Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 8

МАТЕМАТИКА

Академик Н. М. КРЫЛОВ

К ТЕОРИИ КОМПЛЕКСОВ ГАЛУА

Ввиду того значения, которое имеют в различных областях высшей алгебры так называемые мнимые Галуа, — будем называть комплексами Галуа выражения вида

$$\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 i^2 + \ldots + \alpha_{n-1} i^{n-1}, \tag{1}$$

где i — корень некоторого алгебраического уравнения степени n.

Хотя далее приводимые результаты могут быть легко обобщены для какого угодно n, тем не менее для простоты и определенности рассмотрим здесь только случай тернарного комплекса Галуа

$$x + iy + i^2 z, \tag{2}$$

где i является корнем некоторого уравнения третьей степени

$$t^3 = \nu t^2 + \mu t + \eta, \tag{3}$$

и рассмотрим комбинации вида

$$u(x, y, z) + iv(x, y, z) + i^2 w(x, y, z), \tag{4}$$

которые, очевидно, могут быть трактованы как функции комплекса (2) в том смысле, что каждому триплету x, y, z, очевидно, соответствуют определенные значения u, v, w, а потому и выражения (4).

Желая, однако, и здесь ввести понятие моногенности в смысле Коши, аналогично тому, что имеет место в обычной теории функций комплексной переменной, приходим после некоторых выкладок к такой системе уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad (\mu\nu + \eta)\frac{\partial w}{\partial x} + \mu\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z};\\
&\frac{\partial v}{\partial x} + \nu\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}; \qquad (\nu^2 + \mu)\frac{\partial w}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z};\\
&\eta\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}; \qquad \nu\eta\frac{\partial w}{\partial x} + \eta\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z},
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

обобщающих для рассматриваемого случая известную в теории функций комплексной переменной систему уравнений Коши — Римана.

Для весьма частного случая $\nu = 0$, $\mu = 0$, $\eta = 1$, т. е. для $i^3 = 1$, имеем такую систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z};\\
&\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z};\\
&\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial y},
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

обобщающих условия Коши — Римана и полученных другим путем J. Devisme.

При наличии соотношений (5) функциональный определитель Якоби может быть представлен в одной из следующих форм:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^3+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^3-3\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$
$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^3+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^3+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^3-3\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right),$$
$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^3+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^3-3\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

откуда непосредственно вытекает, между прочим, что при геометризации анализа, связанного с изучением функций комплекса (4), придется иметь дело не с обычной метрикой Евклида

$$x^2+y^2+z^2=1,$$

но с так называемой «сферой Аппеля» (2)

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=1,$$

впервые встреченной еще в 1877 г. П. Аппелем (2) при установлении им некоторых теорем алгебры и геометрии, выводимых из рассмотрения кубического корня из единицы.

Оставляя здесь в стороне изложение следствий, вытекающих из предыдущего, обратимся снова к определителю Якоби и заметим, что при $\nu=1$, $\mu=0$, $\eta=1$, т. е. при $i^3=i^2+1$, определитель этот принимает вид

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

При $\nu=0$, $\mu=1$, $\eta=1$, т. е. для $i^3=i+1$, вместо (7) имеем такой определитель:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix},$$

в развернутом виде представляемый некоторой формой 3-го порядка, которая и дает нам метрику соответствующего пространства.

В общем случае имеем такой определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \eta\frac{\partial w}{\partial x} & \nu\eta\frac{\partial w}{\partial x}+\eta\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y}-\nu\frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial w}{\partial x} & (\mu\nu+\mu)\frac{\partial w}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & (\nu^2+\mu)\frac{\partial w}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix}.$$

Рассматривая функции от комплексов общего вида (1), где i — корень некоторого уравнения n-й степени, можно также установить условия моногенности, обобщающие условия Коши — Римана, но слишком сложные, чтобы их здесь приводить.

Поступило
25 I 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 J. Devisme, Ann. de la Faculté des Sc. de l'Université de Toulouse (1933).
2 P. Appell, Propositions d'Algèbre et de Géométrie déduites de la considération des racines cubiques de l'unité.