рис. 7.9). Площадь поверхности σ может быть вычислена по формуле

$$S(\sigma) = \iint_{\sigma} d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dS. \quad (7.16)$$

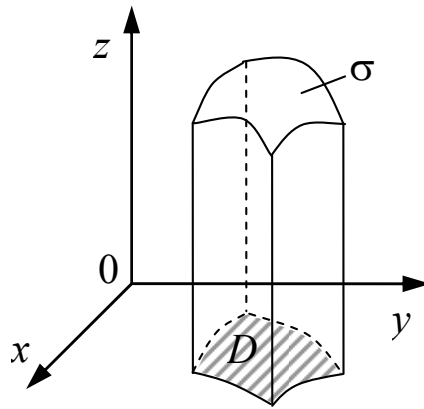


Рис. 7.9

Пример 7.5. Вычислить площадь части поверхности конуса $y^2 = x^2 + z^2$, расположенной в первом октанте и ограниченной плоскостью $x + z = 2$.

Решение

Поверхность $y^2 = x^2 + z^2$ есть конус второго порядка, осью которого служит ось Oy (кстати, это даже поверхность вращения), а плоскость $x + z = 2$ параллельна оси Oy (рис. 7.10).

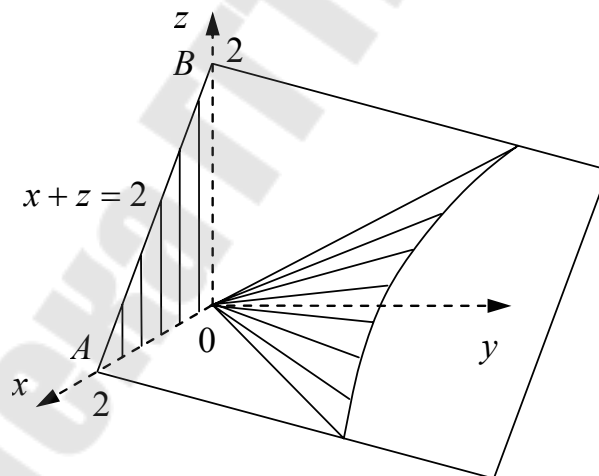


Рис. 7.10

Поскольку в нашем примере $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, то конечно будем проектировать интересующую нас часть поверхности конуса на плоскость xOz . Очевидно, ее проекцией является прямоугольный треугольник AOB . Формула (7.16) для рассматриваемого случая переписется в виде:

$$S(\sigma) = \iint_D \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2} dx dz.$$

Далее имеем:

$$y_x' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}, \quad y_z' = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}},$$

$$1 + y_x'^2 + y_z'^2 = 1 + \frac{x^2}{x^2 + z^2} + \frac{z^2}{x^2 + z^2} = 1 + \frac{x^2 + z^2}{x^2 + z^2} = 2.$$

(Нам повезло, не так ли?)

$$\begin{aligned} S(\sigma) &= \iint_D \sqrt{2} \cdot dx dz = \sqrt{2} \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dz = \sqrt{2} \int_0^2 (2-x) dx = \\ &= \sqrt{2} \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \sqrt{2}(4-2) = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

ВНИМАНИЕ – ЗАДАНИЕ

Пример 7.6. Трехгранная призма, образующие которой параллельны оси Oz , имеет своим основанием в плоскости xOy треугольник с вершинами в точках $A(0,1)$, $B(1,0)$, $C(-1,0)$. Найти площадь части поверхности параболоида вращения $2z = x^2 + y^2$, вырезанный этой призмой.

2. Площадь части цилиндрической поверхности, у которой направляющей служит кривая γ , лежащая в плоскости xOy , образующие – параллельны оси Oz , а сверху эта поверхность срезана поверхностью $z = f(x, y)$ (рис. 7.11), может быть вычислена по специальной формуле

$$S(\sigma) = \int_{\gamma} f(x, y) dl. \quad (7.17)$$

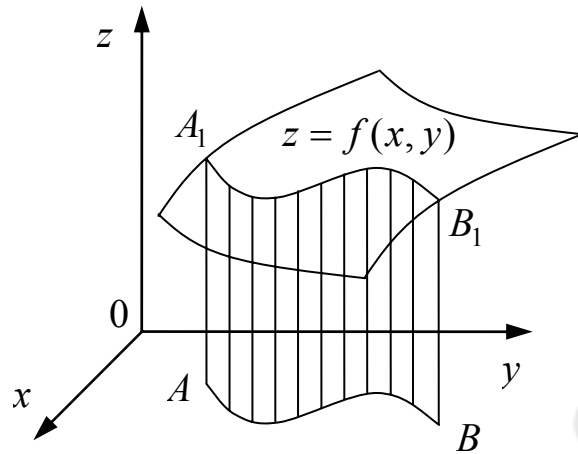


Рис. 7.11

Пример 7.7. Вычислить площадь цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = R^2$, заключенной между плоскостью xOy и поверхностью $2Rz = xy$.

Решение

Мы уже сталкивались с прототипом поверхности $2Rz = xy$ в примере 2.3. из раздела 2.3: там мы имели дело с поверхностью $z = xy$ (см. рис. 2.6). Понятно, что наличие положительного параметра $2R$ на тип уравнения влияния не имеет: это опять гиперболический параболоид. По условию $z \geq 0$. Значит, $xy \geq 0$ и интересующая нас поверхность, лежит над первой и третьей четвертями плоскости xOy . Отметим еще несколько очевидных фактов:

1. Поверхность проходит через начало координат.
2. $(x_0, y_0, z_0) \in \sigma \Rightarrow (y_0, x_0, z_0) \in \sigma$. Следовательно, поверхность симметрична относительно плоскости $y = x$.
3. $(x_0, y_0, z_0) \in \sigma \Rightarrow (-x_0, -y_0, z_0) \in \sigma$. Следовательно, поверхность симметрична относительно начала координат.

Учитывая, что цилиндрическая поверхность $x^2 + y^2 = R^2$, фигурирующая в задаче, обладает бесконечным числом плоскостей симметрии, проходящих через ось Oz , заключаем, что для вычисления той части ее площади, которая заключена между плоскостью $z = 0$ и поверхностью $z = \frac{xy}{2R}$, достаточно вычислить площадь, находящуюся над первой четвертью и результат удвоить.

В соответствии с формулой (7.17) будем иметь:

$$S(\sigma) = 2 \int_{x^2+y^2=R^2} \frac{xy}{2R} dl = \frac{1}{R} \int_{x^2+y^2=R^2} xy dl.$$

Для дальнейшего удобно перейти к параметрическому заданию окружности $x^2 + y^2 = R^2$, а именно: $x = R \cos t$, $y = R \sin t$. Тогда $x'_t = -R \sin t$, $y'_t = R \cos t \Rightarrow x'^2_t + y'^2_t = R^2 \Rightarrow dl = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} dt = \sqrt{R^2} dt = R dt$.

$$S(\sigma) = \frac{1}{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cos t \cdot R \sin t \cdot R dt = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t d(\sin t) = R^2 \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^2}{2}.$$

3. Вычислим теперь площадь поверхности вращения.

Пусть кривая γ , лежащая над осью Ox с уравнением $y = f(x)$, вращается вокруг этой оси. Требуется найти площадь получившейся поверхности вращения (рис. 7.12). Предположим, что кривая γ проектируется на отрезок $[a, b]$ оси Ox . Введем в рассмотрение функцию площади: $S(x) = S(\sigma_x)$ – это площадь части нашей поверхности, заключенной между плоскостями $x = a$ и $x = x$. Дадим теперь x приращение $\Delta x = dx$. Тогда к площади $S(x)$ добавится площадь узкой полоски. Саму же полоску будем считать (с точностью до бесконечно малых высших порядков чем Δx) прямоугольником с высотой dl (напомним, что dl – дифференциал длины дуги) и основанием $2\pi \cdot f(x)$ (мы здесь воспользовались формулой длины окружности, для которой $R = f(x)$) (рис. 7.13).

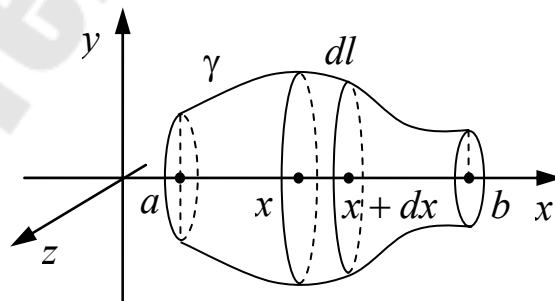


Рис. 7.12

$$dl \quad \boxed{dS(x)} \\ 2\pi f(x)$$

Рис. 7.13

Итак, получили соотношение между дифференциалами интересующих нас величин (т. е. простейшее дифференциальное уравнение):

$$dS(x) = 2\pi f(x)dl. \quad (7.18)$$

Чтобы найти всю площадь, остается просуммировать площади всех бесконечно малых полосок, т. е. проинтегрировать уравнение (7.18) по x в пределах от a до b .

$$\int_a^b dS(x) = \int_a^b 2\pi f(x)dl,$$

$$S(x)\Big|_a^b = 2\pi \int_a^b f(x)dl,$$

$$S(b) - S(a) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx.$$

Но $S(a) = 0$, а $S(b)$ – площадь всей поверхности вращения. Окончательно получаем:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx. \quad (7.19)$$

Замечание 7.2

Если кривая γ задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($t_1 \leq t \leq t_2$), то нетрудно понять, что соответствующая формула выглядит так:

$$S = 2\pi \int y dl = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt. \quad (7.20)$$

ВНИМАНИЕ – ЗАДАНИЕ

Вывести формулы (7.17) и (7.19) из формулы (7.16).

Пример 7.8. Найти площадь части поверхности вращения (катеноида) на участке от $x = 0$ до $x = a$, полученной в результате вращения цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ ($a > 0$) вокруг оси Ox (рис. 7.14).

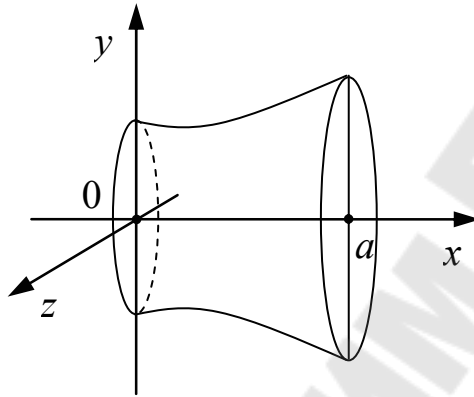


Рис. 7.14

Решение

Воспользуемся формулой (7.19):

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{\gamma} y dl = 2\pi \int_0^a y \sqrt{1 + y'^2} dx = \\ &= 2\pi a \int_0^a \operatorname{ch} \frac{x}{a} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} dx = 2\pi a \int_0^a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} dx = 2\pi a \int_0^a \frac{e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} + 2}{4} dx = \\ &= \frac{\pi a}{2} \left[\frac{a}{2} \left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}} \right) + 2x \right]_0^a = \frac{\pi a^2}{4} (e^2 - e^{-2} - 0) + \frac{\pi a}{2} \cdot 2a = \\ &= \frac{\pi a^2}{4} (e^2 - e^{-2}) + \pi a^2 = \frac{\pi a^2}{4} (e^2 - e^{-2} + 4) = \frac{\pi a^2}{4} \left(\frac{e^2 - e^{-2}}{2} \cdot 2 + 4 \right) = \\ &= \frac{\pi a^2}{2} (\operatorname{sh} 2 + 2). \end{aligned}$$

Комментарий

1. Производная $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$ (и обратно).
2. Основное тригонометрическое тождество в гиперболической тригонометрии выглядит так: $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.
3. Гиперболический синус определяется по формуле:
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

7.4. Вычисление объемов тел

1. Общая формула для объема пространственной области T (кубируемого тела) имеет вид:

$$V(T) = \iiint_T 1 \cdot dV. \quad (7.21)$$

В декартовых координатах она переписывается в виде:

$$V(T) = \iiint_T dx dy dz. \quad (7.22)$$

Если T – цилиндрическое тело:

$$T = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\},$$

где D – область (квадрируемая) на плоскости (x, y) , а $f(x, y)$ – непрерывная в области D функция (рис. 7.15), то, сводя тройной интеграл к повторному по первому из правил, приходим к известной формуле для объема цилиндрида:

$$V(T) = \iiint_T dV = \iint_D dS \int_{z=0}^{z=f(x,y)} dz = \iint_D f(x, y) dS. \quad (7.23)$$

2. Рассмотрим еще один специальный случай формулы (7.21).

Допустим, что нам известна площадь сечения D_z тела T плоскостью $z = \operatorname{const}$, перпендикулярной оси Oz , причем $z \in [c; d]$ (т. е. z пробегает некоторый отрезок $[c, d]$ оси Oz). Таким образом, $S(D_z) = S(z)$ есть известная функция аргумента z (рис. 7.15). Вычисляя тройной интеграл по второму правилу вычисления тройных интегралов, получаем

$$V = \iiint_T dV = \int_c^d dz \iint_{D_z} dS = \int_c^d S(z) dz. \quad (7.24)$$

Эта формула называется *формулой объема тела по известным площадям поперечных сечений*. При выводе формулы (7.24) мы воспользовались тем, что $\iint_{D_z} dS = S(z)$.

Примечание 7.4. Мы уже сталкивались с этим подходом при вычислении объема эллипсоида (см. раздел 2.4, пример 2.6).

Замечание 7.3

Из формулы (7.24) вытекает замечательный *принцип Кавальери* (Б. Кавальери (1598–1647) – итальянский математик):

Если два тела могут быть приведены в такое положение, при котором все сечения их плоскостями, перпендикулярными одной и той же оси (скажем, оси Oz), имеют одинаковые площади, то эти тела имеют равные объемы.

В самом деле, если площадь на высоте z первого тела равна $S_1(z)$, а второго равна $S_2(z)$, то по условию $S_1(z) = S_2(z)$. А в силу формулы (7.24)

$$V_1 = \int_c^d S_1(z) dz = \int_c^d S_2(z) dz = V_2 \text{ (рис. 7.15).}$$

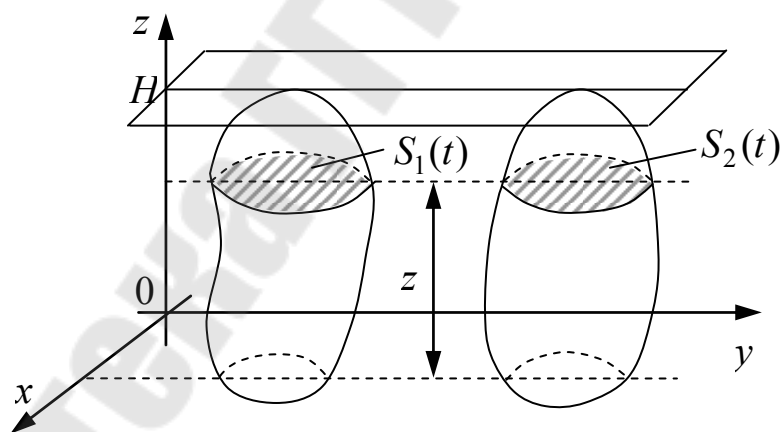


Рис. 7.15

3. Остановимся теперь на вычислении объема тела вращения и рассмотрим два случая:

1°. Пусть тело образовано вращением около оси Ox криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$, $y = 0$ (рис. 7.16).

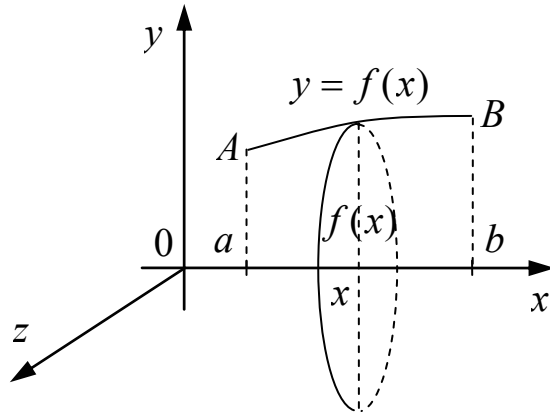


Рис. 7.16

В этом случае площадь поперечного сечения нужно вычислять по формуле площади круга $S = \pi R^2$, причем радиус круга, отстоящего от плоскости $x = a$ на расстоянии x (считаем, что x фиксировано), равен, очевидно, $f(x)$. Поэтому $S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$ и

$$V(T) = \int_a^b S(x) dx = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (7.25)$$

2°. Пусть тело образовано вращением около оси Oy той же криволинейной трапеции, что и в 1° (рис. 7.17). За элемент объема этого тела примем объем части тела, образованного вращением около оси Oy прямоугольника со сторонами $y = f(x)$ и dx , отстоящего от оси Oy на расстоянии x . Тогда $\Delta V = \pi(x + dx)^2 y - \pi x^2 y = 2\pi x y dx + \pi y dx^2$. Значит,

$$dV = 2\pi x y dx \Rightarrow V = 2\pi \int_a^b x y dx. \quad (7.26)$$

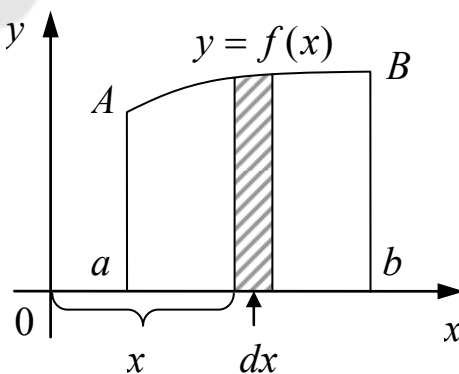


Рис. 7.17

4. Переходя в равенстве (7.21) к новым переменным u, v, w по формулам $x = \varphi(u, v, w), y = \psi(u, v, w), z = \chi(u, v, w)$, получим выражение объема области T в криволинейных координатах:

$$V(T) = \iiint_T \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| du dv dw. \quad (7.27)$$

Величину $dV = dx dy dz$, представляющую собой объем прямоугольного параллелепипеда с ребрами dx, dy, dz , естественно считать элементом объема в прямоугольных координатах x, y, z , а величину $dV = \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| du dv dw$ – элементом объема в криволинейных

координатах u, v, w . Модуль якобиана $\left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right|$ представляет собой коэффициент растяжения объема в точке (u, v, w) при отображении области τ пространства (u, v, w) на область T пространства (x, y, z) .

Пример 7.9. Трехгранная призма, образующие которой параллельны оси $0z$, имеет своим основанием в плоскости (x, y) треугольник с вершинами $A(0,1), B(1,0), C(-1,0)$. Найти объем части этой призмы, заключенной между плоскостью $z = 0$ и параболоидом вращения $z = x^2 + y^2$ (рис. 7.18).

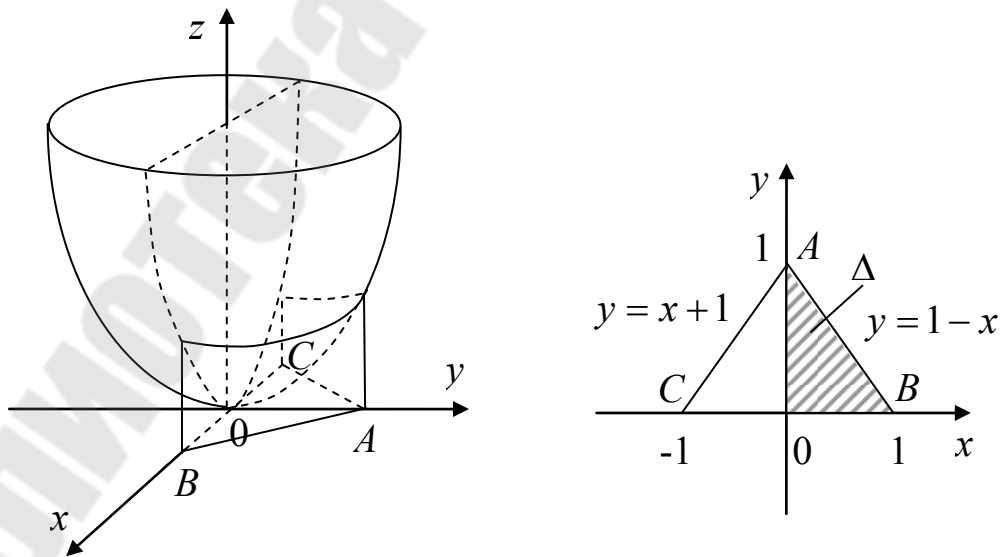


Рис. 7.18

Решение

Поскольку нам необходимо подсчитать объем цилиндрического тела (рис. 7.18), то мы можем сразу воспользоваться формулой (7.23): $V(T) = \iint_D f(x, y) dS = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, где D – треугольник ABC , являющийся основанием призмы. Если воспользоваться уравнением прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, т. е. формулой $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, то мы получим для прямой AB : $y = 1 - x$, а для прямой AC : $y = x + 1$. Учитывая симметрию нашего цилиндра относительно плоскости yOz , приступим к вычислениям:

$$\begin{aligned} V(T) &= 2 \iint_{\Delta} (x^2 + y^2) dx dy = 2 \int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=1-x} (x^2 + y^2) dy = 2 \int_0^1 dx \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1-x} = \\ &= 2 \int_0^1 dx \left[x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} \right] = 2 \int_0^1 \left(x^2 - x^3 - \frac{(x-1)^3}{3} \right) dx = \\ &= 2 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{(x-1)^4}{12} \right]_0^1 = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - 0 + \frac{1}{12} \right) = 2 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} \right) = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Пример 7.10. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy той части параболы $y^2 = 4ax$, которая отсекается прямой $x = a$.

Решение

Как известно из аналитической геометрии каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$. В нашем случае $2p = 4a \Rightarrow p = 2a$. Парабола проходит через начало координат и симметрична относительно Oy (ибо в ее уравнение переменная y входит в четной степени) (рис. 7.19).

Воспользуемся формулой (7.26): $V = 2\pi \int_a^b xy dx$.

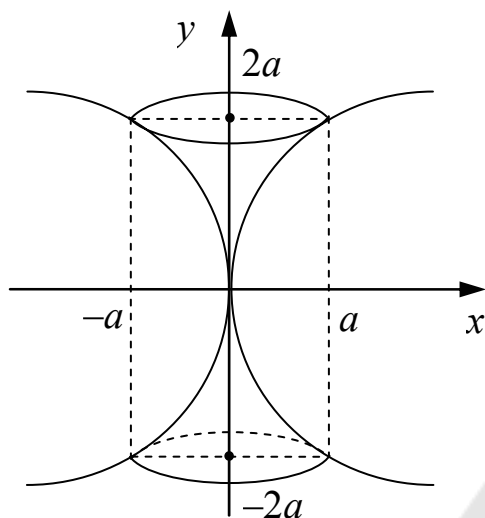


Рис. 7.19

Учитывая симметрию, получаем

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \cdot 2 \int_0^a x \cdot 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{x} dx = 8\pi\sqrt{a} \int_0^a x^{\frac{3}{2}} dx = 8\pi\sqrt{a} \cdot \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^a = \\
 &= \frac{16}{5} \pi a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{5}{2}} = \frac{16\pi}{5} a^3.
 \end{aligned}$$

ГЛАВА 8. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

8.1. Физические приложения двойных интегралов

Для того, чтобы получить формулы, отражающие физические приложения двойных интегралов, воспользуемся подходом бесконечно малых величин. Для этого, например, выделим бесконечно малую часть dS плоской области S и будем предполагать, что масса выделенного элемента dS сосредоточена в одной точке или, что плотность $\rho = \rho(x, y)$ в пределах этого элемента постоянна. Тем самым для массы dm элемента dS будем иметь приближенное выражение вида

$$dm = \rho dS = \rho(x, y) dx dy,$$

которое верно до бесконечно малой порядка, высшего чем dS . Тогда точное значение массы m выразится двойным интегралом

$$m = \iint_S \rho dS = \iint_S \rho(x, y) dx dy . \quad (8.1)$$

Используя этот подход, теперь легко получить элементарные статические моменты и моменты инерции плоской области относительно координатных осей и начала координат:

$$dM_x = y \rho dS , dM_y = x \rho dS ,$$

$$dI_x = y^2 \rho dS , dI_y = x^2 \rho dS , dI_0 = (x^2 + y^2) \rho dS .$$

Отсюда для самих моментов сразу получаем

$$M_x = \iint_S y \rho dS , M_y = \iint_S x \rho dS , \quad (8.2)$$

$$I_x = \iint_S y^2 \rho dS , I_y = \iint_S x^2 \rho dS , I_0 = I_x + I_y = \iint_S (x^2 + y^2) \rho dS .$$

Теперь обычным образом получаются координаты центра тяжести плоской области:

$$x_c = \frac{M_y}{m} , \quad y_c = \frac{M_x}{m} . \quad (8.3)$$

Пример 8.1. Определить массу круглой пластинки радиуса R , если поверхностная плотность $\rho(x, y)$ материала пластинки в каждой точке $M(x; y)$ пропорциональна расстоянию точки $M(x; y)$ от центра круга, т. е.

$$\rho(x, y) = k \sqrt{x^2 + y^2} .$$

Решение

По формуле (8.1) находим:

$$m = \iint_S k \sqrt{x^2 + y^2} dx dy ,$$

где область S есть круг $x^2 + y^2 \leq R^2$.

Для вычисления двойного интеграла перейдем к полярным координатам $(\rho; \varphi)$ по формулам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. В этом случае область $S = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ будет образом области $S' = \{(\rho; \varphi) \mid$

$0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, а якобиан отображения $S' \rightarrow S$ равен ρ . Тогда получим:

$$m = k \iint_{S'} \rho \rho d\rho d\varphi = k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^2 d\rho = k\varphi \Big|_0^{2\pi} \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^R = \frac{2}{3} \pi k R^3.$$

Ответ: $\frac{2}{3} \pi k R^3$.

Пример 8.2. Вычислить координаты центра масс и моменты инерции относительно координатных осей и начала координат пластинки S , ограниченной линиями $x = 1 - y^2$, $x = 0$, $y = 0$, если поверхностная плотность $\rho(x, y)$ в каждой ее точке равна xy (рис. 8.1).

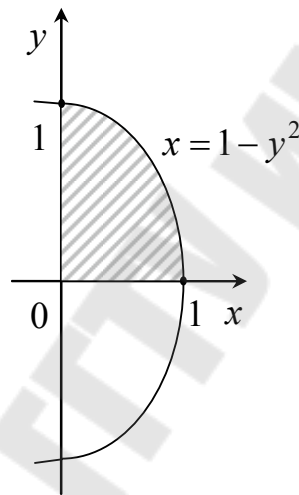


Рис. 8.1

Решение

Массу пластинки вычислим по формуле (8.1):

$$m = \iint_S xy dx dy = \int_0^1 dy y \int_0^{1-y^2} x dx = \int_0^1 dy y \frac{x^2}{2} \Big|_0^{1-y^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 dy y (1-y^2)^2 = \{t = y^2 - 1, dt = 2y dy,$$

$$y = 0 : t = -1; y = 1 : t = 0\} = \frac{1}{4} \int_{-1}^0 dt t^2 = \frac{1}{4} \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{12}.$$

Статические моменты и моменты инерции будем находить по формулам (8.2):

$$\begin{aligned}
 M_x &= \iint_S xyxdxdy = \int_0^1 dy y^2 \int_0^{1-y^2} x dx = \int_0^1 dy y^2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{1-y^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 dy y^2 (1-y^2)^2 = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 dy y^2 (1-2y^2+y^4) = \frac{1}{2} \int_0^1 dy (y^2-2y^4+y^6) = \frac{1}{2} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{2y^5}{5} + \frac{y^7}{7} \right) \Big|_0^1 = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} \right) = \frac{35-42+15}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{8}{2 \cdot 105} = \frac{4}{105};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_y &= \iint_S xxydx dy = \int_0^1 dy y \int_0^{1-y^2} x^2 dx = \int_0^1 dy y \frac{x^3}{3} \Big|_0^{1-y^2} = \frac{1}{3} \int_0^1 dy y (1-y^2)^3 = \\
 &= \{t = y^2 - 1 \text{ и т. д.}\} = -\frac{1}{6} \int_{-1}^0 dt t^3 = -\frac{1}{6} \frac{t^4}{4} \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{24};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_x &= \iint_S y^2 xydx dy = \int_0^1 dy y^3 \int_0^{1-y^2} x dx = \int_0^1 dy y^3 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{1-y^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 dy y^3 (1-y^2)^2 = \\
 &= \{t = y^2 - 1 \text{ и т. д.}\} = \frac{1}{4} \int_{-1}^0 dt (t+1)t^2 = \frac{1}{4} \int_{-1}^0 dt (t^3 + t^2) = \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{12} \right) = \frac{1}{48};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_y &= \iint_S x^2 xydx dy = \int_0^1 dy y \int_0^{1-y^2} x^3 dx = \int_0^1 dy y \frac{x^4}{4} \Big|_0^{1-y^2} = \frac{1}{4} \int_0^1 dy y (1-y^2)^4 = \\
 &= \{t = y^2 - 1 \text{ и т. д.}\} = \frac{1}{8} \int_{-1}^0 dt t^4 = \frac{1}{8} \frac{t^5}{5} \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{40};
 \end{aligned}$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{1}{48} + \frac{1}{40} = \frac{5+6}{5 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{11}{240}.$$

Теперь, используя формулы (8.3), найдем координаты центра масс пластинки:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{1 \cdot 12}{24 \cdot 1} = \frac{1}{2}, \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{4 \cdot 12}{105 \cdot 1} = \frac{16}{35}.$$

Ответ: $x_c = \frac{1}{2}, y_c = \frac{16}{35}; I_x = \frac{1}{48}, I_y = \frac{1}{40}, I_0 = \frac{11}{240}.$

Замечание 8.1

В отдельных простых случаях двойные интегралы могут быть использованы для вычисления физических величин по отношению к телам, имеющим цилиндрическую форму, причем пространственная плотность распределения масс должна зависеть только лишь от x и y . Однако при вычислении физических величин для пространственных тел в общем случае необходимо пользоваться тройным интегралом.

8.2. Физические приложения тройных интегралов

Вполне естественно, что все физические величины, связанные с распределением масс в пределах некоторого тела V в пространстве, в общем случае выражаются тройными интегралами по пространственной области V . Здесь также удобно воспользоваться принципом суммирования бесконечно малых величин.

Пусть $\rho = \rho(x, y, z)$ – плотность распределения масс в произвольной точке $M(x, y, z)$ тела V . Тогда бесконечно малая область $dV = dxdydz$ будет иметь массу $dm = \rho dV = \rho(x, y, z)dxdydz$, а, следовательно, для величины всей массы m тела V будем иметь

$$m = \iiint_V \rho dV = \iiint_V \rho(x, y, z)dxdydz. \quad (8.4)$$

Далее, исходя из элементарных статических моментов

$$dM_{yz} = xdm = x\rho dV, \quad dM_{zx} = ydm = y\rho dV, \quad dM_{xy} = zdm = z\rho dV,$$

получаем формулы для самих статических моментов:

$$M_{yz} = \iiint_V x\rho dV, \quad M_{zx} = \iiint_V y\rho dV, \quad M_{xy} = \iiint_V z\rho dV, \quad (8.5)$$

а, следовательно, и координаты центра тяжести:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{M_{zx}}{m}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m}. \quad (8.6)$$

Таким же образом получаются формулы для моментов инерции относительно координатных плоскостей:

$$I_{yz} = \iiint_V x^2 \rho dV, \quad I_{zx} = \iiint_V y^2 \rho dV, \quad I_{xy} = \iiint_V z^2 \rho dV \quad (8.7)$$

и относительно осей координат:

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho dV = I_{xz} + I_{xy}, \quad I_y = \iiint_V (z^2 + x^2) \rho dV = I_{xy} + I_{yz},$$

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho dV = I_{yz} + I_{xz}. \quad (8.8)$$

Рассмотрим еще одно физическое применение тройных интегралов. Пусть массы с заданной в каждой точке $M(x; y; z)$ тела V пространственной плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$ оказывают притяжение на точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ массы m_0 по закону всемирного тяготения (закону Ньютона: $fm_0 m \vec{r} / r^3$). Тогда сила притяжения $\vec{F} = (X; Y; Z)$ со стороны элемента dV тела с массой $dm = \rho dV$, сосредоточенного в точке $M(x; y; z)$, имеет на координатные оси проекции

$$dX = fm_0 \frac{x - x_0}{r^3} \rho dV, \quad dY = fm_0 \frac{y - y_0}{r^3} \rho dV, \quad dZ = fm_0 \frac{z - z_0}{r^3} \rho dV,$$

где f – гравитационная постоянная, а

$$r = |\overline{M_0 M}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad (8.9)$$

есть расстояние элемента dV тела массы dm , сосредоточенного в точке $M(x; y; z)$, от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Суммируя эти выражения по всему телу V , для проекций полной силы $\vec{F}(M_0)$ притяжения на координатные оси получим

$$X = fm_0 \iiint_V \frac{x - x_0}{r^3} \rho dV, \quad Y = fm_0 \iiint_V \frac{y - y_0}{r^3} \rho dV,$$

$$Z = fm_0 \iiint_V \frac{z - z_0}{r^3} \rho dV. \quad (8.10)$$

Подобным образом определяется и потенциал тела V в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$:

$$u(x_0, y_0, z_0) = fm_0 \iiint_V \rho \frac{dV}{r}. \quad (8.11)$$

Заметим, что если точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ лежит вне тела V , то все интегралы в формулах (8.10) и (8.11) оказываются собственными. В этом случае можно дифференцировать интеграл в (8.11) по любой из переменных x_0, y_0, z_0 под знаком интеграла. В результате получим соотношение, связывающее силу \vec{F} с градиентом потенциала (формула (5.6)), или в скалярной форме

$$X = \frac{\partial u}{\partial x_0}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y_0}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z_0}. \quad (8.12)$$

Более того, формулы (8.12) остаются справедливыми и в том случае, когда точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ принадлежит телу V . Очевидно также, что из определения (8.11) следует, что формулы (8.12) совпадают с выражениями (8.10).

Пример 8.3. Определить положение центра тяжести шара $V = \{(x; y; z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az\}$, если плотность в точках шара обратно пропорциональна расстоянию этих точек от начала координат: $\rho(x, y, z) = k / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Решение

По формуле (8.4) масса

$$m = k \iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

В тройном интеграле по области V перейдем к сферическим координатам $(r; \varphi; \theta)$ по формулам $x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \theta$. В этом случае область V является образом области V' : $r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta \leq 2ar \cos \theta$ или $0 \leq r \leq 2a \cos \theta$, $\cos \theta \geq 0$, откуда $V' = \{(r; \varphi; \theta) \mid 0 \leq r \leq 2a \cos \theta, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$, а якобиан отображения $V' \rightarrow V$ равен $r^2 \sin \theta$. Тогда масса m выразится через тройной интеграл по области V' , который легко вычисляется через повторный:

$$\begin{aligned}
m &= k \iiint_{V'} \frac{r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta}{r} = k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \int_0^{2a \cos \theta} dr r = k \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \times \\
&\times \frac{r^2}{2} \Big|_0^{2a \cos \theta} = \pi k \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta 4a^2 \cos^2 \theta = -4\pi k a^2 \int_0^{\pi/2} d(\cos \theta) \cos^2 \theta = \\
&= -4\pi k a^2 \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{3} \pi k a^2.
\end{aligned}$$

Для нахождения координат центра тяжести искомого тела вычислим статические моменты по формулам (8.5), переходя в них к сферическим координатам. Тогда получим:

$$\begin{aligned}
M_{yz} &= k \iiint_V \frac{xdxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = k \iiint_{V'} \frac{r \cos \varphi \sin \theta r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta}{r} = \\
&= k \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^2 \theta \int_0^{2a \cos \theta} dr r^2 = k \sin \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^2 \theta \int_0^{2a \cos \theta} dr r^2 = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{zx} &= k \iiint_V \frac{ydx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = k \iiint_{V'} \frac{r \sin \varphi \sin \theta r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta}{r} = \\
&= k \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^2 \theta \int_0^{2a \cos \theta} dr r^2 = -k \cos \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^2 \theta \int_0^{2a \cos \theta} dr r^2 = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{xy} &= k \iiint_V \frac{zdx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = k \iiint_{V'} \frac{r \cos \theta r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta}{r} = \\
&= k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \cos \theta \sin \theta \int_0^{2a \cos \theta} dr r^2 = k \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \cos \theta \sin \theta \frac{r^3}{3} \Big|_0^{2a \cos \theta} = \\
&= \frac{2}{3} \pi k \int_0^{\pi/2} d\theta \cos \theta \sin \theta 8a^3 \cos^3 \theta = -\frac{16}{3} \pi k a^3 \int_0^{\pi/2} d(\cos \theta) \cos^4 \theta = \\
&= -\frac{16}{3} \pi k a^3 \frac{\cos^5 \theta}{5} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{16}{15} \pi k a^3.
\end{aligned}$$

Наконец, используя формулы (8.6), находим координаты центра тяжести:

$$x_c = y_c = 0, \quad z_c = \frac{16\pi k a^3 \cdot 3}{15 \cdot 4\pi k a^2} = \frac{4}{5} a.$$

Ответ: $x_c = y_c = 0, \quad z_c = \frac{4}{5} a.$

Пример 8.4. Вычислить моменты инерции прямого кругового цилиндра высоты $2H$ и радиуса R относительно осей симметрии, считая плотность постоянной и равной ρ_0 .

Решение

Выберем систему координат так, чтобы ось Oz была направлена вдоль оси цилиндра, а начало координат поместим в его центре симметрии (рис. 8.2). Тогда задача сведется к вычислению моментов инерции цилиндра относительно осей Ox , Oy , Oz по формулам (8.8):

$$I_x = \rho_0 \iiint_V (y^2 + z^2) dx dy dz,$$

$$I_y = \rho_0 \iiint_V (z^2 + x^2) dx dy dz,$$

$$I_z = \rho_0 \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz.$$

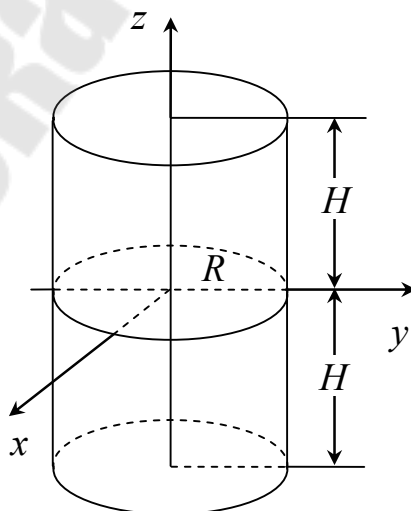


Рис. 8.2

В выбранной системе координат область V задается неравенствами $V = \{(x; y; z) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, -H \leq z \leq H\}$. В тройных интегралах по области V перейдем к цилиндрическим координатам $(\rho; \varphi; z)$ по формулам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$. В этом случае якобиан отображения $V' \rightarrow V$ равен ρ , а область V будет иметь прообразом область $V': \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi \leq R^2, -H \leq z \leq H$ или $\rho^2 \leq R^2, -H \leq z \leq H$, откуда $V' = \{(\rho; \varphi; z) \mid 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -H \leq z \leq H\}$. Тогда искомые моменты инерции выразятся через тройные интегралы по области V' , которые легко вычисляются через повторные:

$$\begin{aligned}
 I_x &= \rho_0 \iiint_{V'} (\rho^2 \sin^2 \varphi + z^2) \rho d\rho d\varphi dz = \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \int_{-H}^H dz (\rho^3 \sin^2 \varphi + \rho z^2) = \\
 &= 2\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \left(\rho^3 \sin^2 \varphi z + \rho \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^H = 2\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \left(H\rho^3 \sin^2 \varphi + \frac{H^3}{3} \rho \right) = \\
 &= 2\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \left(H \frac{\rho^4}{4} \sin^2 \varphi + \frac{H^3}{3} \frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_0^R = 2\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{HR^4}{4} \sin^2 \varphi + \frac{H^3 R^2}{6} \right) = \\
 &= 2\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{HR^4}{8} (1 - \cos 2\varphi) + \frac{H^3 R^2}{6} \right] = 2\rho_0 \left[\frac{HR^4}{8} \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) + \right. \\
 &\left. + \frac{H^3 R^2}{6} \varphi \right] \Big|_0^{2\pi} = 2\rho_0 \left(\frac{HR^4}{8} \cdot 2\pi + \frac{H^3 R^2}{6} \cdot 2\pi \right) = \pi HR^2 \rho_0 \left(\frac{R^2}{2} + \frac{2}{3} H^2 \right);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_y &= \rho_0 \iiint_{V'} (z^2 + \rho^2 \cos^2 \varphi) \rho d\rho d\varphi dz = \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \int_{-H}^H dz (\rho z^2 + \rho^3 \cos^2 \varphi) = \\
 &= 2\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \left(\rho \frac{z^3}{3} + \rho^3 \cos^2 \varphi \cdot z \right) \Big|_0^H = \\
 &= 2\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \left(\frac{H^3}{3} \rho + H\rho^3 \cos^2 \varphi \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{H^3}{3} \frac{\rho^2}{2} + H \frac{\rho^4}{4} \cos^2 \varphi \right) \Big|_0^R = 2\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{H^3 R^2}{6} + \frac{HR^4}{4} \cos^2 \varphi \right) = \\
&= 2\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{H^3 R^2}{6} + \frac{HR^4}{8} (1 + \cos 2\varphi) \right] = 2\rho_0 \left[\frac{H^3 R^2}{6} \varphi + \frac{HR^4}{8} \left(\varphi + \right. \right. \\
&\left. \left. + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \right] \Big|_0^{2\pi} = 2\rho_0 \left(\frac{H^3 R^2}{6} \cdot 2\pi + \frac{HR^4}{8} \cdot 2\pi \right) = \pi HR^2 \rho_0 \left(\frac{R^2}{2} + \frac{2}{3} H^2 \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_z &= \rho_0 \iiint_{V'} \rho^2 \rho d\rho d\varphi dz = \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho \int_{-H}^H dz = 2\rho_0 \varphi \Big|_0^{2\pi} \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R z \Big|_0^H = \\
&= 2\rho_0 \cdot 2\pi \frac{R^4}{4} \cdot H = \pi HR^4 \rho_0.
\end{aligned}$$

Ответ: $I_x = I_y = \pi HR^2 \rho_0 \left(\frac{R^2}{2} + \frac{2}{3} H^2 \right)$, $I_z = \pi HR^4 \rho_0$.

Пример 8.5. Найти притяжение центра основания прямого кругового цилиндра высоты h и радиуса R всей его массой, считая плотность постоянной и равной ρ_0 .

Решение

Компоненты силы притяжения будем вычислять по формулам (8.10), в которых плотность $\rho = \rho_0$, $m_0 = 1$, а $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, т. е.

$$X = f\rho_0 \iiint_V \frac{xdV}{r^3}, \quad Y = f\rho_0 \iiint_V \frac{ydV}{r^3},$$

$$Z = f\rho_0 \iiint_V \frac{zdV}{r^3}.$$

В выбранной системе координат область V (рис. 8.3) задается неравенствами

$$V = \{(x; y; z) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}.$$

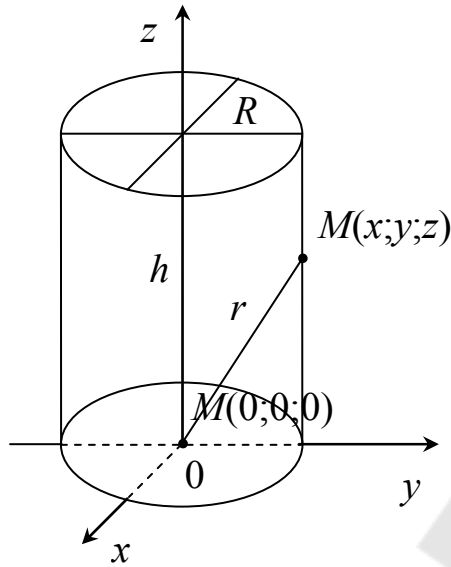


Рис. 8.3

В тройных интегралах по области V перейдем к цилиндрическим координатам $(\rho; \varphi; z)$, как это делалось в примере 8.4. В этом случае область V будет образом области $V' = \{(\rho; \varphi; z) \mid 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h\}$. Тогда искомые компоненты силы притяжения выразятся через тройные интегралы по области V' , которые легко вычисляются через повторные:

$$\begin{aligned}
 X &= f\rho_0 \iiint_{V'} \frac{\rho \cos \varphi \rho d\rho d\varphi dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = f\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \int_0^R d\rho \rho^2 \int_0^h \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \\
 &= f\rho_0 \sin \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^R d\rho \rho^2 \int_0^h \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y &= f\rho_0 \iiint_{V'} \frac{\rho \sin \varphi \rho d\rho d\varphi dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = f\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi \int_0^R d\rho \rho^2 \int_0^h \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \\
 &= -f\rho_0 \cos \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^R d\rho \rho^2 \int_0^h \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z &= f\rho_0 \iiint_{V'} \frac{z\rho d\rho d\varphi dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = f\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \rho \int_0^h \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \\
&= f\rho_0 \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^R d\rho \rho \frac{1}{2} \int_0^h \frac{d(\rho^2 + z^2)}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = 2\pi f\rho_0 \int_0^R d\rho \rho \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \Big|_0^h = \\
&= 2\pi f\rho_0 \int_0^R d\rho \rho \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} \right) = 2\pi f\rho_0 \left[\int_0^R d\rho - \frac{1}{2} \int_0^R \frac{d(\rho^2 + h^2)}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} \right] = \\
&= 2\pi f\rho_0 \left(\rho - \sqrt{\rho^2 + h^2} \right) \Big|_0^R = 2\pi f\rho_0 \left(R - \sqrt{R^2 + h^2} + h \right).
\end{aligned}$$

Ответ: $X = Y = 0$, $Z = 2\pi f\rho_0 \left(R + h - \sqrt{R^2 + h^2} \right)$.

Пример 8.6. Найти притяжение вершины прямого кругового конуса высоты h и радиуса основания R всей его массой, считая плотность постоянной и равной ρ_0 .

Решение

В выбранной системе координат область V (рис. 8.4) задается неравенствами

$$V = \left\{ (x; y; z) \mid \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h \right\}.$$

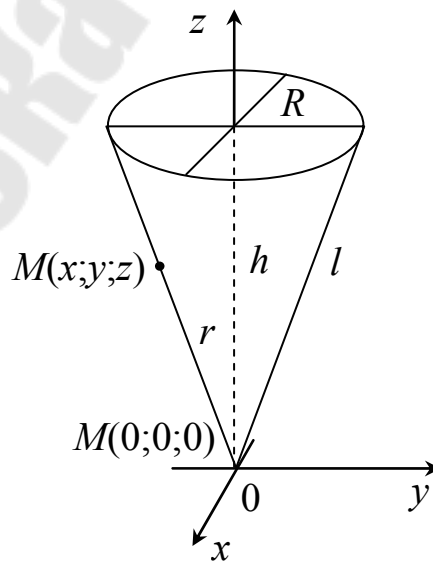


Рис. 8.4

Поступая как и в примере 8.5, в формулах (8.10), в которых $\rho = \rho_0$, $m_0 = 1$, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, перейдем к цилиндрическим координатам $(\rho; \varphi; z)$. В этом случае область V будет образом области $V' = \{(\rho; \varphi; z) \mid 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \frac{h}{R}\rho \leq z \leq h\}$. Тогда искомые компоненты силы притяжения выразятся через тройные интегралы по области V' , которые легко вычисляются через повторные интегралы:

$$\begin{aligned} X &= f\rho_0 \iiint_{V'} \frac{\rho \cos \varphi \rho d\rho d\varphi dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = f\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \int_0^R d\rho \rho^2 \int_{\frac{h}{R}\rho}^h \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \\ &= f\rho_0 \sin \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^R d\rho \rho^2 \int_{\frac{h}{R}\rho}^h \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= f\rho_0 \iiint_{V'} \frac{\rho \sin \varphi \rho d\rho d\varphi dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = f\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi \int_0^R d\rho \rho^2 \int_{\frac{h}{R}\rho}^h \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \\ &= -f\rho_0 \cos \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^R d\rho \rho^2 \int_{\frac{h}{R}\rho}^h \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z &= f\rho_0 \iiint_{V'} \frac{z \rho d\rho d\varphi dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = f\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \rho \int_{\frac{h}{R}\rho}^h \frac{dz z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \\ &= f\rho_0 \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^R d\rho \rho \frac{1}{2} \int_{\frac{h}{R}\rho}^h \frac{d(\rho^2 + z^2)}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = 2\pi f\rho_0 \int_0^R d\rho \rho \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \Big|_{\frac{h}{R}\rho}^h = \\ &= 2\pi f\rho_0 \int_0^R d\rho \rho \left(\frac{1}{\rho \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} \right) = 2\pi f\rho_0 \left[\frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \int_0^R d\rho - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int_0^R \frac{d(\rho^2 + h^2)}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} \Bigg| = 2\pi f \rho_0 \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \rho - \sqrt{\rho^2 + h^2} \right) \Bigg|_0^R = \\
& = 2\pi f \rho_0 \left(\frac{R^2}{\sqrt{R^2 + h^2}} - \sqrt{R^2 + h^2} + h \right) = 2\pi f \rho_0 \left(\frac{l^2 - h^2}{l} - l + h \right) = \\
& = \frac{2\pi f \rho_0}{l} (l^2 - h^2 - l^2 + hl) = 2\pi f \rho_0 \frac{h}{l} (l - h).
\end{aligned}$$

Здесь мы учли, что $l^2 = h^2 + R^2$.

Ответ: $X = Y = 0$, $Z = 2\pi f \rho_0 \frac{h}{l} (l - h)$.

8.3. Физические приложения криволинейных интегралов

1. Согласно замечанию 3.2, криволинейные интегралы первого рода могут быть использованы для вычисления массы кривой AB по заданной вдоль нее линейной плотности $\rho(x, y, z)$.

Пример 8.7. Найти массу участка цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ между точками $A(0; a)$ и $B(a; a \operatorname{ch} 1)$, если линейная плотность кривой в каждой ее точке обратно пропорциональна ординате точки.

Решение

Поскольку в нашем случае $\rho(x, y) = k / y = k / a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}$, то по формуле (3.10) имеем:

$$m = \int_{AB} \rho(x, y) dl = \int_0^a \frac{k}{a \operatorname{ch} \frac{x}{a}} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} dx = \frac{k}{a} \int_0^a \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{a}}{\operatorname{ch} \frac{x}{a}} dx = \frac{k}{a} x \Big|_0^a = k.$$

Ответ: $m = k$.

2. К криволинейным интегралам первого рода приводят и задачи, связанные с вычислением статических моментов плоской кривой относительно осей координат, а также координат ее центра тяжести. Если использовать подход бесконечно малых величин, изложенный в разделе 8.1, то результаты запишутся в следующем виде:

$$M_x = \int_{AB} y \rho dl, M_y = \int_{AB} x \rho dl, x_c = \frac{M_y}{m}, y_c = \frac{M_x}{m}. \quad (8.13)$$

Пример 8.8. Найти координаты центра тяжести участка параболы $y = x^2 / 2$ между точками $A(0;0)$ и $B(\sqrt{3};3/2)$, если линейная плотность кривой в каждой ее точке пропорциональна абсциссе точки.

Решение

В нашем случае $\rho(x, y) = kx$, $y' = x$. Тогда по формулам (3.10) и (8.13) имеем:

$$m = \int_0^{\sqrt{3}} kx \sqrt{1+x^2} dx = \{t^2 = 1+x^2, tdt = xdx; x=0 : t=1, x=\sqrt{3} : t=2\} =$$

$$= k \int_1^2 t \cdot t dt = k \frac{t^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{k}{3} (8-1) = \frac{7}{3} k;$$

$$M_x = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{2} \cdot kx \sqrt{1+x^2} dx = \{t^2 = 1+x^2 \text{ и т. д.}\} = \frac{k}{2} \int_1^2 (t^2-1)t \cdot t dt =$$

$$= \frac{k}{2} \int_1^2 (t^4 - t^2) dt = \frac{k}{2} \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{k}{2} \left(\frac{32}{5} - \frac{8}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{k}{2} \left(\frac{31}{5} - \frac{7}{3} \right) =$$

$$= \frac{k}{2} \cdot \frac{93-35}{15} = \frac{k58}{2 \cdot 15} = \frac{29}{15} k;$$

$$M_y = \int_0^{\sqrt{3}} x kx \sqrt{1+x^2} dx = k \int_0^{\sqrt{3}} x^2 \sqrt{1+x^2} dx = \{x = \operatorname{sh} \varphi, dx = \operatorname{ch} \varphi d\varphi; x=0 :$$

$$t = \operatorname{arsh} 0 = 0, x = \sqrt{3} : t = \operatorname{arsh} \sqrt{3}\} = k \int_0^{\operatorname{arsh} \sqrt{3}} \operatorname{sh}^2 \varphi \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 \varphi} \operatorname{ch} \varphi d\varphi =$$

$$= k \int_0^{\operatorname{arsh} \sqrt{3}} \operatorname{sh}^2 \varphi \operatorname{ch}^2 \varphi d\varphi = \{\text{т. к. } 1 + \operatorname{sh}^2 \varphi = \operatorname{ch}^2 \varphi, \text{ а } \operatorname{sh} 2\varphi = 2 \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k}{4} \int_0^{\operatorname{arsh} \sqrt{3}} \operatorname{sh}^2(2\varphi) d\varphi = \frac{k}{8} \int_0^{\operatorname{arsh} \sqrt{3}} (\operatorname{ch} 4\varphi - 1) d\varphi = \left\{ \text{т. к. } \operatorname{sh}^2 \alpha = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2\alpha - 1) \right\} = \\
&= \frac{k}{8} \left(\frac{\operatorname{sh} 4\varphi}{4} - \varphi \right) \Big|_0^{\operatorname{arsh} \sqrt{3}} = \frac{k}{8} \left(\frac{\operatorname{sh}(4 \operatorname{arsh} \sqrt{3})}{4} - \operatorname{arsh} \sqrt{3} \right) = \\
&= \frac{k}{32} (\operatorname{sh}(4 \operatorname{arsh} \sqrt{3}) - 4 \operatorname{arsh} \sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{k(\operatorname{sh}(4 \operatorname{arsh} \sqrt{3}) - 4 \operatorname{arsh} \sqrt{3}) \cdot 3}{32 \cdot 7k} = \frac{3(\operatorname{sh}(4 \operatorname{arsh} \sqrt{3}) - 4 \operatorname{arsh} \sqrt{3})}{224},$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{29k \cdot 3}{15 \cdot 7k} = \frac{29}{35}.$$

$$\text{Ответ: } x_c = \frac{3(\operatorname{sh}(4 \operatorname{arsh} \sqrt{3}) - 4 \operatorname{arsh} \sqrt{3})}{224}, \quad y_c = \frac{29}{35}.$$

3. Отметим еще одно применение криволинейного интеграла первого рода при нахождении силы притяжения, действующей на материальную точку массы m_0 со стороны материальной кривой по закону Ньютона $fm_0 m \vec{r} / r^3$, где f – гравитационная постоянная. Для нахождения компонент X , Y , Z силы притяжения воспользуемся вновь подходом бесконечно малых величин, изложенным в разделе 8.1. При этом будем считать, что притягивающая масса распределена непрерывным образом по кривой AB с линейной плотностью $\rho(x, y, z)$. Тогда для элементарных компонентов силы притяжения элементом dl кривой материальной точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ массы m_0 будем иметь:

$$dX(x_0, y_0, z_0) = fm_0 \frac{\rho(x, y, z)(x - x_0)}{r^3} dl,$$

$$dY(x_0, y_0, z_0) = fm_0 \frac{\rho(x, y, z)(y - y_0)}{r^3} dl,$$

$$dZ(x_0, y_0, z_0) = fm_0 \frac{\rho(x, y, z)(z - z_0)}{r^3} dl,$$

где r , как обычно, означает длину вектора $\vec{r} = \overline{M_0M}$, идущего из точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, в которой сосредоточена масса m_0 , в точку $M(x; y; z)$ на кривой AB (формула (8.9)). Отсюда для самих компонент силы притяжения сразу получаем

$$\left. \begin{aligned} X(x_0, y_0, z_0) &= fm_0 \int_{AB} \frac{\rho(x, y, z)(x - x_0)}{r^3} dl, \\ Y(x_0, y_0, z_0) &= fm_0 \int_{AB} \frac{\rho(x, y, z)(y - y_0)}{r^3} dl, \\ Z(x_0, y_0, z_0) &= fm_0 \int_{AB} \frac{\rho(x, y, z)(z - z_0)}{r^3} dl. \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$

Пример 8.9. Найти притяжение, которое оказывает бесконечная однородная прямая на точку массы m_0 , лежащую на расстоянии h от нее, если линейная плотность прямой в каждой ее точке постоянна и равна ρ_0 .

Решение

Искомое притяжение будем рассматривать как предел притяжения, которое оказывает конечный отрезок данной прямой, когда его концы устремляются к минус и плюс бесконечности. Пусть искомая прямая совпадает с осью Ox , а ось Oy проходит через точку M_0 массы m_0 . В этом случае $x_0 = z_0 = 0$, $y_0 = h$, $y = z = 0$, $dl = dx$, а $r = \sqrt{x^2 + h^2}$ (рис. 8.5).

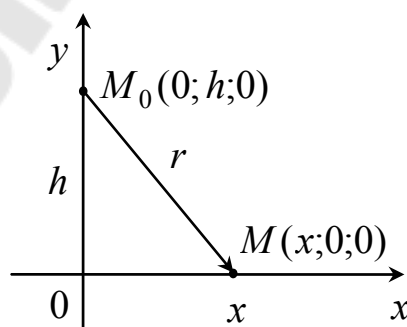


Рис. 8.5

Тогда по формулам (8.14) находим:

$$Z = 0; X = fm_0\rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2 + h^2)^{3/2}} = 0, \text{ т. к. подынтегральная функ-}$$

ция нечетная, а пределы симметричны;

$$\begin{aligned} Y &= -fm_0\rho_0 h \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + h^2)^{3/2}} = -2fm_0\rho_0 h \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 \left(\frac{h^2}{x^2} + 1 \right)^{3/2}} = \\ &= fm_0\rho_0 \frac{1}{h} \int_0^{\infty} \left(\frac{h^2}{x^2} + 1 \right)^{-3/2} d \left(\frac{h^2}{x^2} + 1 \right) = f \frac{m_0\rho_0}{h} \frac{\left(\frac{h^2}{x^2} + 1 \right)^{-1/2}}{-1/2} \Big|_0^{\infty} = \\ &= -\frac{2fm_0\rho_0}{h} (1 - 0) = -\frac{2fm_0\rho_0}{h}. \end{aligned}$$

Ответ: $X = Z = 0, Y = -2fm_0\rho_0 / h$.

Пример 8.10. Найти притяжение, которое оказывает полуокружность радиуса R на точку массы m_0 , помещенную в ее центре, если линейная плотность в каждой точке полуокружности постоянна и равна ρ_0 .

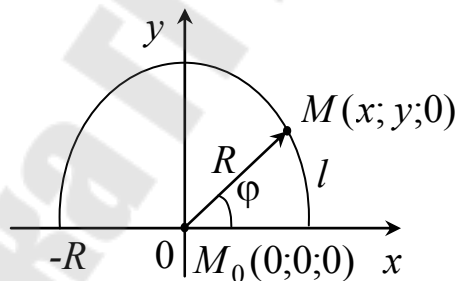


Рис. 8.6

Решение

Поместим начало координат в центр полуокружности, а ось абсцисс проведем через ее концы (рис. 8.6). В этом случае $x_0 = y_0 = z_0 = 0, z = 0, r = R, x = R \cos \varphi, y = R \sin \varphi, dl = R d\varphi$. Тогда формулы (8.14) дают:

$$Z = 0; X = fm_0\rho_0 \int_0^{\pi} \frac{R \cos \varphi R}{R^3} d\varphi = \frac{fm_0\rho_0}{R} \sin \varphi \Big|_0^{\pi} = 0;$$

$$Y = fm_0\rho_0 \int_0^\pi \frac{R \sin \varphi R}{R^3} d\varphi = -\frac{fm_0\rho_0}{R} \cos \varphi \Big|_0^\pi = \frac{2fm_0\rho_0}{R}.$$

Ответ: $X = Z = 0$, $Y = 2fm_0\rho_0 / R$.

Пример 8.11. Найти притяжение, которое оказывает дуга астроида $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, лежащая в первом квадранте, на точку M_0 массы m_0 , расположенную в начале координат, если линейная плотность в каждой точке кривой равна кубу расстояния этой точки от начала координат.

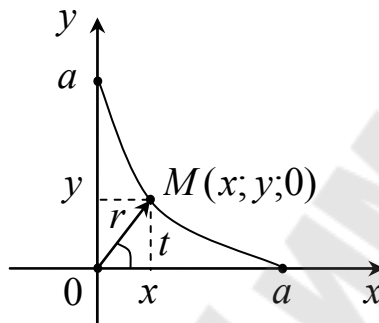


Рис. 8.7

Решение

По условию плотность $\rho = r^3$, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, $z = 0$ (рис. 8.7). Поэтому по формулам (8.14) имеем:

$$Z = 0, \quad X = fm_0 \int_{AB} \frac{r^3}{r^3} x dl = fm_0 \int_{AB} x dl,$$

$$Y = fm_0 \int_{AB} \frac{r^3}{r^3} y dl = fm_0 \int_{AB} y dl.$$

Далее находим:

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt = \\ &= 3a |\cos t \sin t| \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = 3a \cos t \sin t dt, \quad 0 \leq t \leq \pi/2. \end{aligned}$$

Тогда получим:

$$X = fm_0 \int_0^{\pi/2} a \cos^3 t \cdot 3a \cos t \sin t dt = -3fm_0 a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t d(\cos t) =$$

$$= -3fm_0 a^2 \frac{\cos^5 t}{5} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{5} fm_0 a^2,$$

$$Y = fm_0 \int_0^{\pi/2} a \sin^3 t \cdot 3a \cos t \sin t dt = 3fm_0 a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t d(\sin t) =$$

$$= 3fm_0 a^2 \frac{\sin^5 t}{5} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{5} fm_0 a^2.$$

Ответ: $X = Y = \frac{3}{5} fm_0 a^2, Z = 0.$

4. Как было отмечено в замечании 3.6, криволинейные интегралы второго рода применяются для вычисления работы силового поля – формула (3.15). Эта формула также удобна и для исследования ряда важных, связанных с ней, вопросов: о зависимости произведенной работы от формы траектории, соединяющей две данные точки, и об условиях равенства нулю работы по замкнутой траектории (см. замечание 5.6).

Пример 8.12. Найти работу поля ньютоновского притяжения, создаваемого массой m , по перемещению материальной точки массы $m_0 = 1$ из точки $A(x_A; y_A; z_A)$ в точку $B(x_B; y_B; z_B)$.

Решение

Если массу m поместить в начале координат O , а массу $m_0 = 1$ – в точку M , то точка M будет притягиваться к центру O с силой (см. пример 5.1)

$$\vec{F} = -\frac{m}{r^3} \vec{r},$$

где $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$, $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Легко проверить, что ньютоновское поле является потенциальным (см. замечание 5.3), поскольку $\text{rot } \vec{F} = 0$. Значит, существует потенциал поля $u(r)$, который дается выражением (см. пример 5.1):

$$u(r) = \frac{m}{r}.$$

Тем самым работа ньютоновского поля, создаваемого массой m , по перемещению материальной точки массы $m_0 = 1$ из точки A в точку B не зависит от формы кривой, соединяющей эти точки, а определяется приращением потенциала этого поля, т. е.

$$A = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = u(r) \Big|_A^B = \frac{m}{r} \Big|_A^B = m \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right),$$

где $r_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$, $r_B = \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2}$.

Ответ: $A = m \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$.

Пример 8.13. Показать, что приращение кинетической энергии при переходе из одной точки в другую равно работе силы, действующей на массу m (теорема живых сил).

Решение

Умножим скалярно основное уравнение динамики материальной точки массы m

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

на выражение $\vec{v} dt = d\vec{r}$, следующее из определения скорости \vec{v}

$$m \vec{v} d\vec{v} = \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

откуда следует

$$\frac{m}{2} d(v^2) = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Проинтегрируем последнее выражение вдоль траектории движения, соединяющей точки A и B :

$$\frac{m}{2} \int_{AB} d(v^2) = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

или

$$\frac{m}{2} v^2 \Big|_B - \frac{m}{2} v^2 \Big|_A = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Это и есть теорема живых сил.

8.4. Физические приложения поверхностных интегралов

1. Из замечания 4.2 следует, что с помощью поверхностных интегралов первого рода можно определять массы поверхностей, вдоль которых распределены массы с определенной в каждой точке поверхностной плотностью $\rho(x, y, z)$.

Пример 8.14. Найти массу поверхности сферы $\sigma: \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$, если ее поверхностная плотность $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение

Масса m искомой поверхности дается выражением

$$m = \iint_{\sigma} \rho(x, y, z) d\sigma = \iint_{\sigma} \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma.$$

Для ее вычисления перейдем к сферическим координатам $(r; \varphi; \theta)$, полагая

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta.$$

Поскольку на поверхности сферы σ $r = R$, то, используя формулы (4.8), (4.9) и считая $u = \varphi$, $v = \theta$, находим:

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R \sin \varphi \sin \theta & R \cos \varphi \sin \theta & 0 \\ R \cos \varphi \cos \theta & R \sin \varphi \cos \theta & -R \sin \theta \end{vmatrix} = \vec{i}(-R^2 \cos \varphi \sin^2 \theta) -$$

$$- \vec{j}R^2 \sin \varphi \sin^2 \theta + \vec{k}(-R^2 \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta - R^2 \cos^2 \varphi \sin \theta \cos \theta) =$$

$$= \vec{i}(-R^2 \cos \varphi \sin^2 \theta) + \vec{j}(-R^2 \sin \varphi \sin^2 \theta) + \vec{k}(-R^2 \sin \theta \cos \theta),$$

$$d\sigma = |\vec{N}| d\varphi d\theta =$$

$$= \sqrt{R^4 \cos^2 \varphi \sin^4 \theta + R^4 \sin^2 \varphi \sin^4 \theta + R^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} d\varphi d\theta =$$

$$= R^2 \sqrt{\sin^4 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta} d\varphi d\theta = R^2 \sin \theta d\varphi d\theta,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{R^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta} = R \sin \theta,$$

а сфера σ будет образом области $\sigma' = \{(\varphi; \theta) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi\}$.

Тогда

$$\begin{aligned} m &= \iint_{\sigma'} R \sin \theta R^2 \sin \theta d\varphi d\theta = R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin^2 \theta = \\ &= R^3 \varphi \Big|_0^{2\pi} \frac{1}{2} \int_0^{\pi} d\theta (1 - \cos 2\theta) = \pi R^3 \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = \pi^2 R^3. \end{aligned}$$

Ответ: $m = \pi^2 R^3$.

2. К поверхностным интегралам первого рода приводят и задачи, связанные с вычислением статических моментов, моментов инерции и координат центра тяжести поверхностей. Для получения формул, выражающих указанные выше величины, достаточно использовать подход бесконечно малых величин, изложенный в разделе 8.1. В результате получим формулы, аналогичные формулам (8.5)–(8.7):

$$M_{yz} = \iint_{\sigma} x \rho d\sigma, \quad M_{zx} = \iint_{\sigma} y \rho d\sigma, \quad M_{xy} = \iint_{\sigma} z \rho d\sigma, \quad (8.15)$$

$$I_{yz} = \iint_{\sigma} x^2 \rho d\sigma, \quad I_{zx} = \iint_{\sigma} y^2 \rho d\sigma, \quad I_{xy} = \iint_{\sigma} z^2 \rho d\sigma, \quad (8.16)$$

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{M_{zx}}{m}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m}. \quad (8.17)$$

Пример 8.15. Найти положение центра тяжести верхней полусферы радиуса R , если ее поверхностная плотность $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение

Для нахождения массы m искомой полусферы делаем такую же замену переменных, как и в примере 8.14. В результате будем иметь:

$$d\sigma = R^2 \sin \theta d\varphi d\theta, \quad \rho = R^2 \sin^2 \theta,$$

$$\sigma' = \{(\varphi; \theta) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi/2\},$$

$$\begin{aligned}
m &= \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma = \iint_{\sigma'} R^2 \sin^2 \theta \cdot R^2 \sin \theta d\varphi d\theta = \\
&= -R^4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d(\cos \theta)(1 - \cos^2 \theta) = -R^4 \varphi \Big|_0^{2\pi} \left(\cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\
&= 2\pi R^4 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi R^4.
\end{aligned}$$

Статические моменты вычисляем как и массу по формулам (8.15):

$$\begin{aligned}
M_{yz} &= \iint_{\sigma} x(x^2 + y^2) d\sigma = \iint_{\sigma'} R \cos \varphi \sin \theta \cdot R^2 \sin^2 \theta \cdot R^2 \sin \theta d\varphi d\theta = \\
&= R^5 \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^4 \theta = R^5 \sin \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^4 \theta = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{zx} &= \iint_{\sigma} y(x^2 + y^2) d\sigma = \iint_{\sigma'} R \sin \varphi \sin \theta \cdot R^2 \sin^2 \theta \cdot R^2 \sin \theta d\varphi d\theta = \\
&= R^5 \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^4 \theta = -R^5 \cos \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^4 \theta = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{xy} &= \iint_{\sigma} z(x^2 + y^2) d\sigma = \iint_{\sigma'} R \cos \theta \cdot R^2 \sin^2 \theta \cdot R^2 \sin \theta d\varphi d\theta = \\
&= R^5 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d(\sin \theta) \sin^3 \theta = R^5 \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{\sin^4 \theta}{4} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} R^5.
\end{aligned}$$

Тогда координаты центра тяжести находятся по формулам (8.17):

$$x_c = y_c = 0, z_c = \frac{\pi R^5 \cdot 3}{2 \cdot 4\pi R^4} = \frac{3}{8} R.$$

Ответ: $x_c = y_c = 0, z_c = \frac{3}{8} R$.

Пример 8.16. Найти моменты инерции конической поверхности $\sigma: \{z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2}, z = h\}$ относительно координатных плоскостей, если поверхностная плотность в каждой ее точке постоянна и равна ρ_0 .

Решение

Моменты инерции конической поверхности σ относительно координатных плоскостей вычисляются по формулам (8.16). Поскольку искомая коническая поверхность σ однозначно проектируется на плоскость Oxy в круг $D_{xy} = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ (рис. 8.4), то, следовательно, при вычислении поверхностных интегралов, входящих в (8.16), мы будем пользоваться формулой (4.11). Для этого находим:

$$z'_x = \left(\frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2} \right)'_x = \frac{hx}{R\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \left(\frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2} \right)'_y = \frac{hy}{R\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Тогда в соответствии с формулами (8.16) и (4.11) будем иметь:

$$\begin{aligned} I_{yz} &= \iint_{\sigma} x^2 \rho_0 d\sigma = \rho_0 \iint_{D_{xy}} x^2 \sqrt{1 + \frac{h^2 x^2}{R^2(x^2 + y^2)} + \frac{h^2 y^2}{R^2(x^2 + y^2)}} dx dy = \\ &= \rho_0 \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} \iint_{D_{xy}} x^2 dx dy, \end{aligned}$$

$$I_{zx} = \iint_{\sigma} y^2 \rho_0 d\sigma = \rho_0 \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} \iint_{D_{xy}} y^2 dx dy,$$

$$I_{xy} = \iint_{\sigma} z^2 \rho_0 d\sigma = \rho_0 \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} \frac{h^2}{R^2} \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy.$$

Для вычисления полученных двойных интегралов перейдем к полярным координатам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Тогда область $D_{xy} = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ будет образом области $D_{\rho\varphi} = \{(\rho; \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, а якобиан отображения $D_{\rho\varphi} \rightarrow D_{xy}$ равен ρ . Тем самым искомые моменты инерции выразятся через

двойные интегралы по области $D_{\rho\varphi}$, которые легко вычисляются через повторные:

$$\begin{aligned}
 I_{yz} &= \rho_0 \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{R} \iint_{D_{\rho\varphi}} \rho^2 \cos^2 \varphi \rho d\rho d\varphi = \rho_0 \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{R} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2 \varphi \int_0^R d\rho \rho^3 = \\
 &= \rho_0 \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{R} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R = \frac{1}{8} \rho_0 \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{R} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \times \\
 &\quad \times R^4 = \frac{\pi l R^3}{4} \rho_0 \quad (l = \sqrt{R^2 + h^2}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{zx} &= \rho_0 \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{R} \iint_{D_{\rho\varphi}} \rho^2 \sin^2 \varphi \rho d\rho d\varphi = \rho_0 \frac{l}{R} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \varphi \int_0^R d\rho \rho^3 = \\
 &= \rho_0 \frac{l}{R} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R = \frac{1}{8} \rho_0 \frac{l}{R} \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} R^4 = \frac{\pi l R^3}{4} \rho_0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{xy} &= \rho_0 \frac{h^2 \sqrt{R^2 + h^2}}{R^3} \iint_{D_{\rho\varphi}} \rho^2 \rho d\rho d\varphi = \rho_0 \frac{h^2 l}{R^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \rho^3 = \\
 &= \rho_0 \frac{h^2 l}{R^3} \varphi \Big|_0^{2\pi} \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\pi h^2 l R}{2} \rho_0.
 \end{aligned}$$

Ответ: $I_{yz} = I_{zx} = \frac{\pi l R^3}{4} \rho_0, \quad I_{xy} = \frac{\pi h^2 l R}{2} \rho_0 \quad (l = \sqrt{R^2 + h^2}).$

3. Поверхностные интегралы первого рода, как и тройные, и криволинейные интегралы первого рода, находят свое применение при изучении сил притяжения, действующих на материальную точку со стороны масс, распределенных на поверхности.

Пусть по поверхности σ непрерывным образом распределены массы с заданной в каждой ее точке $M(x; y; z)$ поверхностной плотностью $\rho(x, y, z)$. Тогда материальная точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ массы m_0 будет притягиваться поверхностью σ с силой $\vec{F} = (X; Y; Z)$, если

в основу положен закон всемирного тяготения (закон Ньютона: $fm_0m\vec{r}/r^3$). Используя, как обычно, подход бесконечно малых величин, получим для элементарных компонент силы притяжения элементом $d\sigma$ поверхности с массой $dm = \rho d\sigma$ материальной точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ массы m_0 следующие выражения:

$$dX(x_0, y_0, z_0) = fm_0 \frac{\rho(x, y, z)(x - x_0)}{r^3} d\sigma,$$

$$dY(x_0, y_0, z_0) = fm_0 \frac{\rho(x, y, z)(y - y_0)}{r^3} d\sigma,$$

$$dZ(x_0, y_0, z_0) = fm_0 \frac{\rho(x, y, z)(z - z_0)}{r^3} d\sigma,$$

где r , как обычно, означает длину вектора $\vec{r} = \overline{M_0M}$ (формула (8.9)). Отсюда сразу же следуют формулы для проекций силы \vec{F} притяжения простого слоя на координатные оси:

$$\left. \begin{aligned} X(x_0, y_0, z_0) &= fm_0 \iint_{\sigma} \frac{\rho(x, y, z)(x - x_0)}{r^3} d\sigma, \\ Y(x_0, y_0, z_0) &= fm_0 \iint_{\sigma} \frac{\rho(x, y, z)(y - y_0)}{r^3} d\sigma, \\ Z(x_0, y_0, z_0) &= fm_0 \iint_{\sigma} \frac{\rho(x, y, z)(z - z_0)}{r^3} d\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

Замечание 8.2

Формулы (8.18) остаются справедливыми и в том случае, когда точка $M_0 \in \sigma$. Однако в этом случае все интегралы в формулах (8.18) являются несобственными, поскольку подынтегральные функции в них вблизи точки M_0 перестают быть ограниченными.

Наконец, как и в случае пространственного тела V , введем функцию $u(x_0, y_0, z_0)$, полагая

$$u(x_0, y_0, z_0) = fm_0 \iint_{\sigma} \frac{\rho(x, y, z)}{r} d\sigma. \quad (8.19)$$

Функцию $u(x_0, y_0, z_0)$ называют потенциалом простого слоя, расположенного по поверхности σ с плотностью $\rho(x, y, z)$, на точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$. При этом для такого потенциала сохраняется фундаментальное свойство (5.6) или в скалярной форме (8.12).

Пример 8.17. Найти притяжение, испытываемое вершиной конуса со стороны его поверхности $\sigma : \{z = (h/R)\sqrt{x^2 + y^2}, z = h\}$, и потенциал этой поверхности на ее вершину, если поверхностная плотность масс, распределенных по поверхности конуса, равна расстоянию точки $M(x; y; z)$ конуса от его вершины $M_0(0;0;0)$.

Решение

Из условия задачи следует, что $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, а $\rho(x, y, z) = r$ (рис. 8.4). Тогда формулы (8.18) и (8.19) для компонент силы притяжения и потенциала поверхности конуса на его вершину принимают вид ($m_0 = 1$):

$$X = f \iint_{\sigma} \frac{xd\sigma}{r^2}, \quad Y = f \iint_{\sigma} \frac{yd\sigma}{r^2}, \quad Z = f \iint_{\sigma} \frac{zd\sigma}{r^2}, \quad u = f \iint_{\sigma} d\sigma.$$

Поскольку искомая поверхность σ конуса в выбранной системе координат задается уравнениями $\sigma : \{z = \left(\frac{h}{R}\right)\sqrt{x^2 + y^2}, z = h\}$ (рис. 8.4), то на поверхности конуса

$$\begin{aligned} r = |\overrightarrow{M_0M}| &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)} = \\ &= \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{R} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{l}{R} \sqrt{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

где $l = \sqrt{R^2 + h^2}$.

Кроме того, поверхность конуса однозначно проектируется на плоскость Oxy в круг $D_{xy} = \{(x; y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Значит, при вычислении поверхностных интегралов, входящих в выражения для компонент силы притяжения и потенциала, мы воспользуемся формулой (4.11), как это было сделано в примере 8.16. В результате получим:

$$X = f \iint_{D_{xy}} \frac{R^2 x}{l^2(x^2 + y^2)} \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} dx dy = f \frac{R}{l} \iint_{D_{xy}} \frac{x dx dy}{x^2 + y^2},$$

$$Y = f \iint_{D_{xy}} \frac{R^2 y}{l^2(x^2 + y^2)} \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} dx dy = f \frac{R}{l} \iint_{D_{xy}} \frac{y dx dy}{x^2 + y^2},$$

$$Z = f \iint_{D_{xy}} \frac{R^2 (h/R) \sqrt{x^2 + y^2}}{l^2(x^2 + y^2)} \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} dx dy = f \frac{h}{l} \iint_{D_{xy}} \frac{dx dy}{x^2 + y^2},$$

$$u = f \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} dx dy = f \frac{l}{R} \iint_{D_{xy}} dx dy = f \frac{l}{R} \pi R^2 = \pi R l f.$$

Для вычисления полученных двойных интегралов перейдем, как и в примере 8.16, к полярной системе координат. Тогда искомые компоненты силы притяжения выразятся через двойные интегралы по области $D_{\rho\varphi} = \{(\rho; \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, которые легко вычисляются через повторные:

$$X = f \frac{R}{l} \iint_{D_{\rho\varphi}} \frac{\rho \cos \varphi \rho d\rho d\varphi}{\rho^2} = f \frac{R}{l} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \int_0^R d\rho = f \frac{R}{l} \sin \varphi \Big|_0^{2\pi} \rho \Big|_0^R = 0,$$

$$Y = f \frac{R}{l} \iint_{D_{\rho\varphi}} \frac{\rho \sin \varphi \rho d\rho d\varphi}{\rho^2} = f \frac{R}{l} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi \int_0^R d\rho = -f \frac{R}{l} \cos \varphi \Big|_0^{2\pi} \rho \Big|_0^R = 0,$$

$$Z = f \frac{h}{l} \iint_{D_{\rho\varphi}} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho} = f \frac{h}{l} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho = f \frac{h}{l} \varphi \Big|_0^{2\pi} \rho \Big|_0^R = \frac{2\pi h R}{l} f.$$

Ответ: $X = Y = 0$, $Z = \frac{2\pi h R}{l} f$, $u = \pi R l f$.

Пример 8.18. Найти притяжение, испытываемое центром основания цилиндра со стороны его поверхности $\sigma: \{x^2 + y^2 = R^2, z = 0, z = h\}$, и потенциал этой поверхности на центр ее основания, если поверхностная плотность масс, распределенных по боковой поверхности цилиндра, постоянна и равна ρ_0 .

Решение

Из условия задачи следует, что $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, а $\rho(x, y, z) = \rho_0$. (рис. 8.3). Тогда формулы (8.18) и (8.19) для компонент силы притяжения и потенциала поверхности цилиндра на центр его основания принимают вид ($m_0 = 1$):

$$X = f\rho_0 \iint_{\sigma} \frac{xd\sigma}{r^3}, \quad Y = f\rho_0 \iint_{\sigma} \frac{yd\sigma}{r^3}, \quad Z = f\rho_0 \iint_{\sigma} \frac{zd\sigma}{r^3}, \quad u = f\rho_0 \iint_{\sigma} \frac{d\sigma}{r}.$$

Для вычисления данных поверхностных интегралов воспользуемся параметрическим представлением поверхности σ цилиндра: $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, $z = z$ в области $D = \{(\varphi; z) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h\}$. Тогда, принимая во внимание, что на поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, а значит, $r = |\overline{M_0M}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{R^2 + z^2}$ (рис. 8.3), и используя формулы (4.8) и (4.9), находим:

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R \sin \varphi & R \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(R \cos \varphi) + \vec{j}(R \sin \varphi) + \vec{k}(0),$$

$$|\vec{N}| = \sqrt{(R \cos \varphi)^2 + (R \sin \varphi)^2} = R, \quad d\sigma = |\vec{N}| d\varphi dz = R d\varphi dz.$$

Тем самым данные поверхностные интегралы с помощью формулы (4.10) сводятся к двойным интегралам по области D . В результате будем иметь:

$$\begin{aligned} X &= f\rho_0 \iint_D \frac{R \cos \varphi R d\varphi dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = R^2 f\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \int_0^h \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \\ &= R^2 f\rho_0 \sin \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^h \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= f\rho_0 \iint_D \frac{R \sin \varphi R d\varphi dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = R^2 f\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi \int_0^h \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \\ &= -R^2 f\rho_0 \cos \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^h \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z &= f\rho_0 \iint_D \frac{zRd\varphi dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = Rf\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2} \int_0^h \frac{d(R^2 + z^2)}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \\
&= Rf\rho_0 \varphi \Big|_0^{2\pi} \frac{1}{2} \frac{(R^2 + z^2)^{-1/2}}{-1/2} \Big|_0^h = 2\pi Rf\rho_0 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right), \\
u &= f\rho_0 \iint_D \frac{Rd\varphi dz}{\sqrt{R^2 + z^2}} = Rf\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \frac{dz}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \\
&= Rf\rho_0 \varphi \Big|_0^{2\pi} \ln \left(\frac{z}{R} + \sqrt{1 + \frac{z^2}{R^2}} \right) \Big|_0^h = 2\pi Rf\rho_0 \ln \left(\frac{h + \sqrt{R^2 + h^2}}{R} \right).
\end{aligned}$$

Ответ: $X = Y = 0$, $Z = 2\pi Rf\rho_0 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right)$,

$$u = 2\pi Rf\rho_0 \ln \left(\frac{h + \sqrt{R^2 + h^2}}{R} \right).$$

Пример 8.19. Найти силу притяжения точки и ее потенциал сферическим слоем, если поверхностная плотность постоянна и равна ρ_0 .

Решение

Выберем систему координат так, чтобы центр сферы совпадал с центром координат, а притягивающая точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ массы $m_0 = 1$ находилась на положительной части оси Oz на расстоянии a от центра, тогда $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = a$. Более того, в сферической системе координат для любой точки $M(x; y; z)$, лежащей на поверхности σ сферы радиуса R , имеем (см. пример 8.14):

$$x = R \cos \varphi \sin \theta, \quad y = R \sin \varphi \sin \theta, \quad z = R \cos \theta, \quad d\sigma = R^2 \sin \theta d\varphi d\theta,$$

$$\begin{aligned}
r &= |\overline{M_0M}| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2} = \\
&= \sqrt{R^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + (R \cos \theta - a)^2} = \\
&= \sqrt{R^2 \sin^2 \theta + R^2 \cos^2 \theta - 2aR \cos \theta + a^2} = \sqrt{R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta}, \\
\sigma' &= \{(\varphi; \theta) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi\}.
\end{aligned}$$

Следовательно, формулы (8.18) и (8.19) принимают вид:

$$\begin{aligned} X &= f\rho_0 \iint_{\sigma} \frac{x}{r^3} d\sigma = f\rho_0 \iint_{\sigma'} \frac{R \cos \varphi \sin \theta R^2 \sin \theta d\varphi d\theta}{(R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta)^{3/2}} = \\ &= R^3 f\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \int_0^{\pi} \frac{d\theta \sin^2 \theta}{(R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta)^{3/2}} = \\ &= R^3 f\rho_0 \sin \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\theta \sin^2 \theta}{(R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta)^{3/2}} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= f\rho_0 \iint_{\sigma} \frac{y}{r^3} d\sigma = f\rho_0 \iint_{\sigma'} \frac{R \sin \varphi \sin \theta R^2 \sin \theta d\varphi d\theta}{(R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta)^{3/2}} = \\ &= R^3 f\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi \int_0^{\pi} \frac{d\theta \sin^2 \theta}{(R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta)^{3/2}} = \\ &= R^3 f\rho_0 (-\cos \varphi) \Big|_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\theta \sin^2 \theta}{(R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta)^{3/2}} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z &= f\rho_0 \iint_{\sigma} \frac{(z-a)}{r^3} d\sigma = f\rho_0 \iint_{\sigma'} \frac{(R \cos \theta - a) R^2 \sin \theta d\varphi d\theta}{(R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta)^{3/2}} = \\ &= R^2 f\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{d\theta \sin \theta (R \cos \theta - a)}{(R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta)^{3/2}} = \\ &= 2\pi R^2 f\rho_0 \int_0^{\pi} \frac{d\theta \sin \theta (R \cos \theta - a)}{(R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta)^{3/2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= f\rho_0 \iint_{\sigma} \frac{d\sigma}{r} = f\rho_0 \iint_{\sigma'} \frac{R^2 \sin \theta d\varphi d\theta}{(R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta)^{1/2}} = \\ &= R^2 f\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{d\theta \sin \theta}{(R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta)^{1/2}} = 2\pi R^2 f\rho_0 \int_0^{\pi} \frac{d\theta \sin \theta}{(R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Для вычисления интегралов по переменной θ в выражениях для компоненты Z и потенциала u сделаем подстановку

$t^2 = R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta$. Тогда при $\theta = 0: t = \sqrt{R^2 + a^2 - 2aR} = \sqrt{(R-a)^2} = |R-a|$, при $\theta = \pi: t = \sqrt{R^2 + a^2 + 2aR} = \sqrt{(R+a)^2} = R+a$, а $tdt = aR \sin \theta d\theta$. В результате интегралы для Z и u легко вычисляются:

$$\begin{aligned} Z &= 2\pi R^2 f\rho_0 \int_{|R-a|}^{R+a} \frac{dtt}{aRt^3} \left(\frac{R^2 + a^2 - t^2}{2a} - a \right) = \frac{\pi R}{a^2} f\rho_0 \int_{|R-a|}^{R+a} dt \left(\frac{R^2 - a^2}{t^2} - 1 \right) = \\ &= \frac{\pi R}{a^2} f\rho_0 \left(-\frac{R^2 - a^2}{t} - t \right) \Big|_{|R-a|}^{R+a} = \frac{\pi R}{a^2} f\rho_0 \left(-\frac{R^2 - a^2}{R+a} - R - a + \right. \\ &\quad \left. + \frac{R^2 - a^2}{|R-a|} + |R-a| \right) = \frac{\pi R}{a^2} f\rho_0 \left(-2R + \frac{R^2 - a^2}{|R-a|} + |R-a| \right), \\ u &= 2\pi R^2 f\rho_0 \int_{|R-a|}^{R+a} \frac{dtt}{aR \cdot t} = \frac{2\pi R}{a} f\rho_0 t \Big|_{|R-a|}^{R+a} = \frac{2\pi R}{a} f\rho_0 (R+a - |R-a|). \end{aligned}$$

Отсюда приходим к следующим выводам:

1. Если $a < R$, то в этом случае $|R-a| = R-a$, а, значит, $Z = 0$, $u = 4\pi R f\rho_0$.

Таким образом, внутри однородного сферического слоя его потенциал постоянен, а любая точка, находящаяся внутри этого слоя, не испытывает со стороны последнего никакого притяжения.

2. Если $a > R$, то $|R-a| = -(R-a)$, так что $Z = -\frac{4\pi R^2}{a^2} f\rho_0$,
 $u = \frac{4\pi R^2}{a} f\rho_0$.

Итак, в случае, когда точка находится вне однородного сферического слоя, то она испытывает со стороны него такое притяжение, которое она испытывала бы, если бы всю массу $m = 4\pi R^2 \rho_0$ слоя сосредоточить в его центре. При этом потенциал, созданный однородным сферическим слоем вне его, совпадает с потенциалом материальной точки массы $m = 4\pi R^2 \rho_0$, помещенной в центре данного слоя.

3. Случай $a = R$ является особым, поскольку в этом случае интегралы для Z и u становятся несобственными:

$$Z = 2\pi R^2 f\rho_0 \int_0^\pi \frac{d\theta \sin \theta (R \cos \theta - R)}{(2R^2 - 2R^2 \cos \theta)^{3/2}} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} f\rho_0 \int_0^\pi \frac{d(1 - \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)^{1/2}} =$$

$$= -\frac{2\pi}{\sqrt{2}} f\rho_0 \sqrt{1 - \cos \theta} \Big|_0^\pi = -2\pi f\rho_0,$$

$$u = 2\pi R^2 f\rho_0 \int_0^\pi \frac{d\theta \sin \theta}{(2R^2 - 2R^2 \cos \theta)^{1/2}} = \frac{2\pi R}{\sqrt{2}} f\rho_0 \int_0^\pi \frac{d(1 - \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)^{1/2}} =$$

$$= \frac{4\pi R}{\sqrt{2}} f\rho_0 \sqrt{1 - \cos \theta} \Big|_0^\pi = 4\pi R f\rho_0.$$

Отсюда заключаем, что компонента Z притяжения испытывает разрыв непрерывности при прохождении притягиваемой точки M_0 через поверхность сферы, поскольку $\lim_{a \rightarrow R-0} Z = 0 \neq \lim_{a \rightarrow R+0} Z = -4\pi f\rho_0$. В то же время потенциал сохраняет свою непрерывность при переходе точки M_0 через сферу.

$$\text{Ответ: } X = Y = 0, \quad Z = \begin{cases} 0, & a < R, \\ -4\pi R^2 f\rho_0 / a^2, & a > R, \\ -2\pi f\rho_0, & a = R, \end{cases}$$

$$u = \begin{cases} 4\pi R f\rho_0, & a \leq R, \\ 4\pi R^2 f\rho_0 / a, & a \geq R. \end{cases}$$

4. Применение поверхностных интегралов второго рода связано с вычислением потоков векторных полей через заданную поверхность (см. замечание 4.6).

Пример 8.20. Вычислить поток вектора \vec{D} электрической индукции электростатического поля точечного заряда e , находящегося в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$, через поверхность сферы радиуса R с центром в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$, считая среду однородной и изотропной.

Решение

Так как среда однородна и изотропна, то вектор \vec{D} электрической индукции электростатического поля точечного заряда e дается выражением

$$\vec{D} = \frac{e\vec{r}}{4\pi r^3},$$

где $\vec{r} = \overrightarrow{M_0M}$, $r = |\vec{r}|$.

Выберем систему координат так, чтобы точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ совпадала с центром системы координат $Oxyz$. Тогда, очевидно, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, $\vec{r} = (x; y; z)$, а $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R$, когда точка $M(x; y; z)$ лежит на сфере.

Поток Π векторного поля \vec{D} будем вычислять по формуле (см. замечание 4.6)

$$\Pi = \oiint_{\sigma} \vec{D} \cdot \vec{n} d\sigma,$$

где \vec{n} – единичный вектор внешней нормали в произвольной точке $M(x; y; z)$ сферы ($|\vec{n}| = 1$), а значит $\vec{r} = R\vec{n}$. Отсюда находим:

$$\Pi = \frac{e}{4\pi} \oiint_{\sigma} \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r^3} d\sigma = \frac{e}{4\pi R^3} \oiint_{\sigma} R\vec{n} \cdot \vec{n} d\sigma = \frac{e}{4\pi R^2} \iint_{\sigma} d\sigma = \frac{e}{4\pi R^2} \cdot 4\pi R^2 = e.$$

Отметим, что полученный результат представляет собой интегральную форму одного из уравнений Максвелла для электромагнитного поля в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \vec{D} = q,$$

где q – объемная плотность зарядов.

Ответ: $\Pi = e$.

Пример 8.21. Найти поток векторного поля $\vec{F} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через произвольную замкнутую двустороннюю поверхность σ , ограничивающую тело V .

Решение

Для вычисления потока Π воспользуемся формулой Остроградского (5.17). Поскольку $\operatorname{div} \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$, то получим

$$\Pi = \oiint_{\sigma} \vec{r} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{r} dV = 3 \iiint_V dV = 3V.$$

Итак, поток радиус-вектора \vec{r} через произвольную замкнутую поверхность σ равен утроенному объему V данного тела, ограниченного поверхностью σ .

Ответ: $\Pi = 3V$.

Литература

1. Бермант, А. Ф. Краткий курс математического анализа для втузов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – Москва : Наука, 1971. – 736 с.
2. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. Т. 2 / Н. С. Пискунов. – Москва : Наука, 1985. – 576 с.
3. Толстов, Г. П. Курс математического анализа. В 2 т. Т. 2 / Г. П. Толстов. – Москва : Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1957. – 544 с.
4. Гусак, А. А. Ряды и кратные интегралы / А. А. Гусак. – Минск : Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1970. – 384 с.
5. Запорожец, Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г. И. Запорожец. – Москва : Высш. шк., 1966. – 461 с.
6. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов. – Москва : Высш. шк., 1974. – 464 с.
7. Дюбюк, П. Е. Сборник задач по курсу высшей математики / под ред. П. Е. Дюбюка и Г. И. Кручковича. – Москва : Высш. шк., 1965. – 592 с.
8. Руководство к решению задач по высшей математике. В 2 ч. Ч. 2 / под общ. ред. Е. И. Гурского. – Минск : Высш. шк., 1990. – 400 с.
9. Левин, В. И. Методы математической физики / В. И. Левин. – Москва : Гос. учеб.-педагог. изд-во М-ва просвещения РСФСР, 1960. – 242 с.

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

Великович Лев Липович
Черниченко Юрий Дмитриевич

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Пособие
по курсу «Высшая математика»
для студентов технических специальностей

Электронный аналог печатного издания

Редактор *Н. И. Жукова*
Компьютерная верстка *Н. Б. Козловская*

Подписано в печать 06.10.09.

Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».

Ризография. Усл. печ. л. 13,25. Уч.-изд. л. 10,8.

Изд. № 99.

E-mail: ic@gstu.gomel.by

<http://www.gstu.gomel.by>

Издатель и полиграфическое исполнение:
Издательский центр учреждения образования
«Гомельский государственный технический университет
имени П. О. Сухого».

ЛИ № 02330/0549424 от 08.04.2009 г.

246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.