УДК 536.2.02.001.57

К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Г.П. ТАРИКОВ, Н.В. КОВАЛЕВА
Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого, Республика Беларусь

Задачи с установившейся температурой имеют большое практическое значение [1].

Стационарные тепловые потоки характеризуются тем, что в области, в которой тепло выделяется, установившаяся температура T удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta T = 0 \tag{1}$$

Рассмотрим полуограниченное тело (полупространство). На границе этого тела ($z = 0$) могут быть заданы различные краевые условия. Полагаем, что на части границы тела задано условие первого рода, а на остальной части границы - условие второго рода. Таким образом, приходим к краевой задаче, характеризуемой дифференциальным уравнением теплопроводности (1) и граничными условиями

$T = V(x, y)$ в области Σ плоскости $z = 0$;

$q = 0$ в плоскости $z = 0$ вне области Σ :

Здесь $q = -\lambda \cdot grad\, T$, $V(x, y)$ - температура точки (x, y) в области Σ,

$\lambda -$ коэффициент теплопроводности.

В дальнейшем, для упрощения задачи, ограничимся рассмотрением случая, когда

$V(x, y) = V_0 = const$

и $q \equiv 0$ всюду в плоскости $z = 0$.

Аналитическое решение сформулированной краевой задачи известно лишь для тех случаев, когда область Σ представляет собой круг, эллипс, кольцо. Получить аналитические решения для более сложных форм области Σ весьма затруднительно.

Рассмотрим возможность моделирования этой задачи.

Для установления аналогии между задачами теплопроводности и электростатики удобнее иметь дело с их интегральными уравнениями.

Интегральное уравнение рассматриваемой задачи теплопроводности получено В. Новацким [2] и имеет вид

$$\iint\limits_{\Sigma} \frac{\varphi(x_1, y_1)dx_1dy_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}} = -V_0 2\pi . \tag{2}$$

Здесь

$$\varphi(x, y) = \frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=0}.$$

Выражение для электростатического потенциала Ψ токопроводящей пластины, имеющей также форму Σ, на которой распределяются поверхностные заряды с плотностью $q(x, y)$, можно записать в виде [3]

$$\iint_{\Sigma} \frac{q(x_1, y_1) dx_1 dy_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}} = \Psi \cdot 4\pi k_0 \varepsilon . \quad (3)$$

Из аналогии уравнений (2) и (3) следует, что задачу об определении функции $\varphi(x, y)$, распределенной по области Σ, можно заменить задачей о распределении заряда на поверхности токопроводящей пластины, имеющей форму области Σ.

Для оценки погрешности результатов эксперимента была решена задача для области Σ в виде эллипса с полуосями a и b с помощью электромоделирующего устройства [4].

В таблице приведены значения $\alpha = \varphi(x_0, 0) / \varphi(0,0)$, полученные теоретически и экспериментально для некоторых точек области Σ.

Таблица 1

y / b	α		**Погрешность в %**
	Теоретические значения	**Экспериментальные значения**	
0	1,00	1,02	1,58
0,1	1,01	1,03	1,96
0,2	1,03	1,05	1,92
0,3	1,05	1,07	2,06
0,4	1,1	1,12	2,15
0,5	1,16	1,18	2,04
0,6	1,25	1,28	2,04
0,7	1,41	1,44	2,24
0,8	1,67	1,63	2,35
0,9	2,30	2,22	3,42

Из таблицы следует, что погрешность результатов эксперимента в основном не превышает 5 %.

После нахождения функции $\varphi(x, y)$ экспериментальным путем, можно определить температурное поле в любой точке тела, используя формулу

$$T(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\varphi(x_1, y_1) dx_1 dy_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2}} . \quad (4)$$

Так как функция $\varphi(x, y)$ в результате экспериментального решения задачи будет известна лишь в ряде точек, то для вычисления интеграла (4) (по конечной области Σ) можно использовать численные методы.

Рассмотрим, в качестве примера, результаты экспериментального определения функции $\varphi(x_0, y_0)$ для области Σ в виде круга с эксцентрично расположенным круглым вырезом. При этом

$\frac{r}{R}=\frac{2}{9}$, $\frac{l}{R_1}=\frac{2}{3}$ (рис. 1).

Математическая обработка результатов эксперимента позволила получить формулы для определения функции $\varphi(x_0, y_0)$ по следующим сечениям исследованной области:

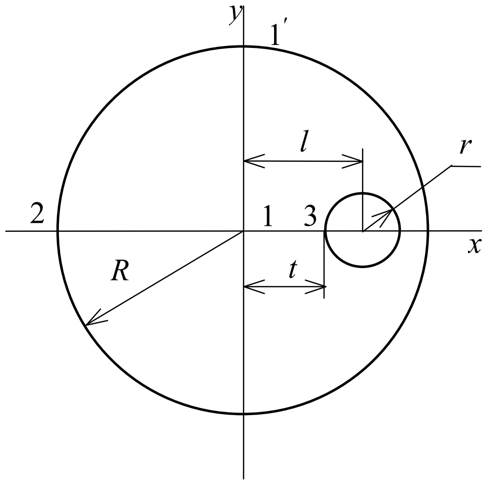

Рис.1

1-1′ $\varphi(x_0,0)=-\frac{V_0}{R_1}(1-x_0^2)^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{n=3}a_n x_0^{2n}$,

1-2 $\varphi(y_0,0)=-\frac{V_0}{R_1}(1-y_0^2)^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{n=3}b_n y_0^{2n}$, (5)

1-3 $\varphi(y_0,0)=-\frac{V_0}{R_1}\left[\left(\frac{t}{R_1}\right)^2-y_0^2\right]^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{n=3}d_n y_0^{2n}$.

Значения коэффициентов полиномов, входящих в формулы (5), приведены в таблице.

Таблица 2

Коэффициенты					
a_0	0,649	b_0	0,649	d_0	0,288
a_1	0,410	b_1	0,880	d_1	0,229
a_2	-0,929	b_2	-2,292	d_2	-9,163
a_3	0,627	b_3	1,577	d_3	27,308

Таким образом, метод электрического моделирования позволяет решать задачи теплопроводности со смешанными граничными условиями для областей Σ произвольной формы.

Литература

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. - М.: Высшая школа, 1967.- 278с.
2. Новацкий В. Вопросы термоупругости. - М.: АН СССР, 1962.- 321с.
3. Тамм И.Е. Основы теории электричества. - М.: Наука, 1976. - 475с.
4. А.с. №434426. Устройство для решения задач физических полей /Бородачев Н.М., Тариков Г.П. Бюл. № 24.- 1974.