

УДК 681.5.03.035

ТИПОВЫЕ МНОГОМЕРНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ

В.И. ЛУКОВНИКОВ, А.В. КОЗЛОВ

*Гомельский государственный технический университет
имени П.О. Сухого, Республика Беларусь*

В работе [1] был предложен многомерный операторный метод анализа систем автоматического управления (САУ), работающих на несущей переменного тока, использующих модуляцию-демодуляцию, имеющих нелинейности типа «степень» или «произведение», которые объединяет то, что их сигналы представляются в виде произведения, по меньшей мере, двух временных функций.

В отличие от традиционных методов анализа таких систем, базирующихся на представлении произведений функций с помощью одномерного преобразования Лапласа, в этой работе используется многомерное преобразование Лапласа [2] и его модификация по Луковникову [3], что позволяет устранить необходимость определения интеграла свертки и связанные с этим неудобства.

Далее в настоящей статье будет развиваться метод типовых многомерных динамических звеньев, основы которого были заложены в [1].

1. Передаточные функции типовых пассивных многомерных звеньев

Под пассивным многомерным звеном понимается звено, входной и выходной сигналы которого имеют одинаковую размерность. Например, если на входе многомерного пассивного звена имеется двумерный сигнал $X_{ex}(p_1, p_2)$, то на его выходе будет тоже двумерный сигнал $X_{вых}(p_1, p_2)$.

На примере форсирующего звена первого порядка покажем, как, используя свойства многомерного преобразования Лапласа [2,3], можно получить передаточные функции типовых пассивных многомерных динамических звеньев.

Известно, что форсирующее звено первого порядка описывается дифференциальным уравнением

$$X_{вых}(t) = T \cdot \frac{dX_{ex}(t)}{dt} + X_{ex}(t), \text{ где } T - \text{ постоянная времени.} \quad (1)$$

Если входной сигнал представлен в многомерном временном виде

$$X_{ex}(t) = \prod_{k=1}^n X_{exk}(t_k), \text{ то уравнение (1) можно записать в многомерном операторном}$$

$$\text{виде, следуя [1,3], как } X_{вых}(p_1, p_2, \dots, p_n) = T \cdot \sum_{k=1}^n p_k \cdot \prod_{k=1}^n X_{exk}(p_k) + \prod_{k=1}^n X_{exk}(p_k),$$

где p_1, p_2, \dots, p_n – операторы.

Отсюда видно, что передаточная функция форсирующего звена первого порядка будет определяться следующим соотношением:

$$W(p_1, p_2, \dots, p_n) = \frac{X_{вых}(p_1, p_2, \dots, p_n)}{X_{ex}(p_1, p_2, \dots, p_n)} = T \cdot \sum_{k=1}^n p_k + 1. \quad (2)$$

Полученные подобным (2) образом передаточные функции типовых пассивных звеньев сведены в таблицу 1, где через K обозначен коэффициент передачи, а через ξ – коэффициент затухания.

2. Передаточные функции типовых активных многомерных звеньев

Под активным многомерным звеном понимается звено, входной и выходной сигналы которого имеют разную размерность. Например, если на входе многомерного активного звена имеется одномерный сигнал $X_{вх}(p_1)$, то на выходе его сигнал будет по меньшей мере двумерным $X_{вых}(p_1, p_2)$.

Таблица 1

Передаточные функции типовых пассивных многомерных звеньев

№ п/п	Размерность звеньев Тип звеньев	Одномерные	Многомерные	
			Двумерные	\bar{n} – мерные
1	Безинерционное	K	K	K
2	Идеальное дифференцирующее	$T \cdot p$	$T \cdot (p_1 + p_2)$	$T \cdot \sum_{k=1}^n p_k$
3	Форсирующее первого порядка	$T \cdot p + 1$	$T \cdot (p_1 + p_2) + 1$	$T \cdot \sum_{k=1}^n p_k + 1$
4	Форсирующее второго порядка	$T^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot p + 1$	$T^2 \cdot (p_1 + p_2)^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot (p_1 + p_2) + 1$	$T^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^n p_k \right)^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot \sum_{k=1}^n p_k + 1$
5	Идеальное интегрирующее	$(T \cdot p)^{-1}$	$[T \cdot (p_1 + p_2)]^{-1}$	$\left(T \cdot \sum_{k=1}^n p_k \right)^{-1}$
6	Апериодическое первого порядка	$(T \cdot p + 1)^{-1}$	$[T \cdot (p_1 + p_2) + 1]^{-1}$	$\left(T \cdot \sum_{k=1}^n p_k + 1 \right)^{-1}$
7	Апериодическое второго порядка	$\left(T^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot p + 1 \right)^{-1}$	$\left[T^2 \cdot (p_1 + p_2)^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot (p_1 + p_2) + 1 \right]^{-1}$	$\left[T^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^n p_k \right)^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot \sum_{k=1}^n p_k + 1 \right]^{-1}$

Таковыми звеньями в системах автоматического регулирования на несущей переменного тока являются модуляторы, демодуляторы и их последовательное соединение через пассивные четырехполюсники [4].

Будем рассматривать амплитудную модуляцию в предположении, что модулятор и демодулятор представляют собой идеальные балансные устройства, перемножающие входные и опорные сигналы. Тогда в одномерной временной области t выходной сигнал $X_{вых}(t)$ последовательного соединения «модулятор - четырехполюсник - демодулятор» можно записать через входной сигнал $X_{вх}(t)$ в виде

$$X_{вых}(t) = X_{вх}(t) \cdot X_{ом}(t) \cdot F(t) \cdot X_{од}(t), \tag{3}$$

где $X_{ом}(t), X_{од}(t)$ – опорные временные сигналы модулятора и демодулятора, а $F(t)$ – временная передаточная функция четырехполюсника.

Введем искусственное трехмерное независимое временное пространство, так что выражение (3) примет вид

$$X_{вых}(t_1, t_2, t_3) = X_{вх}(t_1) \cdot X_{ом}(t_2) \cdot F(t_1, t_2) \cdot X_{од}(t_3). \tag{4}$$

Тогда трехмерное изображение выходного сигнала (4) по Лапласу согласно [1] можно представить как

$$X_{вых}(p_1, p_2, p_3) = X_{вх}(p_1) \cdot X_{ом}(p_2) \cdot F(p_1, p_2) \cdot X_{од}(p_3).$$

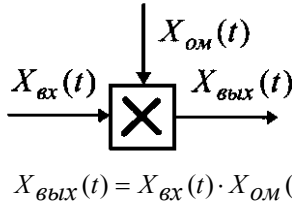
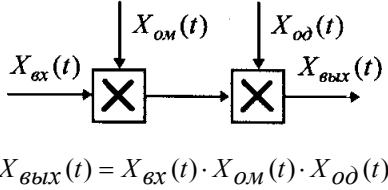
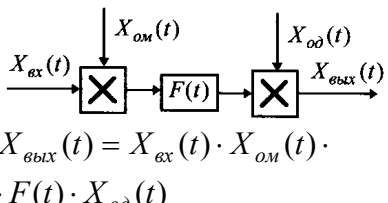
Отсюда легко получить передаточную функцию рассматриваемого последовательного соединения

$$W(p_1, p_2, p_3) = \frac{X_{вых}(p_1, p_2, p_3)}{X_{вх}(p_1)} = X_{ом}(p_2) \cdot F(p_1, p_2) \cdot X_{од}(p_3). \tag{5}$$

Полученные подобным (5) образом изображения выходных сигналов и передаточные функции типовых активных многомерных звеньев сведены в таблицу 2, где также представлены их функциональные схемы. Структурные схемы этих звеньев изображены на рис. 1.

Таблица 2

Передаточные функции типовых активных многомерных звеньев

№ п/п	Тип активно-го звена	Функциональная схема	Изображение выходного сигнала и передаточная функция звена
1	Идеальный модулятор (демодулятор)	 $X_{вых}(t) = X_{вх}(t) \cdot X_{ом}(t)$	$X_{вых}(p_1, p_2) = X_{вх}(p_1) \cdot X_{ом}(p_2)$ $W(p_1, p_2) = X_{ом}(p_2)$
2	Модулятор-демодулятор	 $X_{вых}(t) = X_{вх}(t) \cdot X_{ом}(t) \cdot X_{од}(t)$	$X_{вых}(p_1, p_2, p_3) = X_{вх}(p_1) \times X_{ом}(p_2) \cdot X_{од}(p_3)$ $W(p_1, p_2, p_3) = X_{ом}(p_2) \cdot X_{од}(p_3)$
3	Модулятор-пассивный четырехполюсник демодулятор	 $X_{вых}(t) = X_{вх}(t) \cdot X_{ом}(t) \cdot F(t) \cdot X_{од}(t)$	$X_{вых}(p_1, p_2, p_3) = X_{вх}(p_1) \times X_{ом}(p_2) \cdot F(p_1, p_2) \cdot X_{од}(p_3)$ $W(p_1, p_2, p_3) = X_{ом}(p_2) \times F(p_1, p_2) \cdot X_{од}(p_3)$

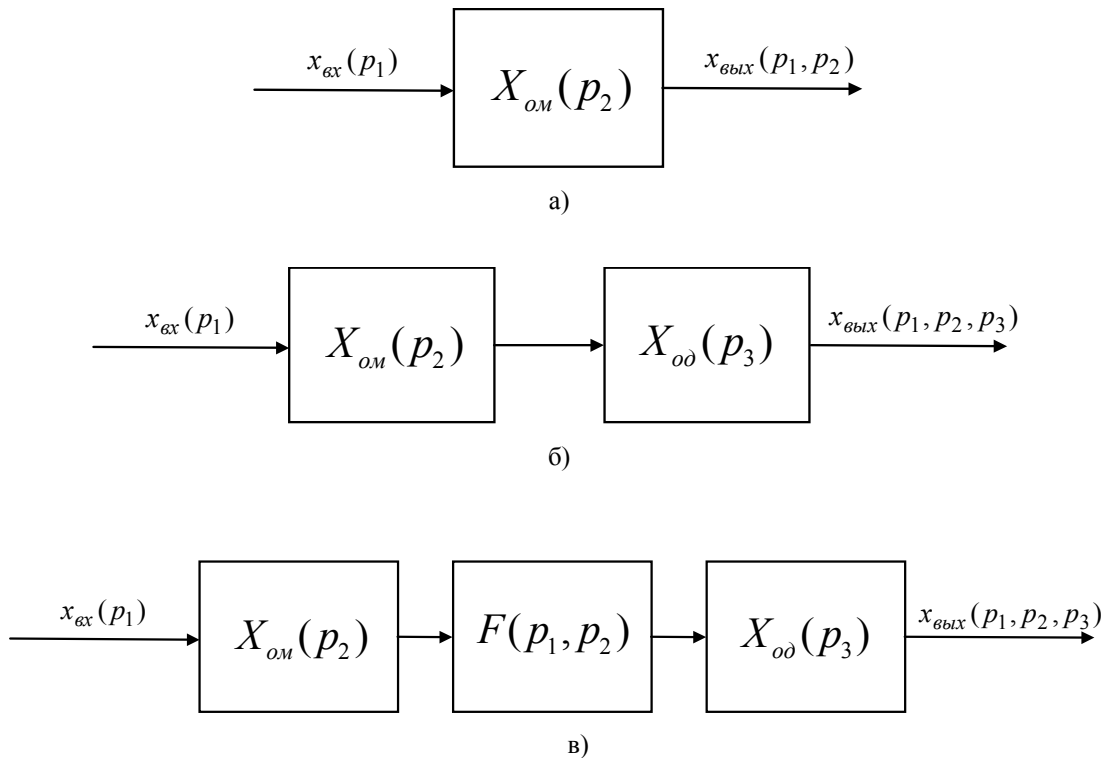


Рис. 1. Структурные схемы идеального модулятора (а), модулятора - демодулятора (б), модулятора - пассивного четырехполюсника - демодулятора (в).

Правила структурных преобразований схем с многомерными звеньями аналогичны правилам преобразования обычных структурных схем с одномерными типовыми звеньями [1]. Исключение составляет лишь учет обратных связей в схемах с активными многомерными типовыми звеньями.

3. Анализ активных многомерных звеньев с обратными связями

В работе [1] интуитивно было высказано предположение, что «...рассматривать многомерную передаточную функцию для соединений с обратными связями имеет смысл только для пассивных четырехполюсников, поскольку в случае активных четырехполюсников число независимых переменных увеличивается бесконечно».

Детальное изучение этой задачи показало, что высказанное предположение неверно. Действительно, рассматривая одиночный модулирующе-демодулирующий четырехполюсник с единичной отрицательной обратной связью (рис. 2а), можно в одномерной временной области записать выражение для выходного сигнала в виде

$$X_{вых}(t) = [X_{ex}(t) - X_{вых}(t)] \cdot f(t),$$

$$X_{вых}(t) = X_{ex}(t) \cdot \frac{f(t)}{1 + f(t)} = X_{ex}(t) \cdot \varphi(t).$$

Теперь видно, что введение обратной связи просто преобразует исходный блок перемножения в новый блок перемножения без обратной связи, но с другой опорной временной функцией $\varphi(t) = \frac{f(t)}{1 + f(t)}$.

По аналогии с вышеизложенным этот выходной сигнал в искусственной временной области можно записать через две, а не бесконечное число различных независимых временных переменных, как предполагалось в [1].

Итак,

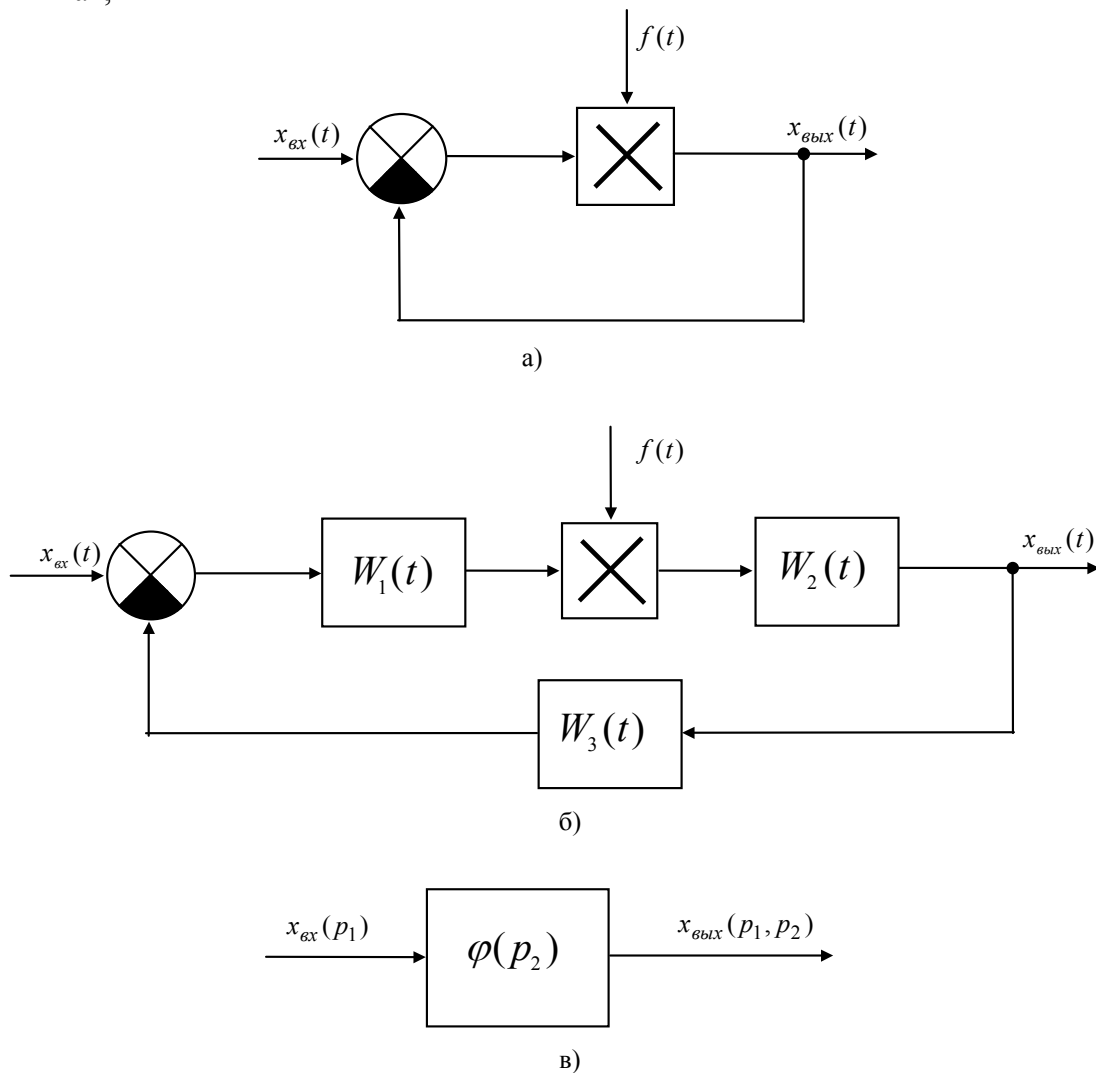


Рис. 2. Разновидности структурных схем активных четырехполюсников с обратными связями: в мгновенных значениях (а, б), в операторном виде (в).

$$X_{\text{вых}}(t_1, t_2) = X_{\text{вх}}(t_1) \cdot \varphi(t_2).$$

В двумерной операторной области это соотношение запишется обычным образом:

$$X_{\text{вых}}(p_1, p_2) = X_{\text{вх}}(p_1) \cdot \varphi(p_2), \tag{6}$$

где $\varphi(p_2) = L\left\{\frac{f(t_2)}{1+f(t_2)}\right\}$ – одномерное операторное изображение функции

$$\varphi(t_2) = \frac{f(t_2)}{1+f(t_2)} \text{ через оператор } p_2.$$

Выражение (6) соответствует структурной схеме на рис. 2в, где активный (перемножающий временные функции) четырехполюсник заменен на пассивный с передаточной функцией $\varphi(p_2)$.

Выражение (6) можно использовать и для других схем активных многомерных типовых звеньев, определяя соответствующим образом аналитическое выражение временной функции $\varphi(t)$.

Так, например, для схемы, представленной на рис. 2б,

$$\varphi(t) = \frac{W_1(t) \cdot f(t) \cdot W_2(t)}{1 + W_3(t) \cdot W_1(t) \cdot f(t) \cdot W_2(t)}. \quad (7)$$

Определение функции $\varphi(t)$ представляет определенные трудности, так как в общем случае приходится решать получаемое из (7) дифференциальное уравнение с переменными параметрами

$$[\varphi(t)W_3(t) \cdot W_1(t) \cdot f(t) \cdot W_2(t)] \cdot \varphi(t) + \varphi(t) = W_1(t) \cdot f(t) \cdot W_2(t),$$

порядок которого определяется порядками временных передаточных функций $W_1(t)$, $W_2(t)$, $W_3(t)$.

4. Примеры использования передаточных функций типовых многомерных динамических звеньев

4.1. Пассивное форсирующее звено первого порядка

Пусть входной сигнал пассивного форсирующего звена первого порядка

$$X_{ex}(t) = t \cdot \sin(\omega \cdot t). \quad (8)$$

Запишем его в двумерном временном виде:

$$X_{ex}(t_1, t_2) = X_{ex1}(t_1) \cdot X_{ex2}(t_2) = t_1 \cdot \sin(\omega \cdot t_2).$$

Входной сигнал в двумерной операторной области будет определяться выражением

$$X_{ex}(p_1, p_2) = X_{ex1}(p_1) \cdot X_{ex2}(p_2) = \frac{1}{p_1^2} \cdot \frac{\omega}{p_2^2 + \omega^2}.$$

Выходной сигнал в соответствии с таблицей 1 запишется следующим образом в двумерном операторном виде:

$$\begin{aligned} X_{ex}(p_1, p_2) &= \frac{1}{p_1^2} \cdot \frac{\omega}{p_2^2 + \omega^2} \cdot [T \cdot (p_1 + p_2) + 1] = \frac{1}{p_1} \cdot \frac{T \cdot \omega}{p_2^2 + \omega^2} + \\ &+ \frac{1}{p_1^2} \cdot \frac{T \cdot \omega \cdot p_2}{p_2^2 + \omega^2} + \frac{1}{p_1^2} \cdot \frac{\omega}{p_2^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

По правилам обратного многомерного преобразования по Лапласу [1,2] найдем по (9) выходной сигнал в двумерном временном виде:

$$X_{вых}(t_1, t_2) = T \cdot \sin(\omega \cdot t_2) + T \cdot t_1 \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t_2) + t_1 \cdot \sin(\omega \cdot t_2).$$

Перейдем в одномерную временную область, приравняв $t_1 = t_2 = t$, и получим:

$$X_{вых}(t) = T \cdot \sin(\omega \cdot t) + T \cdot t \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) + t \cdot \sin(\omega \cdot t). \quad (10)$$

В правильности полученного результата (10) можно убедиться прямой подстановкой сигнала (8) в дифференциальное уравнение (1).

4.2. Активное апериодическое звено первого порядка

Пусть входной сигнал последовательного соединения «модулятор - пассивное апериодическое звено первого порядка - демодулятор»

$$X_{ex}(t) = t,$$

а опорные сигналы

$$X_{ом}(t) = X_{од}(t) = \sin(t).$$

Тогда в соответствии с таблицей 2 выходной сигнал в трехмерном операторном виде запишется как

$$X_{\text{вых}}(p_1, p_2, p_3) = \left\{ \frac{1}{p_1^2} \cdot \frac{1}{p_2^2 + 1} \cdot \frac{1}{[(p_1 + p_2) + 1]} \right\} \cdot \frac{1}{p_3^2 + 1}, \quad (11)$$

где $F(p_1, p_2) = \frac{1}{(p_1 + p_2) + 1}$ – передаточная функция двумерного пассивного апериодического звена первого порядка при $K = 1, T = 1 \text{ с}$.

Сомножитель в фигурных скобках изображения (11) обозначим $X_2(p_1, p_2)$ и с помощью разложения на элементарные дроби преобразуем к виду

$$X_2(p_1, p_2) = \frac{1}{p_2^2 + 1} \cdot \left[\frac{1}{p_1^2 \cdot (p_2 + 1)} - \frac{1}{p_1 \cdot (p_2 + 1)^2} + \frac{1}{(p_2 + 1)^2 \cdot (p_1 + (p_2 + 1))} \right]. \quad (12)$$

Перейдем во временную область t_1 по величине p_1 , используя таблицу одномерных обратных преобразований Лапласа, раскроем скобки и получим по (12)

$$X_2(t_1, p_2) = \frac{1}{p_2^2 + 1} \cdot \frac{t_1}{(p_2 + 1)} - \frac{1}{p_2^2 + 1} \cdot \frac{1}{(p_2 + 1)^2} + \frac{1}{p_2^2 + 1} \cdot \frac{1}{(p_2 + 1)^2} \cdot e^{-(p_2 + 1) \cdot t_1} = t_1 \cdot A_1(p_2) - A_2(p_2) + A_2(p_2) \cdot e^{-(p_2 + 1) \cdot t_1}. \quad (13)$$

Вновь используя метод разложения на элементарные дроби, представим (13) в виде

$$X_2(t_1, p_2) = t_1 \cdot \left[-\frac{1}{2} \frac{p_2}{p_2^2 + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p_2^2 + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p_2 + 1} \right] - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(p_2 + 1)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p_2 + 1} + \frac{1}{2} \frac{p_2}{p_2^2 + 1} + A_2(p_2) \cdot e^{-(p_2 + 1) \cdot t_1}.$$

По таблице одномерных изображений Лапласа и теореме запаздывания окончательно перейдем в двумерную временную область и получим:

$$X_2(t_1, t_2) = -\frac{1}{2} \cdot t_1 \cdot \cos(t_2) + \frac{1}{2} \cdot t_1 \cdot \sin(t_2) + \frac{1}{2} \cdot t_1 \cdot e^{-t_2} - \frac{1}{2} \cdot t_2 \cdot e^{-t_2} - \frac{1}{2} \cdot e^{-t_2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(t_2) + \frac{1}{2} \cdot e^{-t_1} \cdot \left[(t_2 - t_1) \cdot e^{-(t_2 - t_1)} + e^{-(t_2 - t_1)} - \cos(t_2 - t_1) \right]. \quad (14)$$

Возвратимся к выражению для выходного сигнала (11) и запишем его как

$$X_{\text{вых}}(t) = X_2(t_1, t_2) \cdot \frac{1}{p_3^2 + 1},$$

что в трехмерной временной области дает

$$X_{\text{вх}}(t) = X_2(t_1, t_2) \cdot \sin(t_3).$$

Подставляя сюда выражение (14), заменяя $t_1 = t_2 = t_3 = t$, окончательно в одномерной временной области получим

$$X_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2} \cdot \sin(t) \cdot \left[\cos(t) \cdot (1 - t) + t \cdot \sin(t) - e^{-t} \right].$$

Точно такой же результат дает непосредственное определение выходного сигнала в одномерной временной области путем решения системы дифференциально-алгебраических уравнений, описывающих активное апериодическое звено первого порядка:

$$\begin{cases} X_{\text{вых}}(t) = X_2(t) \cdot \sin(t) \\ \frac{dX_2(t)}{dt} + X_2(t) = t \cdot \sin(t). \end{cases}$$

4.3. Активное многомерное звено по рисунку 2 в

Пусть в рассматриваемой схеме $X_{\text{ex}}(t) = t$, $f(t) = 1(t)$, $W_1(t) = \frac{K_1}{1 + T_1 \cdot D}$,

$$W_2(t) = \frac{1}{T_2 \cdot D}, \quad W_3(t) = K_2,$$

где K_1, K_2 - коэффициенты передачи;

T_1, T_2 - постоянные времени; $D = \frac{d}{dt}$ - временной оператор.

Прямой подстановкой в (7) найдем

$$\varphi(t) = \frac{K_1 \cdot 1(t)}{(1 + T_1 \cdot D) \cdot T_2 \cdot D + K_2 K_1 \cdot 1(t)},$$

откуда получим дифференциальное уравнение

$$T_1 \cdot T_2 \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + T_2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} + K_1 \cdot K_2 \cdot 1(t) \cdot \varphi = K_1 \cdot 1(t).$$

В случае $T_1 = 0.25c$, $T_2 = 1c$, $K_1 = K_2 = 1$ решение этого уравнения при нулевых начальных условиях будет иметь вид:

$$\varphi(t) = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot e^{(-2 + \sqrt{3})t} + \frac{\sqrt{3} - 2}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot e^{-(2 + \sqrt{3})t} + 1,$$

что дает изображение

$$\varphi(p_2) = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot \frac{1}{p_2 - (\sqrt{3} - 2)} + \frac{\sqrt{3} - 2}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot \frac{1}{p_2 + (\sqrt{3} + 2)} + \frac{1}{p_2}.$$

Литература

1. Луковников В.И. Многомерный операторный метод анализа систем с модуляцией // Вестник КГТУ, посвящ. 65-летию проф. Соустина Б.П. - Красноярск: КГТУ, 1998.- С.102-110.
2. Смышляева Л.Г. Преобразование Лапласа функций многих переменных.- Л.: Изд. ЛГУ, 1981. - 132 с.
3. Луковников В.И., Хабибуллин Д.А., Спорик А.Е. Модификация преобразования Лапласа для моделирования систем автоматического управления // Современные проблемы машиноведения. - Гомель: ГПИ, 1998. - Т.2. - С. 68-69.
4. Куракин К.И., Куракин Л.К.. Анализ систем автоматического регулирования на несущей переменного тока. - М.: Машиностроение, 1978. - 238 с.