Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 8

МАТЕМАТИКА

Д. А. КВЕСЕЛАВА

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ Т. КАРЛЕМАНА

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 9 X 1946)

§ 1. Пусть L — простой замкнутый гладкий контур в плоскости комплексного переменного z. Будем считать, что угол, составляемый касательной к L с постоянным направлением, удовлетворяет условию H (Гельдера). Обозначим через S^+ конечную область, ограниченную контуром L, а через S^- — бесконечную, дополняющую $S^+ + L$ до полной плоскости. Кроме того, предположим, что точка $z=0$ находится в области S^+.

Пусть функция $\alpha(t)$, заданная на L и имеющая отличную от нуля производную, удовлетворяющую условию H, взаимно-однозначно переводит контур L в самого себя, так что точки t и $\alpha(t)$ обходят L в противоположных направлениях.

Функцию $\Phi(z)$, голоморфную в S^+, кроме, быть может, конечного числа точек, являющихся ее полюсами, и непрерывно продолжимую на L, будем называть мероморфной функцией в S^+.

Рассмотрим следующую граничную задачу.

Найти функцию $\Phi(z)$, мероморфную в S^+, по граничному условию

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\Phi^+(t) + g(t) \text{ на } L, \tag{1, 1}$$

где $G(t)$, $g(t)$ — заданные на L функции, удовлетворяющие условию H, причем $G(t) \neq 0$ всюду на L.

$\Phi^+(t)$ обозначает предел $\Phi(z)$, когда $z \in S^+$ стремится к $t \in L$.

Однородная задача ($g \equiv 0$)

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\Phi^+(t) \text{ на } L, \tag{1, 2}$$

соответствующая задаче (1,1), была поставлена Т. Карлеманом [1]. Предполагая, что

$$\alpha[\alpha(t)] = t, \tag{1, 3}$$

Т. Карлеман ограничивается приведением задачи (1, 2) к интегральному уравнению Фредгольма. Однако автор не дает исследования этого уравнения и, повидимому, исследование было бы весьма затруднительным.

Мы даем здесь полное решение задачи (1,1) в том же предположении (1, 3) методом, отличным от метода, указанного Т. Карлеманом.

Для дальнейшего существенное значение имеет следующая

Лемма. *Если функция $\Phi(z)$, голоморфная в S^+, удовлетворяет граничному условию*

$$\Phi^+[\alpha(t)] = \lambda\Phi^+(t) \text{ на } L, \qquad \lambda = \pm 1,$$

то она равна постоянной; при $\lambda=-1$ *эта постоянная равна нулю.*

Это предложение легко следует из аналогичной леммы, доказанной нами в работе ([2]). Отметим, что в этой лемме не предполагается выполнение условия (1, 3). Кроме того, она остается в силе, когда вместо S^+ мы имеем S^-.

§ 2. Рассмотрим сперва тот случай, когда граничное условие (1, 1) имеет вид

$$\Phi^+[\alpha(t)]=\lambda\Phi^+(t)+g(t) \text{ на } L, \quad \lambda=\pm 1. \tag{2, 1}$$

В силу (1,3) граничная задача (2,1) может иметь решение лишь при условии

$$g(t)+\lambda g[\alpha(t)]=0. \tag{2, 2}$$

Предположим, что $g(t)$ удовлетворяет условию (2,2) и будем искать решение задачи (2,1) в виде

$$\Phi(z)=R(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-z}, \tag{2, 3}$$

где $R(z)$ — произвольная рациональная функция в S^+, голоморфная в S^-+L (включая $z=\infty$), $\varphi(t)$ — искомая функция, удовлетворяющая условию H и такая, что

$$\varphi(t)+\lambda\varphi[\alpha(t)]=0. \tag{2, 4}$$

Подставляя (2, 3) в граничное условие (2,1), будем иметь

$$T\varphi\equiv\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\left[\frac{1}{\tau-t}-\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\right]\varphi(\tau)\,d\tau=$$
$$=\lambda R[\alpha(t)]-R(t)-\lambda g(t). \tag{2,5}$$

Мы получили обычное (вообще квазирегулярное) интегральное уравнение Фредгольма. В силу приведенной леммы можно показать, что однородное уравнение $T\varphi=0$ не имеет (нетривиального) решения. Следовательно, неоднородное уравнение (2, 5) разрешимо. Легко показать, что это решение, единственное при заданной $R(z)$, необходимо удовлетворяет условию (2, 4). Поэтому $\Phi(z)$, определенная формулой (2, 3), является решением (2, 1). Теперь легко получается

Т е о р е м а 1. *Любое решение граничной задачи* (2, 1), *мероморфное в* S^+, *дается формулой* (2, 3), *где* $R(z)$ — *произвольная рациональная функция, голоморфная в* S^-+L, *исчезающая на бесконечности при* $\lambda=-1$; $\varphi(t)$ — *решение интегрального уравнения* (2, 5).

§ 3. Рассмотрим теперь однородную граничную задачу (1, 2). В силу (1, 3) необходимо предположить, что

$$G(t)\,G[\alpha(t)]=1. \tag{3, 1}$$

Пусть $\varkappa$ — индекс функции $G(t)$ *. Функция $\alpha(t)$ необходимо имеет две неподвижных точки ** на L. В силу (3,1) в этих точках $G(t)=\pm 1$. При этом $G(t)$ принимает на них одинаковые значения, когда $\varkappa$ — четное число, и различные значения, когда $\varkappa$ — нечетное.

* $\varkappa=\frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L$, где символ $[\ ]_L$ обозначает приращение выражения, заключенного в скобки, при одном обходе точкой t контура L в положительном направлении.

** Т. е. точки, где $\alpha(t)=t$; в дальнейшем мы будем называть их просто н е п о д в и ж н ы м и т о ч к а м и.

Пусть сперва $\varkappa = 2\varkappa'$ — четное число. Аргумент функции

$$G^*(t) = t^{-\varkappa'} \alpha^{\varkappa'}(t)\, G(t_0)\, G(t), \tag{3, 2}$$

где t_0 — какая-либо из двух неподвижных точек, будет возвращаться к исходному значению после обхода точкой t контура L. Кроме того, $G^*(t)\, G^*[\alpha(t)] = 1$, $G^*(t_0) = 1$. Следовательно, под $\log G^*(t)$ мы можем подразумевать однозначную функцию, удовлетворяющую условию H, обращающуюся в нуль при $t = t_0$. При этом $\log G^*(t) + \log G^*[\alpha(t)] = 0$.

Функция

$$\Psi(z) = z^{-\varkappa'} e^{-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\psi(\tau)\, d\tau}{\tau - z}},$$

где $\psi(z)$ — решение интегрального уравнения $T\psi = -\log G^*(t)$, удовлетворяет граничному условию $\Psi^+[\alpha(t)] = G(t_0)\, G(t)\, \Psi^+(t)$ на L. Поэтому (1, 2) можно переписать в виде

$$\frac{\Phi^+[\alpha(t)]}{\Psi^+[\alpha(t)]} = G(t_0)\, \frac{\Phi^+(t)}{\Psi^+(t)};$$

общее решение последней задачи легко написать, пользуясь теоремой 1.

Пусть теперь $\varkappa = 2\varkappa' - 1$ — нечетное число. Обозначим через t_0 ту неподвижную точку, в которой $G(t) = -1$. В таком случае, как легко показать, любое решение $\Phi(z)$ задачи (1, 2) имеет вид $\Phi(z) = (z - t_0)\, \Phi_0(z)$, где функция $\Phi_0(z)$ мероморфна в S^+ и удовлетворяет граничному условию $\Phi_0^+[\alpha(t)] = G_0(t)\, \Phi_0^+(t)$ на L, где

$$G_0(t) = G(t)\, \frac{t - t_0}{\alpha(t) - t_0}.$$

Функция $G_0(t)$ удовлетворяет условию H и отлична от нуля всюду на L. Кроме того, индекс функции $G_0(t)$ равен $2\varkappa'$ и $G_0(t)\, G_0[\alpha(t)] = 1$, $G_0(t_0) = 1$.

Таким образом, мы опять пришли к задаче с четным индексом.

Условимся называть **канонической функцией**, соответствующей $G(t)$, функцию

$$\chi(z) = \begin{cases} z^{-\varkappa'} e^{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{z - \tau}} & \text{при } \varkappa = 2\varkappa', \\[2ex] z^{-\varkappa'}(z - t_0)\, e^{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\psi(\tau)\, d\tau}{z - \tau}} & \text{при } \varkappa = 2\varkappa' - 1, \end{cases}$$

где $\varphi(t)$ — решение интегрального уравнения

$$T\varphi = \begin{cases} -\log G^*(t) & \text{при } \varkappa = 2\varkappa', \\ -\log G_0^*(t) & \text{при } \varkappa = 2\varkappa' - 1. \end{cases}$$

Здесь t_0 — произвольная неподвижная точка в случае четного индекса и та неподвижная точка, в которой $G(t) = -1$, в случае нечетного индекса; функция $G_0^*(t)$ определена формулой

$$G_0^*(t) = t^{-\varkappa'} \alpha^{\varkappa'}(t)\, G_0(t), \quad \varkappa = 2\varkappa' - 1,$$

а функция $G^*(t)$ и $G_0(t)$, — соответственно, формулами (3, 2) и (3, 3).

Каноническая функция $\chi(z)$ удовлетворяет граничному условию $\chi^+[\alpha(t)] = \lambda G(t)\, \chi^+(t)$ на L, где $\lambda = -1$, когда $G(t) = -1$, в обеих неподвижных точках, и $\lambda = 1$ во всех остальных случаях.

Резюмируя сказанное выше, легко убедиться, что имеет место следующая

Теорема 2. *Любое решение граничной задачи* (1,2), *мероморфное в* S^+, *дается формулой*

$$\Phi(z) = \chi(z) R(z) + \frac{\chi(z)}{2\pi i} \int_L \frac{r(\tau)\, d\tau}{\tau - z},$$

где $\chi(z)$ — *каноническая функция*; $R(z)$ — *произвольная рациональная функция, голоморфная в* $S^- + L$ *и исчезающая на бесконечности, когда* $G(t) = -1$ *в обеих неподвижных точках*; $r(t)$ — *решение интегрального уравнения* $Tr = \lambda R[\alpha(t)] - R(t)$.

$\lambda = -1$, когда $G(t) = -1$ в обеих неподвижных точках, и $\lambda = 1$ во всех остальных случаях.

§4. Перейдем к общей неоднородной граничной задаче (1,1). Если она разрешима, то либо $\frac{g[\alpha(t)] + g(t)\, G[\alpha(t)]}{1 - G(t)\, G[\alpha(t)]}$ является предельным значением некоторой функции, мероморфной в S^+, и, в таком случае, (1,1) решается непосредственно интегралом Коши, или же

$$G(t)\, G[\alpha(t)] = 1, \quad g(t) + G(t)\, g[\alpha(t)] = 1. \tag{4,1}$$

При выполнении условий (4,1) имеет место следующая

Теорема 3. *Любое решение граничной задачи* (1,1), *мероморфное в* S^+, *дается формулой*

$$\Phi(z) = \chi(z) R(z) + \frac{\chi(z)}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - z},$$

где $\chi(z)$ — *каноническая функция, соответствующая* $G(t)$; $R(z)$ — *произвольная рациональная функция, голоморфная в* $S^- + L$ *и исчезающая на бесконечности, когда* $G(t) = -1$ *в обеих неподвижных точках*; $\varphi(t)$ *решение интегрального уравнения* $T\varphi = \lambda \frac{g[\alpha(t)]}{\chi^+(t)} + \lambda R[\alpha(t)] - R(t)$.

$\lambda = -1$, когда $G(t) = -1$ в обеих неподвижных точках, и $\lambda = 1$ во всех остальных случаях.

Граничные значения $\Phi^+(t)$ всякого мероморфного решения задачи (1,1), как легко видеть, удовлетворяют условию H; это, конечно, следствие того, что мы подчинили такому же условию функции $G(t)$ и $g(t)$.

Академия Наук Грузинской ССР

Поступило 9 X 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] T. Carleman, Verhandl. des intern. mathem. Kongr. Zürich, 1, 138 (1932), [2] Д. А. Квеселава, ДАН, 53, № 8 (1946).