[3] Павленко Ю. Г., *Лекции по теоретической механике.* М.: МГУ, 1991. 336 с.
[4] Сурнев В. Б., *Математическое моделирование. Непрерывные детерминированные модели.* Екатеринбург: УГГУ, 2013. 689 с.

Сурнев Виктор Борисович, доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: `sournev@yandex.ru`
Пяткова Вера Борисовна, доцент, e-mail: `sournev@yandex.ru`

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет», Екатеринбург, Россия

УДК 517.938

О. Н. Шабловский

Динамика неустойчивости кинк-решений нелинейных и нелокальных волновых уравнений с источниками

В современной математической физике важное место занимают волновые уравнения, содержащие степенные, экспоненциальные и другие нелинейности (уравнения Клейна—Гордона). Нелинейные источники, входящие в волновые уравнения, позволяют моделировать сложные явления в различных областях естествознания. В данной работе для определенности речь идет о процессах волнового теплопереноса в системе «среда — источник энергии». Такие задачи являются важным элементом динамической теории неравновесных состояний вещества. Для уравнений Клейна—Гордона принципиальное значение имеют кинк-решения, описывающие переход между двумя состояниями равновесия системы. Известные в литературе решения типа «кинк» наиболее подробно изучены для уравнения синус-Гордона. В докладе представлены результаты исследования локального ($\varepsilon = 0$) и нелокального ($\varepsilon \neq 0$) волновых уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\tau}{\partial(x')^2} - \varepsilon\chi^2\frac{\partial^4\tau}{\partial(x')^4} = k_\upsilon(\tau), \tag{1}$$

где $\tau = T - T^0$, $x' = x/w$, $\chi^2 = \chi_1^2/w^4$; T^0, w — const; x — декартова координата; t — время; T — температура; w — скорость распространения тепловых возмущений; функция $k_\upsilon(\tau)$ характеризует воздействие внутренних источников тепла; параметр $\varepsilon\chi_1^2$ определяет слабую пространственную нелокальность задачи. В работе изучена устойчивость/ неустойчивость кинк-решений уравнения (1) для функциональных зависимостей $k_\upsilon(\tau)$ полиномиального и экспоненциального видов. Дадим перечень обозначений, которые применяются при записи построенных решений: f_1, r — произвольные постоянные, имеющие размерность $[t^{-1}]$; $\zeta = (f_1 + r)x' + (f_1 - r)t$ — аргумент типа «бегущая волна»; $\bar\tau = \tau/\tau_b$; $\bar k_\upsilon = k_\upsilon t_b^2/\tau_b$; $\bar\Omega = \varepsilon\chi^2(f_1 + r)^2$; $\bar f_1 = f_1/(f_1 + r)$; $\bar r = r/(f_1 + r)$; $t_b^2 = 1/(f_1 + r)^2$; чертой сверху отмечаем безразмерные величины; нижний индекс b относится к масштабам величин, применяемых при обезразмеривании.

Приведем пример. Для кубического по температуре источника

$$\bar{k}_{\upsilon} = m^2(1 - M_1^2)\bar{\tau}(\bar{\tau} - 1)(1 - 2\bar{\tau}) \tag{2}$$

локальное ($\varepsilon = 0$) волновое уравнение имеет кинк-решение

$$\bar{\tau} \equiv K = \bar{\varphi}E_1/(1 + \bar{\varphi}E_1), \ \ E_1 = \exp(m\zeta), \ \ x \in (-\infty, \infty), \ \ t \geq 0, \tag{3}$$

где $\bar{\varphi} = B_1B_2 > 0$; $\tau_b = 1/B_1$; B_1, B_2 — const; $M_1^2 = N_1^2/w^2$; $N_1 = w(2\bar{r}-1)$ есть скорость перемещения линии $\zeta = \text{const}$, т.е. это скорость волны переключения между двумя состояниями равновесия; M_1 — тепловое число Маха; m^2 — параметр источника. Таким образом, процесс «сверхзвуковой» ($M_1^2 > 1$) при $f_1r < 0$; процесс «дозвуковой» ($0 < M_1^2 < 1$) при $f_1r > 0$.

Стандартную процедуру линеаризации выполняем, взяв решение уравнения (1), (2) при $\varepsilon = 0$ в виде $\bar{\tau} = K + \varepsilon_1\Delta(\bar{x}', \bar{t})$, где ε_1 — некоторый малый положительный параметр. Асимптотическое решение линейного уравнения, которое определяет возмущение $\Delta(\bar{x}', \bar{t})$, построено при условии, что функция источника содержит большой параметр Λ: $6m^2 = \Lambda^2 >> 1$. Обнаружено, что в структуре данного асимптотического решения содержится произвольная функция $F(\psi)$ аргумента $\psi = (1 - 2\bar{r})\bar{x}' + \bar{t}$. Следовательно, если при $t = 0$ исходное кинк-решение получает малое возмущение $\varepsilon_1\Delta(t = 0, \bar{x}')$, то это возмущение возбуждает еще одну волну ($\psi = \text{const}$), которая распространяется со скоростью $N_2 = w/(2\bar{r}-1)$. Таким образом, $N_1N_2 = w^2$ или, что то же самое, $M_1^2M_2^2 = 1$. Отметим еще, что если возмущение $F(\psi)$ происходит по гармоническому закону, то Δ содержит в своей структуре стоячую волну специального вида. Анализ показал, что устойчивость решения наблюдается при следующих обстоятельствах: 1) в дозвуковом процессе ($0 < M_1^2 < 1$) при $d\bar{k}_{\upsilon}/d\bar{\tau} > 0$; 2) в сверхзвуковом процессе ($M_1^2 > 1$) при $d\bar{k}_{\upsilon}/d\bar{\tau} < 0$. На остальных температурных интервалах кинк-решение неустойчивое по резонансному типу.

Кинк-решение (3) удовлетворяет нелокальному ($\varepsilon \neq 0$) уравнению (1) с источником

$$\bar{k}_{\upsilon} = 12m^2\bar{\Omega}\bar{\tau}(1 - \bar{\tau})(1 - 2\bar{\tau})(\bar{\tau}^{(3)} - \bar{\tau})(\bar{\tau} - \bar{\tau}^{(4)}), \tag{4}$$

который обращается в ноль в пяти температурных точках; $m^2\bar{\Omega}$ — параметр источника. В данном примере знаки ε и $\bar{\Omega}$ одинаковые. Подробный комментарий формулы (4) здесь не приводится. Процедура линеаризации уравнения (1) на точном решении (2), (4) и алгоритм построения асимптотического решения для возмущения Δ аналогичны тем, что применялись для локального уравнения. Анализ показал, что для нелокальной задачи существуют условия устойчивости/неустойчивости, инверсные по отношению к соответствующим условиям для локальной задачи. Вариант $\bar{\Omega} < 0$: в дозвуковом процессе имеем устойчивость при $d\bar{k}_{\upsilon}/d\bar{\tau} > 0$, и это аналогично локальной задаче; в сверхзвуковом процессе имеем устойчивость тоже при $d\bar{k}_{\upsilon}/d\bar{\tau} > 0$, и эта ситуация инверсна по отношению к $\varepsilon = 0$. Вариант $\bar{\Omega} > 0$: в дозвуковом процессе имеем устойчивость при $d\bar{k}_v/d\bar{\tau} < 0$, т.е. наблюдается инверсия по отношению к локальному случаю; в сверхзвуковом процессе условие устойчивости такое же, как в локальной задаче.

Даны примеры физического истолкования полученных решений.

Шабловский Олег Никифорович, доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: `shablovsky-on@yandex.bys`

Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого, Гомель, Беларусь

УДК 519.6155

О. Н. Шевченко

Метод годографа в задачах нелинейной фильтрации

Введение

В процессе построение долгосрочного прогноза разработки месторождения горизонтальными скважинами очень остро стоит вопрос определения притока жидкости из пласта в скважину. При учете дебитов на месторождениях аналогах — величина погрешностей в прогнозах очень велика. Основные существующие на сегодняшний день математические модели, описывающие процесс движения жидкости из пласта в скважину, в своей основе подразумевают линейный закон фильтрации. Научно доказано, что линейный закон фильтрации сохраняется в определенном диапазоне скоростей, в связи с чем необходимо модернизировать построение моделей в соответствии с нелинейными законами фильтрации. Наиболее быстрым и аналитически верным для расчета притока в скважину является метод годографа. На примере годографа скоростей [1] рассмотрим математическую модель притока несжимаемой жидкости к горизонтальной скважине в условиях степенного закона фильтрации.

1. Постановка задачи

Рассмотрим пласт в виде бесконечной горизонтальной полосы в плоскости $(x,\, y)$ шириной $2h$ с непроницаемой кровлей и подошвой (рис. 1).

Из условия непроницаемости кровли и подошвы пласта следует равенство нулю вертикальной составляющей скорости фильтрации в кровельной и подошвенной частях пласта. Горизонтальная скважина расположена в центре пласта в виде точечного стока, контур питания бесконечно удален ($x \to \infty$) с постоянным давлением. Рассмотрим процесс плоского движения несжимаемой жидкости к скважине. При вышеизложенных условиях течение жидкости симметрично относительно осей Ox и Oy, благодаря чему решение необходимо найти только для одного квадранта.